ПОЛНОЕ СОБРАНІЕ

СОЧИНЕНІЙ

ПО ГЕОМЕТРІИ

Н. И. Лобачевскаго.

Изданіе Императорскаго Казанскаго Университета.

ТОМЪ ПЕРВЫЙ.

СОЧИНЕНІЯ НА РУССКОМЪ ЯЗЫКѢ.

КАЗАНЬ.
Типографія Императорскаго университета.
1883.

Печатано съ разрѣшенія Совѣта Университета.

Н. И. Лобачевскій родился 22 октября 1793 года въ Нижегородской губерніи. Отецъ его, архитекторъ, умеръ въ 1797 году, оставивъ послѣ себя жену и малолѣтнихъ сыновей съ самыми ограниченными средствами. Мать Лобачевскаго, вскорѣ послѣ смерти мужа, переселилась въ Казань, гдѣ успѣла помѣстить своихъ сыновей въ Казанскую гимназію на казенное содержаніе. Н. И. Лобачевскій былъ принятъ въ гимназію въ ноябрѣ 1802 года почти безъ всякой домашней подготовки. Курсъ гимназіи того времени былъ четырехлѣтній, потому можно полагать, что запасъ знаній, съ которыми Лобачевскій по окончаніи курса гимназіи вступилъ въ университетъ, былъ довольно ограниченъ. Лобачевскій сдалъ вступительный экзаменъ и былъ принятъ въ Казанскій университетъ казенно-коштнымъ студентомъ 14 февраля 1807 года.

Призваніе къ математикѣ нескоро выказалось въ молодомъ студентѣ, по крайней мѣрѣ въ числѣ его сокурсниковъ, заявившихъ въ 1808 году желаніе преимущественно заниматься математикой, имя Н. И. Лобачевскаго не встрѣчается. Вѣроятно, Лобачевскій, сознавая недостатки гимназическаго образованія, съ равнымъ усердіемъ занимался всѣми науками университетскаго курса,—такъ онъ, не будучи спеціалистомъ по какой либо отрасли наукъ, въ тоже время по успѣхамъ выдавался изъ среды своихъ товарищей. Это видно изъ аттестаціи, данной о немъ инспекторомъ студентовъ по случаю избранія Лобачевскаго камернымъ студентомъ. Инспекторъ студентовъ говоритъ о Лобачевскомъ, какъ о студентѣ отличившемся успѣхами въ наукахъ, но не отличающимся благонравнымъ поведеніемъ. Камерные студенты выбирались товарищами изъ лучшихъ по успѣхамъ и поведенію и утверждались попечителемъ. Потому, надо полагать, не малы должны быть успѣхи Лобачевскаго, что попечитель не счелъ недостатки поведенія препятствіемъ къ утвержденію его камернымъ студентомъ.

Неповиновеніе, строптивость и нарушеніе порядка часто навлекали на Лобачевскаго неудовольствіе университетскаго начальства; разъ даже Лобачевскій подвергался опасности быть исключеннымъ изъ университета и только, благодаря заступничеству Бартельса, онъ былъ оставленъ. Бартельсъ былъ первымъ профессоромъ математики въ Казанскомъ университетѣ и имѣлъ существенное вліяніе на развитіе математическихъ талантовъ Лобачевскаго. По крайней мѣрѣ Лобачевскій до конца своей жизни сохранилъ къ Бартельсу чувство глубокаго уваженія и благодарности. Вліяніе Бартельса, ученика Гаусса, можно видѣть и

въ работахъ Лобачевскаго; чрезъ него на Лобачевскаго повліяли тѣ идеи Гаусса, которыя и положены были потомъ Лобачевскимъ въ основаніе его новыхъ началъ геометріи. Другіе профессора, лекціи которыхъ могли имѣть вліяніе на развитіе талантовъ Лобачевскаго, вступили въ университетъ послѣ Бартельса.

Въ 1808 году были назначены профессоръ прикладной математики Реннеръ и въ помощь Бартельсу магистръ С.-Петербургскаго университета Никольскій. Профессоръ астрономіи Литровъ и профессоръ физики Броннеръ начали свои лекціи только въ 1810 году, слѣдовательно уже предъ окончаніемъ курса Лобачевскимъ. Въ 1810 году Лобачевскій былъ удостоенъ степени кандидата.

Въ то время полученіе степени кандидата не считалось полнымъ окончаніемъ университетскаго курса, почему Лобачевскій продолжалъ свои занятія въ университетѣ съ бо́льшими еще успѣхами, и такимъ образомъ имѣлъ возможность вполнѣ воспользоваться лекціями и руководствомъ Бартельса, Литрова и Броннера, имена которыхъ сохранились въ исторіи математическихъ наукъ. Насколько успѣшны были занятія Лобачевскаго, видно изъ рекомендаціи его, данной Бартельсомъ въ Совѣтѣ университета, гдѣ Бартельсъ говорилъ, что „Лобачевскій оказалъ столько успѣховъ, что даже во всякомъ нѣмецкомъ университетѣ былъ бы отличнымъ“ и выражалъ надежду, что Лобачевскій займетъ *значущее мѣсто въ математическомъ кругу*. Другіе профессора математическаго отдѣленія Германнъ, Литровъ и Броннеръ раздѣляли мнѣніе Бартельса и вмѣстѣ съ нимъ рекомендовали Лобачевскаго достойнымъ получить степень магистра, въ какой онъ и былъ утвержденъ попечителемъ 3 августа 1811 года.

Степень магистра въ то время давалась не по экзамену, а по рекомендаціи профессоровъ, и рекомендованное лицо утверждалось въ ученой степени попечителемъ. Магистры оставались подъ надзоромъ инспектора студентовъ и подъ руководствомъ профессора той науки, какую магистръ избралъ своей спеціальностью. Магистры читали лекціи студентамъ во время болѣзни или отсутствія профессоровъ, помогали профессорамъ, занимаясь со студентами практическими упражненіями, повторяя съ ними пройденное и объясняя трудныя мѣста, встрѣчавшіяся въ лекціяхъ профессоровъ. Послѣднее было необходимо, потому что профессора читали лекціи на иностранныхъ языкахъ, не всегда хорошо знакомыхъ студентамъ. Кромѣ того магистры участвовали въ трудахъ редакціи Казанскихъ Извѣстій и исполняли различныя порученія, возлагаемыя на нихъ университетомъ. Но главною обязанностью магистровъ было собственное усовершенствованіе въ избранныхъ ими наукахъ, при чемъ необходимымъ условіемъ было ближайшее и постоянное сношеніе съ профессорами руководителями. Такъ Лобачевскій занимался на дому у Бартельса четыре раза въ недѣлю, и есть свѣденія, что первыми со-

чиненіями, изученными Лобачевскимъ подъ руководствомъ Бартельса, были „Disqusitiones arithmeticæ“—Гаусса и первый томъ „Mécanique céleste“—Лапласа.

Предавшись съ любовью развитію замѣченныхъ талантовъ у молодого магистра, Бартельсъ не ошибся въ своемъ выборѣ, и труды его увѣнчались успѣхами, превосшедшими ожиданія. Лобачевскій обезсмертилъ свое имя въ наукѣ и по своимъ научнымъ заслугамъ стоитъ выше своего учителя. Правда ни Бартельсъ, ни самъ Лобачевскій не видѣли достойной оцѣнки трудовъ послѣдняго. Значеніе геометрической теоріи, созданной Лобачевскимъ, было вполнѣ оцѣнено и самой теоріи отведено надлежащее мѣсто въ наукѣ только въ концѣ шестидесятыхъ годовъ, когда была опубликована переписка Гаусса съ Шумахеромъ, и когда Гуель издалъ переводъ на французскій языкъ „Beiträge zu der Theorie der Parallellinien“—Лобачевскаго.

Изъ переписки Гаусса съ Шумахеромъ видно, что еще въ 30-хъ годахъ, когда работы Лобачевскаго игнорировались ученымъ міромъ и появленіе ихъ въ печати было встрѣчено насмѣшками, даже такихъ авторитетовъ, какъ Остроградскій, Гауссъ зналъ уже о работахъ Лобачевскаго и оцѣнивалъ ихъ по достоинству. Это знакомство Гаусса съ трудами Лобачевскаго указываетъ на существовавшія между ними сношенія, или черезъ Гёттингенское королевское общество, котораго Лобачевскій состоялъ членомъ, или можетъ быть чрезъ Бартельса. Одобреніе трудовъ со стороны мірового генія понятно поддерживало и укрѣпляло Лобачевскаго къ продолженію его работъ, не смотря на встрѣчаемое повсюду невниманіе. Насколько Лобачевскій стремился уяснить читающему міру свою геометрическую теорію, видно изъ того, что послѣ сжатаго изложенія, читаннаго въ факультетѣ „о началахъ геометріи“, онъ излагаетъ свои идеи подробно и популярно въ „новыхъ началахъ геометріи съ теоріей параллельныхъ линій“, предпославъ имъ крайне интересное введеніе—разборъ доказательствъ постулята Эвклида о встрѣчѣ перпендикуляра и наклонной. Затѣмъ Лобачевскій провѣряетъ полученные имъ тригонометрическія формулы, прилагаетъ ихъ къ рѣшенію треугольниковъ и къ рѣшенію нѣкоторыхъ интеграловъ и издаетъ полученные результаты въ его „Воображаемой Геометріи“ и ея приложеніяхъ; печатаетъ на французскомъ языкѣ воображаемую геометрію и на нѣмецкомъ новую теорію параллельныхъ; наконецъ результаты всѣхъ своихъ геометрическихъ работъ излагаетъ въ строгой логической системѣ въ его „Пангеометріи“, изданной на французскомъ и русскомъ языкахъ. Но все безуспѣшно. Лобачевскій умеръ, неувидѣвъ справедливой оцѣнки его теоріи.

Съ другой стороны нельзя винить и современниковъ Лобачевскаго въ несправедливомъ отношеніи къ его трудамъ. Выступивъ на путь критики геометрическихъ аксіомъ и сознавая невозможность непосредствен-

нымъ выводомъ доказать знаменитый постулятъ Эвклида о пересѣченіи перпендикуляра и наклонной, Лобачевскій предпринялъ путь доказательства отъ противнаго. Допустивъ возможность, что перпендикуляръ и наклонная при извѣстной величинѣ угла не встрѣчаются, онъ долженъ былъ бы получить нелѣпые результаты, если постулятъ Эвклида есть необходимое слѣдствіе геометрическихъ опредѣленій и аксіомъ, ранѣе допущенныхъ. Но этого не случилось. Результаты, полученные Лобачевскимъ, хотя обыкновенному уму и могли показаться нелѣпыми, но для глубокаго мыслителя они являлись строго логичными и не противорѣчащими природѣ вещей. Въ настоящее время выяснилось, что геометрическая теорія Лобачевскаго для двухъ измѣреній представляетъ собою геометрію на поверхности съ постоянной отрицательной кривизной, бокалообразной поверхности: подобно тому какъ геометрія сферическая представляетъ геометрію на сферѣ,—поверхности съ постоянной положительной кривизной. Геометрія Эвклида на плоскости составляетъ переходъ отъ геометріи Лобачевскаго къ сферической. Геометрія же Лобачевскаго для трехъ измѣреній до сихъ поръ не получила реальнаго субстрата. но послужила къ раскрытію основъ геометрическаго метода и къ распространенію приложеній его къ изученію другихъ протяженныхъ системъ трехъ и большаго числа измѣреній, отличныхъ отъ пространства.

Для современниковъ же Лобачевскаго его теорія была непонятна и являлась подрывающею аксіому, неизбѣжность которой хотя и основывалась только на вѣрованіи, но вѣрованіи, освященномъ тысячелѣтіями. Насколько велика была сила увѣренности въ необходимости этой аксіомы видно изъ того, что даже самъ Гауссъ, не смотря на заслуженный уже имъ авторитетъ, которымъ онъ пользовался въ ученомъ мірѣ, выражалъ свое согласіе съ взглядами Лобачевскаго только въ частной перепискѣ.

Въ настоящее время имя Лобачевскаго стоитъ во главѣ школы геометровъ, изучающихъ не Эвклидову геометрію, какъ названа нынѣ геометрическая теорія Лобачевскаго. Въ какіе нибудь десять лѣтъ образовалась громадная литература по неэвклидовой геометріи, въ образованіи которой принимали и принимаютъ участіе корифеи современной науки. Списки вышедшихъ сочиненій по неэвклидовой геометріи помѣщены въ статьяхъ „George Bruce Halsted (American Journal of Mathematics, Pure and Applied. Vol. I, pp. 261—266, 384, 385; Vol. II, pp. 65—70) и въ „Началахъ Эвклида“. Ващенко-Захарченко. Въ этихъ спискахъ читатель встрѣтитъ работы Римана, Гельмгольца, Гуэля, Бельтрами, Батталини, Клейна, Липшитца и др.

Кромѣ критики началъ геометріи Лобачевскій посвящалъ свои труды и другимъ вопросамъ не меньшей важности. Его труды по сходимости безконечныхъ строкъ представляютъ весьма важный вкладъ въ

науку и сохранятся въ исторіи ея. Учебникъ Алгебры Лобачевскаго до сихъ поръ можно считать образцовымъ по методу изложенія и точности опредѣленій. Во всѣхъ его сочиненіяхъ видна таже строгость отношенія къ научнымъ опредѣленіямъ и таже строгость къ различію аксіомъ, вытекающихъ изъ природы изучаемыхъ вещей, отъ аксіомъ, вытекающихъ изъ опредѣленій, какая вскорѣ потомъ была формулирована въ общемъ видѣ въ безсмертныхъ трудахъ французскаго математика и философа Огюста Конта.

Въ печати имя Лобачевскаго встрѣчается въ первый разъ въ „Казанскихъ извѣстіяхъ“ въ 1811 году № 31 въ сообщеніи Литрова о наблюденіяхъ магистра Лобачевскаго и студента Симонова надъ кометой 1811 года. Напечатаны слѣдующія сочиненія Лобачевскаго:

1. *О резонансѣ, или взаимномъ колебаніи воздушныхъ столбовъ*, извлеченіе изъ статьи Уидстона въ Quarterly Journal 1828, помѣщена въ Казанскомъ Вѣстникѣ за 1828 годъ, № 11 и 12.

2. *О началахъ геометріи*, извлеченіе изъ ненапечатаннаго сочиненія на французскомъ языкѣ „Exposition succincte des principes de la Géométrie“, читаннаго въ 1826 году 12 февраля въ засѣданіи факультета, помѣщено въ Казанскомъ Вѣстникѣ за 1829 годъ, №№ 2, 3, 4, 11 и 12 и за 1830 годъ, №№ 3, 4, 7 и 8.

3. *Рѣчь о важнѣйшихъ предметахъ воспитанія*, произнесенная 5 іюня 1828 года. (Казанскій Вѣстникъ 1832 года № 8).

4. *Алгебра или вычисленіе конечныхъ*. Казань 1833 г. 8°.

5. *Пониженіе степени въ двучленномъ уравненіи, когда показатель безъ единицы дѣлится на 8*. (Въ Ученыхъ Запискахъ Казанскаго университета за 1834 годъ) (1).

6. *Объ исчезаніи тригонометрическихъ строкъ*. (Ученыя Записки 1834 года кн. 2).

7. *Воображаемая геометрія* (Ученыя Записки Казанскаго университета 1835 г. кн. 1), нѣсколько въ сокращенномъ видѣ помѣщена въ 17 томѣ Journal fur die Mathematik—Crelle, на французскомъ языкѣ.

8. *Условныя уравненія для движенія и положенія главныхъ осей обращенія въ твердой системѣ* (Ученыя Записки Московскаго университета 1834 г.).

9. *Способъ увѣряться въ исчезаніи безконечныхъ строкъ и приближаться къ значеніямъ функцій отъ весьма большихъ чиселъ* (Ученыя Записки Казанскаго университета 1835 г. кн. 2).

10. *Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ* (Ученыя Записки Казанскаго университета 1835 г. кн. 3, 1836 г. кн. 2 и 3, 1837 г. кн. 1, 1838 г. кн. 1 и 3).

---

(1) Ученыя Записки начали издаваться съ 1834 года и первая книжка вышла съ предисловіемъ, написаннымъ Лобачевскимъ.

11. *Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ* (Ученыя Записки Казанскаго университета 1836 г. кн. 1).

12. Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées (Journal für die Mathematik. Crelle. 24 часть).

13. Beiträge zu den Parallellinien (Berlin. 1840 г.).

14. Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen (Казань 1841 г. 4°).

15. *Полное солнечное затмѣніе въ Пензѣ 26 іюня 1842 г.* (Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія 1843 г.).

16. *О значеніи нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ* (Ученыя Записки Казанскаго Университета 1852 г. кн. 4 и на нѣмецкомъ языкѣ въ журналѣ Эрмана: „Archiv für die wissenschaftliche Kunde von Russland“).

17. Pangéometrie ou précis de Géometrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. (Помѣщено въ Сборникѣ, изданномъ по случаю 50-лѣтняго юбилея Казанскаго университета въ 1856 г.).

18, *Пангеометрія* (Ученыя Записки Казанскаго университета за 1855 г.).

Кромѣ того есть извѣстіе о сочиненіи, представленномъ въ физико-математическій факультетъ въ 1815 году „о разрѣшеніи алгебраическаго уравненія $x^n - 1 = o$“, которое не было напечатано.

Занимаясь отвлеченными науками, Лобачевскій относился съ любовью и къ наукамъ опытнымъ. Памятникомъ его трудовъ въ наукахъ наблюдательныхъ остались упомянутое уже описаніе наблюденій солнечнаго затмѣнія въ Пензѣ и устроенные по мысли Лобачевскаго чувствительные термометры для наблюденія температуры почвы.

Будучи профессоромъ математики въ Казанскомъ университетѣ, Лобачевскій дѣлился со своими слушателями результатами его ученыхъ работъ. Въ памяти благодарныхъ учениковъ его сохранилось глубокое уваженіе и высокая оцѣнка его лекцій (1). Профессоръ Поповъ, ученикъ Лобачевскаго, говоритъ въ своемъ воспоминаніи о Лобачевскомъ „Въ аудиторіи профессоръ Лобачевскій умѣлъ быть глубокомысленнымъ или увлекательнымъ, смотря по предмету изложенія“; „Онъ мало заботился о механизмѣ счета, но всего болѣе о точности понятія“; „Его публичныя лекціи привлекали въ аудиторію многочисленную публику, а чтенія для избранной аудиторіи, въ которыхъ Лобачевскій развивалъ свои новыя начала геометріи, должно назвать по справедливости глубокомысленными“.

---

(1) Изъ учениковъ Лобачевскаго особенно извѣстны имена бывшихъ профессоровъ Казанскаго университета Попова и Больцани.

Профессорская дѣятельность Лобачевскаго продолжалась 32 года; сначала съ 1814 года въ званіи адъюнкта, а съ 1816 въ званіи профессора до 1846 года, когда Лобачевскій былъ назначенъ помощникомъ попечителя Казанскаго учебнаго округа. Занимая каѳедру чистой математики Лобачевскій въ продолженіе своей профессорской службы въ разное время выступалъ преподавателемъ всѣхъ отраслей математическихъ наукъ, или занимая вакантную каѳедру, или замѣняя профессора, командированнаго за границу. Такимъ образомъ онъ кромѣ чистой математики временно читалъ астрономію (по Деламбру), математическую физику (по Фурье, Лапласу, Пуассону и Френелю), опытную физику и наконецъ механику твердыхъ и жидкихъ тѣлъ (по Лагранжу и Пуассону). По занимаемой имъ каѳедрѣ чистой математики Лобачевскій въ первое время читалъ теорію чиселъ по Гауссу и Лежандру (съ 1814 по 1816 г.), плоскую и сферическую тригонометрію по руководству Каньёли (съ 1814 по 1833 г.), а съ 1824 года аналитическую геометрію, вычисленіе конечныхъ разностей, дифференціальное исчисленіе, интегральное и варіяціонное исчисленія по Лакроа и приложеніе анализа къ геометріи по Монжу. Наконецъ съ 1833 года до конца своей профессорской дѣятельности Лобачевскій читалъ въ трехъ старшихъ курсахъ интегральное и варіяціонное исчисленіе руководствуясь сочиненіями Кузена. Лагранжа и Лакроа.

Кромѣ лекцій спеціальныхъ для студентовъ университета Лобачевскій читалъ нѣсколько лѣтъ популярные курсы физики и ариѳметики для чиновниковъ, приготовляющихся къ существовавшимъ тогда экзаменамъ на полученіе чина 8-го класса, и публичныя лекціи по физикѣ, привлекавшія въ его аудиторію многочисленную публику.

Но не только по ученой и профессорской дѣятельности имя Лобачевскаго связано съ Казанскимъ университетомъ, его административная дѣятельность по университету также заслуживаетъ не малаго удивленія. Достаточно сказать, что онъ 19 лѣтъ сряду исполнялъ по выборамъ должность Ректора университета, и его административной дѣятельности университетъ обязанъ постройкой наилучшихъ зданій. Лобачевскій постоянно принималъ живое участіе въ изданіи Казанскаго Вѣстника, и по его мысли и плану основанъ и издается до сихъ поръ журналъ университета „Ученыя Записки и Извѣстія Казанскаго Университета“.

Историкъ Казанскаго университета профессоръ Буличъ въ своей рѣчи надъ гробомъ Лобачевскаго говоритъ, что жизнь Лобачевскаго неразрывно слилась съ исторіей Казанскаго университета, она есть живая лѣтопись университета, его надеждъ и стремленій, его возрастанія и развитія. Въ концѣ жизни Лобачевскій потерялъ зрѣніе и, будучи слѣпцомъ, продолжалъ свои научныя занятія. Его послѣднее сочиненіе Пангеометрія было написано его учениками подъ диктантъ Лобачевскаго. Лобачевскій умеръ 1856 года 12 февраля.

ОГЛАВЛЕНІЕ

ПЕРВАГО ТОМА.

О началахъ геометріи . . . . . 1.

Воображаемая геометрія . . . . . 71.

Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интегралмъ . . 121.

Новыя начала геометріи съ полною теоріею параллельныхъ . . . 219.

Вступленіе. . . . . —

Глава I Первыя понятія въ геометріи. . . . . 235.

Глава II. Опредѣленіе шара, сферы, круга, плоскости и прямой линіи. . . 243.

Глава III. Измѣреніе прямыхъ линій, линейныхъ и плоскостныхъ угловъ . . 256.

Глава IV. О линіяхъ и плоскостяхъ перпендикулярныхъ . . . . . 263.

Глава V. Измѣреніе тѣлесныхъ угловъ помощію плоскостныхъ. . . . 275.

Глава VI. Одинаковость треугольниковъ. . . . . 292.

Глава VII. Параллельныя линіи . . . . . 301.

Глава VIII. Линія, поверхность и треугольники предѣльные. . . . . 317.

Глава IX. Тригонометрическія функціи. . . . . 328.

Глава X. Зависимость угла параллельности съ его перпендикуломъ.. . . 340.

Глава XI. Зависимость угловъ и боковъ треугольника. . . . . 350.

Глава XII Рѣшеніе прямолинейныхъ треугольниковъ въ употребительной геометріи. 370.

Глава XIII. Рѣшеніе сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ . . . 450.

Пангеометрія. . . . . 487.

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ [1].

Кажется, трудность понятій увеличивается по мѣрѣ ихъ приближенія къ начальнымъ истинамъ въ природѣ; также какъ она возрастаетъ въ другомъ направленіи, къ той границѣ, куда стремится умъ за новыми познаніями. Вотъ почему трудности въ Геометріи должны принадлежать, вопервыхъ, самому предмету. Далѣе, средства, къ которымъ надобно прибѣгнуть, чтобы достигнуть здѣсь послѣдней строгости, едва ли могутъ отвѣчать цѣли и простотѣ сего ученія. Тѣ, которые хотѣли удовлетворить симъ требованіямъ, заключили себя въ такой тѣсной кругъ, что всѣ усилія ихъ не могли быть вознаграждены успѣхомъ, Наконецъ скажемъ и то, что со времени *Ньютона и Декарта*, вся Математика, сдѣлавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами впередъ, что оставила далеко за собой то ученіе, безъ котораго могла уже обходиться и которое съ тѣмъ вмѣстѣ перестало обращать на себя вниманіе, какое прежде заслуживало. *Евклидовы* начала такимъ образомъ, не смотря на глубокую древность ихъ, не смотря на всѣ блистательные успѣхи наши въ Математикѣ, сохранили до сихъ поръ первобытные свои недостатки.

Въ самомъ дѣлѣ, кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться съ такихъ темныхъ понятій, съ какихъ, повторяя *Евклида*, начинаемъ мы Геометрію; и что нигдѣ въ Математикѣ нельзя терпѣть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить въ теоріи параллельныхъ линій. Правда, что противъ ложныхъ заключеній отъ неясности первыхъ и общихъ понятій въ Геометріи предостерегаетъ насъ представленіе самыхъ

([1]) Извлечено самимъ Сочинителемъ изъ разсужденія, подъ названіемъ: *Exposition succincte des principes de la Géometrie etc.*, читаннаго въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ, 12 февраля 1826 года.

предметовъ въ нашемъ воображеніи; а въ справедливости принятыхъ истинъ безъ доказательства убѣждаемся простотою ихъ и опытомъ, напримѣръ астропомическими наблюденіями; однакожъ все это нисколько не можетъ удовлетворить умъ, пріученный къ строгому сужденію. Къ тому и не въ правѣ пренебрегать рѣшеніемъ вопроса, покуда оно неизвѣстно и покуда не знаемъ, не послужитъ ли оно еще къ чему другому.

Здѣсь намѣренъ я изъяснить, какимъ образомъ думаю пополнить такіе пропуски въ Геометріи. Изложеніе всѣхъ моихъ изслѣдованій въ надлежащей связи потребовало бы слишкомъ много мѣста и представленія совершенно въ новомъ видѣ всей науки. О прочихъ недостаткахъ Геометріи, менѣе важныхъ по затрудненію, не почитаю нужнымъ говорить подробно. Ограничусь однимъ только замѣчаніемъ, что они относятся къ способу преподаванія. Никто не помышляетъ отдѣлить то, что исключительно принадлежитъ Геометріи, отъ того, гдѣ наука сія становится уже другою, т. е. Аналитикой.

Первыя понятія, съ которыхъ начинается какая нибудь наука, должны быть ясны и приведены къ самому меньшому числу. Тогда только они могутъ служить прочнымъ и достаточнымъ основаніемъ ученія. Такія понятія пріобрѣтаются чувствами; врожденнымъ—не должно вѣрить.

Ничего не можетъ быть простѣе того понятія, которое служитъ основаніемъ Ариѳметикѣ. Мы познаемъ легко что все въ природѣ подлежитъ измѣренію, все можетъ быть сосчитано. Не таковы положенія Механики; человѣкъ съ помощію однихъ ежедневныхъ своихъ опытовъ не могъ бы придти къ нимъ. Вѣчность и одинаковость разъ сообщеннаго движенія, гдѣ скорость служитъ мѣрою онаго и массы различныхъ тѣлъ — такого рода истины, которыя требовали времени, пособія другихъ познаній и ожидали генія.

Между свойствами, общими всѣмъ тѣламъ, одно должно назваться *геометрическимъ*,—прикосновеніе. Словами нельзя передать совершенно того, что мы подъ этимъ разумѣемъ: понятіе пріобрѣтено чувствами, мы его постигаемъ. Прикосновеніе составляетъ отличительное свойство тѣлъ: ни въ силахъ или времени и нигдѣ въ природѣ болѣе его не находимъ. Отвлекая всѣ прочія свойства, тѣлу даютъ названіе—*Геометрическаго.*

Прикосновеніе соединяетъ два тѣла въ одно. Такъ всѣ тѣла представляемъ частію одного—*пространства.* Тѣло *ограничено*, когда прикосновеніе къ нему другаго—*окружающаго*, дѣлаетъ невозможнымъ прикосновеніе всякаго третьяго. Это второе будетъ *окружающимъ пространствомъ*, если оно съ первымъ составляетъ цѣлое пространство. Пустота, занимаемая тѣломъ внутри пространства, на-

зывается *мѣстомъ*. Два тѣла *одинаковы*, если каждое, безъ всякой перемѣны, *наполняетъ мѣсто*, т. е. дополняетъ пространство. Они *равны* только, если наполненіе мѣста одного требуетъ въ другомъ раздѣленія на части и соединенія сихъ частей въ новомъ порядкѣ.

Воображаемое раздѣленіе тѣла на двѣ части будемъ называть *сѣченіемъ*. Каждая изъ двухъ частей служитъ для назначенія *стороны* сѣченія.

Геометрическія свойства тѣлъ познаемъ въ различномъ дѣленіи ихъ на части. Они служатъ основаніемъ Геометріи и заключаются въ слѣдующемъ.

I. Всякое тѣло можетъ быть раздѣлено на части, которыя не касаются черезъ одну. Такія сѣченія назовемъ *поступательными*; число ихъ не ограничено.

II. Всякое тѣло можетъ быть раздѣлено на части, которыя всѣ касаются взаимно, и которыхъ число съ каждымъ новымъ сѣченіемъ увеличивается двумя. Такія сѣченія назовемъ *обращательными*; число ихъ не ограничено.

III. Всякое тѣло можетъ быть раздѣлено тремя сѣченіями на 8 частей, которыя всѣ касаются взаимно; но далѣе не возможно уже новымъ сѣченіемъ удвоивать число частей. Такія сѣченія назовемъ *тремя главными*.

Обращательныя сѣченія могутъ увеличивать число частей и однимъ только. Это будетъ тогда, когда недостающее число частей пополняется присоединеніемъ новаго тѣла и продолженіемъ сюда сѣченій; такъ что признакъ обращательныхъ сѣченій будетъ собственно не число частей, но взаимное прикосновеніе ихъ. Однакожъ этого одного не достаточно. Надобно, чтобы поступательныя сѣченія къ обоимъ обращательнымъ въ тѣхъ двухъ доляхъ тѣла, которыя находятся на противоположныхъ сторонахъ, всегда отдѣляли части въ одной неприкосновенныя къ другой.

Подобное замѣчаніе относится и къ тремъ главнымъ сѣченіямъ, изъ которыхъ каждыя два бываютъ вмѣстѣ обращательными, и чего уже довольно, чтобъ они были главными.

Поступательныя сѣченія къ тремъ главнымъ назначаютъ въ тѣлѣ его *три протяженія*.

Измѣрять тѣло значитъ изчислять одинаковыя части, на которыя раздѣляется это тѣло и другое, принятое за мѣру, въ трехъ протяженіяхъ поступательными сѣченіями.

Соединеніе двухъ тѣлъ въ одно будетъ вмѣстѣ сѣченіемъ въ этомъ одномъ. Смотря по тому, прикосновеніе принадлежитъ одному только, или нѣсколькимъ обращательнымъ, или тремъ главнымъ сѣченіямъ, оно будетъ *поверхностное, линейное, въ точкѣ*. Воображаемъ тѣло, раздѣленнымъ тремя главными сѣченіями

на восемъ частей, которыя бы отъ другихъ сѣченій происходить не могли. Въ такомъ случаѣ съ первымъ сѣченіемъ получимъ поверхностное прикосновеніе двухъ частей. Вторымъ сѣченіемъ произведемъ двѣ части, которыя, находясь на противоположныхъ сторонахъ обоихъ сѣченій, касаются линейно. Съ третьимъ сѣченіемъ происходятъ двѣ части, которыя находясь на противоположныхъ сторонахъ всѣхъ трехъ сѣченій, касаются на точкѣ.

Тѣло получаетъ названіе *поверхности*, когда оно касается другаго поверхностно и когда принимаютъ въ разсужденіе только взаимное прикосновеніе сихъ двухъ тѣлъ; а потому дозволяютъ отбрасывать всѣ части одного, неприкосновенныя къ другому. Такъ уничтожается одно изъ трехъ протяженій, и такъ отдѣленіемъ ненужныхъ частей поверхности доходимъ до тонкости листа бумаги, или какъ далеко можетъ идти воображеніе.

Два тѣла, которыхъ прикосновеніе здѣсь разсматривается, будутъ двѣ стороны поверхности.

Линіей называется тѣло, которое касается линейно другаго, и отъ котораго дозволяютъ отбрасывать части, неприкосновенныя къ этому другому. Такъ доходимъ до тонкости волоса, черты отъ пера на бумагѣ и пр. Съ обращеніемъ тѣла въ линію уничтожается два протяженія, потому что линію образуютъ въ пространствѣ два сѣченія, къ которымъ поступательныя отдѣляютъ однѣ излишнія части.

Тѣло получаетъ названіе *точки*, когда разсматриваютъ его прикосновеніе къ другому въ точкѣ, а потому дозволяютъ отбрасывать части перваго, неприкосновенныя къ другому. Такъ можно доходить до малости песчинки или точки отъ острея пера на бумагѣ.

Точка образуется тремя главными сѣченіями въ пространствѣ, къ которымъ поступательныя отдѣляютъ однѣ лишнія части: слѣдовательно въ точкѣ нѣтъ ни одного притяженія.

Въ поверхности, линіи и точкѣ обращаютъ вниманіе только на прикосновеніе двухъ тѣлъ. Это значитъ, допускаютъ всѣ измѣненія въ одномъ, которыя бы не лишили части другаго ихъ прикосновенія и не придавали бы новыхъ частей, прикосновенныхъ къ другому. Вотъ почему при измѣреніи поверхностей и линій дозволяется всѣ поступательныя сѣченія, которыми назначаютъ протяженія, замѣнять ихъ обращательными. Отсюда слѣдуетъ, что линія не измѣняетъ величины поверхности, а точка—линіи. Отсюда также видно, что линія должна принадлежать всей системѣ обращательныхъ сѣченій, а потому для образованія линіи необходимы двѣ поверхности, о которыхъ говорятъ, что онѣ *пересѣкаются*

въ линіи, Каждая изъ сихъ поверхностей раздѣляется линіей на двѣ части, которыя будутъ двумя сторонами линіи.

Точка принадлежитъ не только тремъ главнымъ сѣченіямъ, но всѣмъ съ ними обращательнымъ; а потому для образованія точки необходимы двѣ линіи, о которыхъ говорятъ, что онѣ *пересѣкаются въ точкѣ*. Каждая линія раздѣляется точкой на двѣ части, которыя служатъ для назначенія двухъ сторонъ точки.

Точка не имѣетъ величины, будучи безъ протяженія, а потому и не допуская измѣренія.

Когда два тѣла A, B касаются каждое третьяго C въ точкѣ, тогда относительное положеніе двухъ точекъ или такъ называемое *разстояніе* ихъ другъ отъ друга, всякой разъ будетъ опредѣлено, какъ скоро A и B соединены тѣломъ D, неприкосновеннымъ къ C, хотя бы при этомъ въ A, B, D происходили перемѣны отдѣленіемъ, или присоединеніемъ новыхъ частей, неприкосновенныхъ къ C, или тѣ измѣненія въ A и B, которыя дозволяются въ семъ родѣ прикосновенія A, B съ C. Такъ циркуль служитъ для назначенія разстояній.

Съ такими понятіями о пространствѣ и способѣ измѣрять его протяженія, Геометрія можетъ быть ведена со всею строгостію доказательствъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ здѣсь ниже излагается, и гдѣ, если не дается новыхъ опредѣленій, названія разумѣются уже принятыя всѣми.

Сферой называется поверхность, которой всѣ точки отъ одной—*центра*—находятся въ равномъ разстояніи. Это разстояніе будетъ *полупоперечникъ* сферы. *Внутренняя* сторона сферы та, гдѣ ея центръ; другая—*внѣшняя*.

Тѣло, ограниченное сферою, называется *шаромъ*, котораго центръ и полупоперечникъ тоже, что и сферы.

Шары и сферы одинаковы, когда ихъ полупоперечники равны.

Одинаковыя сферы *сливаются*, т. е. покрываютъ другъ друга когда центры ихъ вмѣстѣ, каково бы впрочемъ положеніе ихъ ни было.

Напротивъ у сферъ одноцентрныхъ при разныхъ полупоперечникахъ не можетъ быть ни одной общей точки. Такія сферы представляютъ поступательныя сѣченія въ пространствѣ. Полупоперечникъ той, которая помѣщается внутри другой, почитается менѣе. Это служитъ первымъ сравненіемъ разстояній между собою.

Сфера ограничиваетъ со всѣхъ сторонъ пространство, потому что другая одноцентрная, находясь внѣ первой, присоединяетъ такой слой, которой дѣлаетъ уже невозможнымъ прикосновеніе всякаго тѣла къ шару первой.

Двѣ сферы около разныхъ центровъ, входя одна внутрь другой и выходя вонъ, раздѣляютъ пронстранство на четыре части: одна A принадлежитъ внутренней сторонѣ той и другой сферы, другая B—внѣшней обѣихъ, третья C—внѣшней сторонѣ одной и внутренней другой, а четвертая D—наоборотъ. Новыя сферы около тѣхъ же центровъ будутъ отдѣлять отъ A части неприкосновенныя къ B, или обратно; также отъ C неприкосновенныя части къ D, или обратно. Итакъ пересѣченіе двухъ сферъ даетъ линію, которую называютъ *кругомъ*.

Посему двѣ сферы, перемѣняясь, представляютъ два главныхъ, или, что все равно, два обращательныхъ сѣченія въ пространствѣ. По той же причинѣ три сферы, если пересѣкаются, представляютъ три главныхъ сѣченія.

Плоскостью называется поверность, въ которой лежатъ всѣ круги отъ пересѣченія одинаковыхъ сферъ около двухъ точекъ—*центровъ происхожденія*. Плоскость можетъ слѣдовательно продолжаться неограниченно, съ увеличеніемъ полупоперечниковъ одинаковыхъ сферъ.

Кругъ, отъ пересѣченія одинаковыхъ сферъ, покрываетъ самъ себя, какою стороною и въ какомъ бы положеніи ни накладывался, покуда центры сферъ сохранятъ свое мѣсто, или одинъ ставится на мѣсто другаго.

Внутри всякаго круга на плоскости находится точка—*центръ круга*, которой растоянія—*полупоперечники*—отъ всѣхъ точекъ круга одинаковы. Всѣмъ такимъ кругамъ, производящимъ плоскость, одна только точка можетъ служить центромъ.

Прямая линія называется та, которая между двухъ точекъ сама себя попокрываетъ во всѣхъ положеніяхъ. Такова въ плоскости круга линія, которой точки остаются на мѣстѣ, когда кругъ покрываетъ самъ себя другою стороной.

Разстояніе двухъ точекъ можетъ быть опредѣлено прямой линіей, по свойству которой всякое разстояніе составляется изъ повторенія другаго и частей его.

Прямая линія лежитъ вся въ плоскости, какъ скоро двѣ ея точки на плоскости.

Черезъ три точки, не въ прямой линіи, можно провести одну только плоскость.

Всякая точка внѣ плоскости, можетъ быть принята за центръ происхожденія плоскости, и тогда на противоположной сторонѣ находится другой соотвѣтствующій центръ.

Двѣ плоскости пересѣкаются въ прямой линіи.

Величина прямой линіи опредѣляется сравненіемъ ея съ другой.

Подобнымъ образомъ опредѣляется и величина дуги круга по сравненію ея съ окружностію, которой дуга будетъ часть. Это содержаніе не зависитъ отъ ве-

личины полуперечника, но отъ взаимнаго положенія тѣхъ двухъ полупоперечниковъ, которые проходятъ чрезъ концы дуги. Чтобы оставить на произволъ, какая дуга принимается за единицу, мы будемъ означать 2π окружность. Такъ выраженная дуга называется *линейнымъ угломъ*, или угломъ тѣхъ двухъ линій, которыя, идя чрезъ концы дуги, встрѣчаются въ центрѣ круга.

Также будемъ означать 2π и сферу, опредѣляя съ нею сравнительно ея вырѣзки. Когда вырѣзокъ происходитъ отъ двухъ плоскостей, проведенныхъ чрезъ центръ, тогда величина его будетъ *плоскостной уголъ*; другихъ же вырѣзковъ— *тѣлеснымъ угломъ*.

Плоскостной и тѣлесной углы не зависятъ отъ полупоперечника сферы, но отъ взаимнаго положенія плоскостей, которыя идутъ отъ центра сферы. Плоскостной уголъ также не зависитъ отъ мѣста, гдѣ будетъ центръ сферы на линіи пересѣченія двухъ плоскостей.

Плоскостной уголъ равенъ линейному между перепендикулами въ плоскостяхъ къ линіи пересѣченія сихъ послѣднихъ, и проведенныхъ къ одной точкѣ.

Что бы линія была перпендикуломъ плоскости, довольно чтобъ она была перпендикулярна къ двумъ линіямъ въ плоскости.

Сумма угловъ прямолинейнаго треугольника не можетъ быть $>\pi$, напротивъ сумма угловъ сферическаго треугольника всегда $>\pi$.

Сумма двухъ угловъ сферическаго треугольника бываетъ вмѣстѣ съ суммою противоположныхъ боковъ $>\pi, =\pi, <\pi$.

Если одинъ катетъ въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ $<\pi$, то другой вмѣстѣ съ противоположнымъ угломъ $>\frac{\pi}{2}, =\frac{\pi}{2}, <\frac{\pi}{2}$.

Въ прямолинейномъ треугольникѣ противъ большаго бока лежитъ уголъ болѣе, и обратно.

Сумма двухъ боковъ прямолинейнаго треугольника болѣе третьяго.

Въ сферическомъ треугольникѣ уголъ противъ большаго изъ двухъ боковъ болѣе или менѣе, смотря по тому третій бокъ $<\pi$ или $>\pi$.

Сумма двухъ боковъ сферическаго треугольника болѣе третьяго, если этотъ третій $<\pi$.

Величина тѣлеснаго угла $= \frac{S-(n-2)\pi}{2}$, гдѣ S сумма угловъ сферическаго треугольника, n число его боковъ.

Полагаемъ n число граней или фигуръ, ограничивающихъ правильное тѣло; m число боковъ фигуры; t число граней, смыкающихся въ одинъ тѣлесной уголъ.

Каждой грани тѣла отвѣчаетъ при центрѣ уголъ $\frac{2\pi}{n}$, котораго число плоскостныхъ угловъ m, а величина ихъ $\frac{2\pi}{t}$; послѣ чего, сравнивая два значенія тѣлеснаго угла, находимъ;

$$n = \frac{4t}{2m - (m-2)t}$$

Здѣсь m и t не могутъ быть болѣе 5, иначе n дѣлается отрицательнымъ; слѣдовательно всѣ предположенія могутъ быть таковы:

$m = 3$, $t = 3$, $n = 4$; тѣло называется . . . *тетраедръ*.
$m = 3$, $t = 4$, $n = 8$ . . . . . *октаедръ*.
$m = 3$, $t = 5$, $n = 20$ . . . . . *икосаедръ*.
$m = 4$, $t = 3$, $n = 6$ . . . . . *кубъ*.
$m = 5$, $t = 3$, $n = 12$ . . . . . *додекаедръ*.

Число угловъ или остреевъ на правильномъ тѣлѣ $= \frac{nm}{t}$, слѣдовательно:

въ тетраедрѣ 4
— октаедрѣ 6
— икосаедрѣ 12
— кубѣ 8
— додекаедрѣ . . . . . 20.

Достойно примѣчанія, что выше данное значеніе n можетъ быть найдено, не принимая въ разсужденіе какимъ образомъ тѣлесной уголъ опредѣляется изъ его плоскостныхъ. Дѣйствительно, число линій, въ которыхъ смыкаются грани ясно должно быть $\frac{nm}{2}$, а по извѣстному правилу Ейлера (1) оно будетъ $\frac{nm}{t} + n - 2$; сравнивая то и другое выраженіе, снова получимъ тоже n, что и выше.

Всѣ случаи одинаковости треугольниковъ могутъ быть теперь доказаны безъ помощи теоріи параллельныхъ линій. —

Прямолинейные треугольники бываютъ одинаковы, когда у нихъ равны:

1) одинъ бокъ и два угла;

2) два бока и уголъ между ними;

---

(1) Самое простое доказательство сего предложенія сдѣлалъ *Грунертъ* (смот. Jurnal für die Mathemat. v. Crelle, Tom. 2. p. 367).

3) два бока и уголъ противъ большаго;

4) три бока;

Сферическіе треугольники — когда у нихъ равны:

1) три бока;

2) два бока и уголъ между ними;

3) два бока и уголъ противъ одного, но сумма угловъ въ обоихъ треугольникахъ противъ другаго бока не $= \pi$;

4) одинъ бокъ и при немъ два угла;

5) два угла и бокъ противъ одного, но сумма боковъ протитъ другаго въ обоихъ треугольникахъ не составляютъ π;

6) три угла.

Два прямолинейныхъ треугольника, когда у нихъ три угла равны, могутъ быть не одинаковы, если предположить сумму угловъ въ каждомъ π. Напротивъ они должны быть одинаковы, если въ нихъ сумма угловъ, подобно какъ въ сферическихъ, разнится отъ π.

Мы видѣли, что сумма угловъ прямолинейнаго треугольника не можетъ быть $> \pi$. Остается предполагать эту сумму $= \pi$, или $< \pi$. То и другое можетъ быть принято безъ всякаго противорѣчія въ послѣдствіи, отъ чего и происходитъ двѣ Геометріи: одна, *употребительная* до нынѣ по своей простотѣ, соглашается со всѣми измѣреніями на самомъ дѣлѣ; другая, *воображаемая*, болѣе общая и потому затруднительная въ своихъ вычисленіяхъ, допускаетъ возможность зависимости линій отъ угловъ.

Если въ одномъ прямолинейномъ треугольникѣ почитать суммму угловъ π, то она будетъ такой уже и во всѣхъ. Напротивъ, допуская ее въ одномъ менѣе π, легко доказать, что она уменьшается съ возрастаніемъ боковъ треугольника.

Всякой разъ, слѣдовательно, двѣ линіи встрѣчаться на плоскости не могутъ, когда они съ третьею составляютъ углы, которыхъ сумма π. Онѣ могутъ не пересѣкаться и въ томъ случаѣ, когда эта сумма $< \pi$, если къ тому предположить сумму угловъ въ треугольникѣ $< \pi$.

Итакъ всѣ линіи на плоскости въ отношеніи къ одной могутъ быть раздѣлены на *сходящіяся* и *несходящіяся*. Послѣднія будутъ называться *параллельными*; если онѣ представляютъ границу, или, иначе сказать, переходъ отъ однѣхъ къ другимъ между всѣми выходящими изъ одной точки.

Воображаемъ изъ точки опущенный перпендикулъ a на данную линію и къ этой параллельную изъ той же точки; означаемъ $F(a)$ уголъ между a и парел-

лельной. Легко доказать, что для всякой линіи a уголъ $F(a) = \frac{\pi}{2}$, если сумма угловъ въ треугольникѣ $= \pi$; но въ другомъ предположеніи уголъ $F(a)$ мѣняется съ a, уменьшаясь до нуля съ увеличеніемъ линіи a и оставаясь постоянно $< \frac{\pi}{2}$. Чтобы распространить, въ семъ послѣднемъ предположеніи, означеніе $F(a)$ на всѣ линіи a мы будемъ принимать:

$$F(o) = \frac{\pi}{2}, \quad F(-a) = \pi - F(a).$$

Тогда для всякаго остраго угла A можно воображать положительную, а для всякаго тупаго A — отрицательную линію a, такую, чтобъ $A = F(a)$.

Впрочемъ въ томъ и другомъ предположеніи параллельнымъ линіямъ принадлежатъ слѣдующія свойства.

Когда двѣ линіи параллельны, то пересѣченіе проведенныхъ чрезъ нихъ плоскостей даетъ также линію параллельную обѣимъ.

Двѣ параллельныя третьей, параллельны между собою.

Когда три плоскости пересѣкаются въ параллельныхъ линіяхъ, то сумма плоскостныхъ внутреннихъ угловъ $= \pi$.

Предположеніе суммы угловъ въ треугольникѣ $< \pi$ ведетъ къ тому, что кругъ съ увеличеніемъ полупоперечника приближается не къ прямой линіи, а къ особеннаго роду кривой, которую назовемъ *предѣльной круга*. Сфера въ такомъ случаѣ будетъ приближаться также къ кривой поверхности, которую подобнымъ образомъ назовемъ *предѣльной сферой*. Эта поверхность въ пересѣченіи съ плоскостію даетъ или кругъ или предѣльную круга.

Геометрія на предѣльной сферѣ совершенно та же, въ какомъ видѣ мы ее знаемъ на плоскости. Предѣльная круга замѣняетъ въ послѣдней прямую линію, а углы между плоскостей, въ которыхъ предѣльныя лежатъ, заступаютъ мѣсто угловъ между прямыми линіями.

Предѣльныя круговъ тѣмъ ближе подходятъ къ прямымъ линіямъ, чѣмъ ихъ дуги менѣе, такъ что разность въ содержаніи къ длинѣ дуги можно сдѣлать какъ угодно малой. И потому все, что принадлежитъ однимъ, принадлежитъ и другимъ, если принимать тѣ и другіе чрезвычайно малыми.

Итакъ если въ природѣ существующая Геометрія такова, что двѣ параллельныя линіи должны быть наклонены къ третьей линіи подъ углами, которыхъ сумма $< \pi$, то Геометрія употребительная будетъ Геометрія чрезвычайно

малыхъ линій въ сравненіи съ тѣми, при которыхъ сумма угловъ треугольника можетъ примѣтно разниться отъ π.

Сказано было, что Геометрія на предѣльной сферѣ та-же, что и на плоскости. Въ первой предѣльная круга замѣняетъ прямую; углы между плоскостями, въ которыхъ лежатъ предѣльныя, заступаютъ мѣсто угловъ между прямыми линіами. Однакожъ измѣренію треугольниковъ на предѣльной сферѣ должно предшествовать ученіе о тригонометрическихъ функціяхъ; а что касается до геометрическаго строенія, то съ треугольниками на предѣльной сферѣ должно поступать, какъ бы съ сферическими. Плоскости, въ которыхъ лежатъ предѣльныя и которыя можно назвать *нормальными*, будутъ представлять плоскости большихъ круговъ сферы; а линіи пересѣченія первыхъ между собою, слѣдовательно *нормальныя линіи* или *оси* предѣльной сферы, будутъ то-же, что поперечники обыкновенной сферы.

Послѣ этаго, не дѣлая различія, будемъ говорить о прямолинейныхъ треугольникахъ, разумѣя подъ ними также и треугольники на предѣльной сферѣ, составленные изъ дугъ предѣльнной круга.

Означаемъ въ прямолинейномъ треугольникѣ a, b катеты, A, B противоложные углы, c гипотенузу.

Содержаніе $\frac{a}{c}$ въ такомъ треугольникѣ измѣняется не иначе, какъ съ угломъ A. Эту зависимость $\frac{a}{c}$ отъ A означаютъ

$$\frac{a}{c} = \sin A$$

и $\frac{a}{c}$ называютъ синусъ A. Опредѣленіе sin A распространяютъ на другіе углы, кромѣ острыхъ положительныхъ A, принимая

$$\sin o = o, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\sin (n\pi + A) = (-1)^n \sin A; \quad \sin (\pi - A) = \sin A,$$

гдѣ A уголъ отъ o до $\frac{\pi}{2}$, n положительное цѣлое число. Наконецъ для всякаго положительнаго A

$$\sin (-A) = -\sin A;$$

слѣдовательно и для A отрицательнаго, и для $A = o$.

Такъ можно синусъ всякаго угла привести къ синусу нуля, или $\frac{\pi}{2}$, или

остраго положительнаго. Значенія первыхъ двухъ даны; значенія послѣднихъ представляютъ содержаніе двухъ линій въ прямоугольномъ треугольникѣ.

Послѣ этого легко видѣть, что какой бы уголъ A ни былъ, всегда

$$\sin(\pi + A) = -\sin A.$$

Кромѣ тригонометрической функціи, названной синусъ, употребительны еще другія: косинусъ, тангенсъ и котангенсъ, которыхъ опредѣленіе и означеніе показываютъ слѣдующія уравненія:

$$\cos A = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - A\right),\ \operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A},\ \operatorname{cotang} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Значенія всѣхъ сихъ тригонометрическихъ функцій не измѣняются, когда къ углу прибавляемъ 2π.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ находимъ

$$\sin A^2 + \cos A^2 = 1,$$

что справедливо и для всякаго угла A.

Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ, котораго бока a, b, c, противоположные углы A, B, C

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};\ c = a\cos B + b\cos A.$$

Послѣднее уравненіе съ помощію перваго, и такъ какъ $\sin C = \sin(A + B)$, даетъ

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

для всѣхъ положительныхъ угловъ A, B, которыхъ сумма $< \pi$. Легко видѣть, что здѣсь углы A и B могутъ быть: $A = o$, $B = o$, $A + B = \pi$. Пусть далѣе $A = n\pi + \alpha$, $B = m\pi + \beta$; n, m цѣлыя положительныя числа; α, β положительные углы $> o$, $< \pi$; тогда раздѣляя уравненіе на $(-1)^{n+m}$, находимъ тоже съ перемѣною только A на α, B на β, гдѣ слѣдовательно $\alpha + \beta < \pi$. Но такъ какъ уравненіе не перемѣняется, когда вмѣсто α, β ставимъ $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, то $\alpha + \beta$ можемъ принимать и $> \pi$. Такъ уравненіе доказано для всѣхъ положительныхъ угловъ A, B; отрицательные же можно представлять произведенными вычитаніемъ 2π изъ положительныхъ, но такое вычитаніе не перемѣняетъ видъ уравненія.

Полагая $\frac{\pi}{2} - A$, $\frac{\pi}{2} - B$ вмѣсто A, B, получимъ

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Полагая $A = B$, потомъ $A = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$ и т. д., находимъ значеніе тригонометрическихъ функцій для всѣхъ угловъ $\frac{m}{2^n}.\pi$, гдѣ m, n цѣлыя числа.

Всякой другой уголъ A можетъ быть выраженъ суммою $B + 2\omega$, гдѣ $B = \frac{m}{2^n}.\pi$ съ m и n цѣлыми числами, а ω уголъ какъ угодно малой. Тогда

$$\sin A = \sin B + 2 \sin \omega \cos (B + \omega)$$
$$\cos A = \cos B - 2 \sin \omega \sin (B + \omega).$$

Съ уменьшеніемъ остраго угла въ прямоугольномъ треугольникѣ, уменьшается противоположной катетъ, и такъ, что содержаніе сего катета къ другому можетъ быть сдѣлано какъ угодно малымъ. Сдѣлавши tang ω по желанію малымъ, получимъ sin ω еще менѣе, тогда какъ sin $(B + \omega)$, cos $(B + \omega)$ не превышаетъ единицы. Итакъ разности sin A — sin B, cos A — cos B могутъ быть столько малы, чтобы sin B, cos B принимать за sin A, cos A. Такъ можно разумѣть, что *значенія* тригонометрическихъ функцій для всѣхъ угловъ опредѣлены въ числахъ. —

Теперь займемся измѣреніемъ треугольниковъ и рѣшеніемъ задачи о параллельныхъ.

Принимаемъ только то предположеніе справедливымъ, что перпендикулъ на линіи параллельной встрѣчаетъ другую подъ острымъ угломъ. Мы условлись означать такой острой уголъ **F** (a), когда a перпендикулъ. Другое предположеніе и одно, которое до сихъ поръ допускали Геометры, заключается также въ этомъ общемъ, съ тѣмъ ограниченіемъ, что линіи должно разсматривать безконечно малыми, слѣдовательно въ исчисленіи пренебрегать ихъ произведеніями, вторыми и далѣе степенями въ сравненіи съ первыми.

Итакъ въ прямоугольномъ треугольникѣ острые углы противъ катетовъ a, b должны быть **F** (a'), **F** (b'), гдѣ a', b' прямыя линіи съ знакомъ + передъ числами, выражающими ихъ мѣру.

Продолжаемъ катетъ b и гипотенузу c черезъ точку A (чер. 1) ихъ пересѣченія. AD, продолженіе c, дѣлаемъ $= a'$ и въ концѣ D ставимъ перпендикулъ DE на сторонѣ AG, продолженія b. Ведемъ отъ точки B, вершины угла F (b') параллную BH съ AG на той же сторонѣ. Три линіи BH, AG, DE будутъ параллельны, также съ b, которой точку пересѣченія съ a означимъ C.

Здѣсь $$\angle HBA + \angle ABC = \angle HBC,$$
то есть $$F(c + a') + F(b') = F(a) \qquad (1).$$

Въ томъ же $\triangle ABC$ еслибы a' положили отъ A къ B по линіи c, въ концѣ D поставили перпендикулъ DE и вели къ нему параллельную BH отъ точки B, слѣдовательно вмѣстѣ и параллельную къ b, то нашли бы новое отношеніе между линіями c, a, a', b'. Надобно однакожъ различать три случая:

Если $c > a'$ (чер. 2), то находимъ

$$\angle DBH = \angle DBC + \angle CBH$$

или

$$F\ (c - a') = F\ (b') + F\ (a). \qquad (2)$$

Если $c = a'$ (чер. 3), то

$$\tfrac{\pi}{2} = F\ (b') + F\ (a).$$

Если $c < a'$ (чер. 4), то

$$\pi - F\ (a' - c) = F\ (b') + F\ (a).$$

Но во второмъ случаѣ $\tfrac{\pi}{2} = F(o) = F(c - a')$, а въ послѣднемъ $\pi - F(a' - c) = F\ (c - a')$; слѣдовательно во всѣхъ трехъ случаяхъ уравненіе (2) справедливо.

Соединеніе уравненій (1), (2) даетъ

$$2\ F\ (a) = F\ (c - a') + F\ (c + a'). \qquad (3)$$

$$2\ F\ (b') = F\ (c - a') - F\ (c + a'). \qquad (4)$$

Продолжаемъ еще b и c чрезъ точку A (чер. 5), a чрезъ точку C; дѣлаемъ $AI = a'$, $CN = b' - a$; ставимъ перпендикулы IK, NO къ CI и CN, то IK, AL, ON будутъ параллельны. Ведемъ еще имъ параллельную CM; тогда

$$\angle MCN + \angle MCJ = \tfrac{\pi}{2},$$

то есть

$$F\ (b' - a) + F\ (a' + b) = \tfrac{\pi}{2}. \qquad (5).$$

Означаемъ теперь α линію, опредѣленную уравненіемъ

$$F\ (\alpha) + F\ (a) = \tfrac{\pi}{2}.$$

Означаемъ β, γ, α', β' подобныя линіи въ отношеніи къ b, c, a', b'. Уравненіе (4) можетъ быть иначе представлено

$$2\ F\ (\beta') = F\ (a' - c) + F\ (a' + c)$$

и предполагаетъ существованіе прямоугольнаго треугольника, котораго a' гипотенуза, β' катетъ, $F\ (c)$ противоположной ему уголъ (чер. 6).

Послѣ этого должно заключать, что въ уравненіяхъ (3), (4), (5), какъ и для всякой предполагаемой зависимости угловъ и боковъ прямоугольнаго треугольника, можно не только перемѣнять a на b съ перемѣнною a' на b'; но и

a на β'	α на b'
c .... a'	γ .... α'
a' c	α' .... γ
b' .... α	β' ... a,

оставляя въ тоже время b и β безъ перемѣны. Такъ уравненія (3) и (4) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} 2\ F\ (a) &= F\ (c - a') + F\ (c + a') \\ 2\ F\ (b) &= F\ (c - b') + F\ (c + b') \\ 2\ F\ (b) &= F\ (a' - \alpha) + F\ (a' + \alpha) \\ 2\ F\ (a) &= F\ (b' - \beta) + F\ (b' + \beta) \end{aligned}\right\} \qquad (6).$$

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathbf{F}(b') &= \mathbf{F}(c-a') - \mathbf{F}(c+a') \\ 2\,\mathbf{F}(a') &= \mathbf{F}(c-b') - \mathbf{F}(c+b') \\ 2\,\mathbf{F}(c) &= \mathbf{F}(a'-\alpha) - \mathbf{F}(a'+\alpha) \\ 2\,\mathbf{F}(c) &= \mathbf{F}(b'-\beta) - \mathbf{F}(b'+\beta) \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathbf{F}(a') &= \mathbf{F}(\alpha-\beta) - \mathbf{F}(\alpha+\beta) \\ 2\,\mathbf{F}(b') &= \mathbf{F}(\beta-\alpha) - \mathbf{F}(\alpha+\beta) \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Уравненіе (5):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}(b'-a) + \mathbf{F}(a'+b) &= \tfrac{\pi}{2} \\ \mathbf{F}(c-a) + \mathbf{F}(\beta+\alpha') &= \tfrac{\pi}{2} \\ \mathbf{F}(a'-\beta') + \mathbf{F}(\beta+\gamma) &= \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}(b'+a) + \mathbf{F}(a'-b) &= \tfrac{\pi}{2} \\ \mathbf{F}(c+a) + \mathbf{F}(\beta-\alpha') &= \tfrac{\pi}{2} \\ \mathbf{F}(\alpha'+\beta') + \mathbf{F}(\beta-\gamma) &= \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad (10).$$

Всѣ сіи уравненія, представляя въ различныхъ видахъ зависимость боковъ и угловъ прямоугольнаго треугольника, служатъ вмѣстѣ для опредѣленія зависимости всякой линіи a отъ угла $\mathbf{F}(a)$; но къ рѣшенію этого послѣдняго вопроса можно придти слѣдующимъ образомъ.

Къ плоскости ABC тогоже прямоугольнаго треугольника ставимъ въ точкѣ B пернендикулъ BB′ (чер. 7); къ нему отъ точекъ A и C ведемъ параллельныя AA′, CC′. Сумма внутреннихъ угловъ плоскостей, въ которыхъ лежатъ три параллельныя, даетъ $\frac{\pi}{2} - \mathbf{F}(b')$ уголъ при лезвеѣ AA′. Воображаемъ около A, какъ центра, сферу; пересѣченіе ея линіями AA′, AB, AC произведетъ сферической, прямоугольной треугольникъ A′BC (чер. 8), гдѣ $A'C = \mathbf{F}(b)$ гипотенуза, $A'B = \mathbf{F}(c)$, $BC = \mathbf{F}(a')$ катеты, $\mathbf{F}(a)$, $\frac{\pi}{2} - \mathbf{F}(b')$ противоположные углы. Можно здѣсь мимоходомъ замѣтить, что существованіе такого треугольника предполагаетъ прямоугольной прямолинейной (черт. 6), гдѣ гипотонуза a', катеты β, b, имъ противоположные углы $\mathbf{F}(c)$, $\frac{\pi}{2} - \mathbf{F}(a)$; слѣдовательно точно тотъ же треугольникъ, котораго составленіе доказали выше. Такъ повѣрка заключеній необходима, покуда остается неизвѣстнымъ, которое изъ двухъ предположеній истинное.

Воображаемъ снова сфирической треугольникъ A′BC и центръ его сферы A (чер. 9). Изъ A опускаемъ перпендикулъ A′D къ AB. Ведемъ къ AC параллельныя DM чрезъ точку D въ плоскости ABC; A′L чрезъ точку A′ въ плоскости A′AC. Пусть LMN треугольникъ на предѣльной сферѣ, которой A′L, BM CA оси.

Можно доказать, что содержаніе боковъ въ $\triangle A'BC$ и $\triangle LMN$ тѣмъ менѣе разнится, чѣмъ болѣе полупоперечникъ AC или, что все равно, линія a' въ $BC = F(a')$, и что эта разность можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой. Границу, къ которой приближается содержаніе двухъ линій, мы означимъ, ставя впереди Lim. такъ пишемъ:

$$\text{Lim}\ \frac{A'C}{BC} = \frac{LN}{NM};\ \text{Lim}\ \frac{A'B}{BC} = \frac{LM}{NM};$$

то есть

$$\text{Lim}\ \frac{F(b)}{F(a')} = \frac{1}{\cos F(a)};\ \text{Lim}\ \frac{F(c)}{F(a')} = \text{tang}\ F\ (a).$$

Отсюда

$$\text{Lim}\ \frac{F(b)+F(c)}{F(a')} = \frac{1}{\text{Cos}\ F(a)} + \text{tang}\ F\ (a)$$

$$\text{Lim}\ \frac{F(b)-F(c)}{F(a')} = \frac{1}{\text{Cos}\ F(a)} - \text{tang}\ F\ (a).$$

Изъ уравненій (6) и (7):

$$F(b) + F(c) = F(a' - \alpha)$$
$$F(b) - F(c) = F(a' + \alpha);$$

слѣдовательно

$$\text{Lim}\ \frac{F(a'+\alpha)}{F(a')} = \text{Cot}\ \tfrac{1}{2}\ F(a')$$

$$\text{Lim}\ \frac{F(a'-\alpha)}{F(a')} = \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ F(\alpha)$$

Первое уравненіе показываетъ, что послѣднее справедливо и для всѣхъ отрицательныхъ линій α. Основываясь на этомъ послѣднемъ, заключаемъ, что для всякихъ двухъ линій α, β

$$\text{Lim}\ \frac{F(a'+\alpha)}{F(a'+\beta)}.\ \text{Lim}\ \frac{F(a'+\beta)}{F(a')} = \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ F\ (\alpha)$$

то есть

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ F(\alpha-\beta).\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ F(\beta) = \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ F(\alpha) \qquad (11).$$

Это требуетъ, чтобъ

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ F(\alpha) = e^{-\alpha} \qquad (12).$$

Гдѣ *e* неопредѣленное постоянное число , но подъ которымъ можемъ разумѣть основаніе Непперовыхъ логарифмовъ, по причинѣ неизвѣстности, какая линія берется единицей при измѣреніи прямыхъ.

Помощію уравненія (11), найденныя выше (6), (7), (8) даютъ

$$\left.\begin{aligned}
\sin\ \mathrm{F}(c) &= \sin\ \mathrm{F}(a)\ \sin\ \mathrm{F}(b)\\
\mathrm{tang}\,\mathrm{F}(c) &= \mathrm{tang}\,\mathrm{F}(a)\ \sin\ \mathrm{F}(a')\\
\cos\ \mathrm{F}(b) &= \cos\ \mathrm{F}(c)\ \cos\ \mathrm{F}(a')\\
\sin\ \mathrm{F}(c) &= \mathrm{tang}\,\mathrm{F}(a)\ \mathrm{tang}\,\mathrm{F}(b')\\
\mathrm{tang}\,\mathrm{F}(a') &= \cos\ \mathrm{F}(a)\ \mathrm{tang}\ \mathrm{F}(b)\\
\sin\ \mathrm{F}(b') &= \sin\ \mathrm{F}(a)\ \sin\ \mathrm{F}(a')
\end{aligned}\right\} \quad (13).$$

и другія, которыя непосредственно отсюда слѣдуютъ.

Итакъ въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго катеты a, b, противоположные углы A, B, гипотенуза c, будетъ:

въ прямолинейномъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\ \mathrm{F}(c) &= \sin\mathrm{F}(a)\ \sin\mathrm{F}(b)\\
\mathrm{tang}\ \mathrm{F}(c) &= \mathrm{tang}\,\mathrm{F}(a)\ \sin\mathrm{A}\\
\cos\ \mathrm{F}(b) &= \cos\ \mathrm{F}(c)\ \cos\mathrm{A}\\
\sin\ \mathrm{F}(c) &= \mathrm{tang}\ \mathrm{A}\ \mathrm{tang}\ \mathrm{B}\\
\mathrm{tang}\,\mathrm{A} &= \cos\mathrm{F}(a)\ \mathrm{tang}\,\mathrm{F}(b)\\
\sin\ \mathrm{B} &= \sin\mathrm{F}(a)\ \cos\ \mathrm{A}
\end{aligned}\right\} \quad (14);$$

въ сферическомъ:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\ c &= \cos a\ \cos b\\
\sin\ a &= \sin\mathrm{A}\ \sin c\\
\mathrm{tang}\,a &= \mathrm{tang}\,c\ \cos\mathrm{B}\\
\cos\ c &= \cot\ \mathrm{A}\ \cot\mathrm{B}\\
\mathrm{tang}\ a &= \mathrm{tang}\,\mathrm{A}\ \mathrm{tang}\,b\\
\cos\ \mathrm{A} &= \cos a\ \sin\mathrm{B}
\end{aligned}\right\} \quad (15),$$

извѣстныя уравненія сферической тригонометріи, и помощію которыхъ легко найти для всякаго сферическаго треугольника, гдѣ бока a, b, c, противоположные углы A, B, C

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\ \mathrm{A}\sin\ b\ \sin\ c + \cos\ b\ \cos\ c = \cos\ a\\
&\sin\ a\sin\ \mathrm{B} = \sin\ b\ \sin\ \mathrm{A}\\
&\cot\ \mathrm{A}\sin\ \mathrm{C} + \cos\mathrm{C}\cos\ b - \cot\ a\ \sin\ b = o\\
&\cos\ a\ \sin\mathrm{B}\ \sin\ \mathrm{C} - \cos\ \mathrm{B}\cos\ \mathrm{C} = \cos\mathrm{A}
\end{aligned}\right\} \quad (16).$$

Измѣреніе сферическихъ треугольниковъ, слѣдовательно, не зависитъ отъ предположенія для параллельныхъ. Не таково измѣреніе прямолинейныхъ. Подобно, какъ уравненія (15) даютъ (16), такъ съ помощію уравненій (14) находимъ

для всякаго прямолинейнаго треугольника, котораго a, b, c бока, A, B, C противоположные углы:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang F}(a)\ \sin A = \text{tang F}(b)\ \sin B \\ \cos A\ \cos \text{F}(b) \cos \text{F}(c) + \dfrac{\sin \text{F}(b)\ \sin \text{F}(c)}{\sin \text{F}(a)} - 1 = o \\ \cot A \sin B \sin \text{F}(c) + \cos B - \dfrac{\cos \text{F}(c)}{\cos \text{F}(a)} = o \\ \cos C + \cos A \cos B - \dfrac{\sin A \sin B}{\sin \text{F}(c)} = o. \end{array}\right\} \quad (17)\ (^1).$$

Когда a, b, c предполагаются весьма малы, такъ что дозволяется пренебрѣгать степенями и произведеніями, которыхъ размѣръ выше, тогда можно ставить

$$\sin \text{F}(a) = 1 - \tfrac{1}{2} a^2;\ \cos \text{F}(a) = a(1 - a^2)$$

чрезъ что уравненія (17) сдѣлаются

$$\begin{array}{l} b \sin A = a \sin B \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A \\ \sin (A + B) = \dfrac{c}{a} \sin A \\ \cos C + \cos (A + B) = o \end{array}$$

изъ которыхъ первыя два извѣстныя уравненія прямолинейной тригонометріи; а два послѣднія показываютъ, что $A + B + C = \pi$.

Изложенная нами теорія параллельныхъ предполагаетъ линіи съ углами въ такой зависимости, которая, какъ послѣ увидимъ, находится или нѣтъ въ природѣ, доказать никто не въ состояніи. По крайней мѣрѣ наблюденія астрономическія убѣждаютъ въ томъ, что всѣ линіи, которыя подлежатъ нашему измѣренію, даже разстоянія между небесными тѣлами, столько малы въ сравненіи съ линіею, принятою въ теоріи за единицу, что употребительныя до сихъ поръ уравненія прямолинейной Тригонометріи безъ чувствительной погрѣшности должны быть справедливы.

Называемъ a поперечникъ земнаго пути вокругъ солнца; $2p$ самой большой годовой паралаксъ неподвижной звѣзды: это значитъ $\dfrac{\pi}{2} - 2p$ будетъ уголъ между a и разстояніемъ одного конца a до звѣзды, тогда какъ разстояніе звѣзды до другого конца перпендикулярно къ a. Необходимо

$$\text{F}(a) > \frac{\pi}{2} - 2p,$$

---

(1) Уравненія (17) и все, что за ними слѣдуетъ, прибавлено уже сочинителемъ послѣ къ тому разсужденію, которое было имъ предоставлено 1826 года въ отдѣленіе физико-математическихъ наукъ.

отсюда

$$e^{\alpha} < \frac{1 + \operatorname{tang} p}{1 - \operatorname{tang} p},$$

$$\tfrac{1}{2}\, a < \operatorname{tang} p + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} p^3 + \tfrac{1}{5} \operatorname{tang} p^5 + \cdots$$

тѣмъ болѣе

$$a < \operatorname{tang} 2p$$

Разстояніе звѣзды сдѣлается къ a перпендикулярно, если разность въ долготѣ звѣзды съ солнцемъ составитъ прямой уголъ. Это будетъ именно то условіе, котораго должно держаться для выгоды самыхъ наблюденій надъ паралаксомъ.

Кажется всего болѣе можно положиться на способъ придуманной Г-мъ Дасса-Мондардье (Connaiss. des tems de 1831). Онъ находитъ годовой паралаксъ звѣзды Кейды (29 Ериdина) $2''$, — Ригеля $1'',43$, Сиріуса $1'',24$. Послѣдній даетъ:

$$a < 0{,}00000602$$

Самой большой

$$a < 0{,}000009696.$$

Сколько ни мало такимъ образомъ должно полагать a, слѣдовательно и всѣ вообще линіи какія могутъ подлежать нашему измѣренію, въ уравненіяхъ (17) тѣмъ болѣе можемъ довольствоваться нисшими степенями боковъ треугольника, что здѣсь въ функціи входятъ или однѣ четныя или однѣ нечетныя степени.

Сумма угловъ, даже и въ такихъ треугольникахъ, которые теперь разсматриваемъ, чрезвычайно мало разнится отъ двухъ прямыхъ. Если означаемъ 2ω эту разность, то изъ послѣдняго уравненія въ (17), полагая $B = \frac{\pi}{2}$; $C = \frac{\pi}{2} - 2p$, $A = 2p - 2\omega$, легко находимъ

$$\cos F\left(\tfrac{a}{2}\right) = \sqrt{\operatorname{tang} \omega . \operatorname{tang} (2p - \omega)}$$

отсюда

$$\sin (p - \omega)^2 = \sin p^2 - \cos 2p . \cot F\left(\tfrac{a}{2}\right)^2$$

Если p' другой паралаксъ менѣе p, то

$$\cot F\left(\tfrac{a}{2}\right)^2 < \frac{\sin p^2}{\cos 2p'}$$

Итакъ съ тою точностію вычисленія., какую здѣсь надобно соблюсти, можно полагать

$$\omega < 3p \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad \text{гдѣ } \sin x = \frac{\sin p'}{\sin p}\sqrt{\frac{\cos p}{\cos p'}}$$

Напримѣръ для Сиріуса $p = o''$, 62; для Кейды $p = 1''$, слѣдовательно въ треугольникѣ, которой простирается до первой изъ сихъ звѣздъ

$$2\omega < o'', 43.$$

Еслибъ разстояніе до звѣзды было тоже a, тогда $\text{tang}\,\omega = \cos \text{F}(\frac{a}{2})^2 < \text{tang}\,\text{p}^2$, гдѣ $2p$ самой малой извѣстной паралаксъ для a. Напримѣръ полагая $p = 0''$, 62, находимъ, что сумма угловъ въ такомъ треугольникѣ разнится отъ двухъ прямыхъ менѣе, нежели на

$$0'', 000372.$$

Вообще въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго a, b катеты, $\pi - 2\omega$ сумма угловъ

$$\text{tang}\,\omega = \left(\frac{e^a - 1}{e^a + 1}\right) \cdot \left(\frac{e^b - 1}{e^b + 1}\right)$$

Чѣмъ менѣе слѣдовательно треугольникъ, тѣмъ сумма угловъ его менѣе разнится отъ двухъ прямыхъ. Послѣ этого можно воображать, сколько эта разность, на которой основана наша теорія параллельныхъ, оправдываетъ точность всѣхъ вычисленій обыкновенной Геометріи, и дозволяетъ принятыя начала этой послѣдней разсматривать, какъ бы строго доказанными.

Между тѣмъ нельзя не увлекаться мнѣніемъ Лапласа, что видимыя нами звѣзды и млечной путь принадлежатъ къ одному только собранію небесныхъ свѣтилъ, подобному тѣмъ, которыя усматриваемъ, какъ слабо мерцающія пятна, въ созвѣздіяхъ Оріона, Андромеды, Козерога и проч. Итакъ, не говоря о томъ, что въ воображеніи пространство можетъ быть продолжаемо неограниченно, сама природа указываетъ намъ такія разстоянія, въ сравненіи съ которыми изчезаютъ за малостію даже и разстоянія нашей земли до неподвижныхъ звѣздъ.

Послѣ этого нельзя утверждать болѣе, что предположеніе, будто мѣра линій зависитъ отъ угловъ — предположеніе, которое многіе Геометры хотѣли принимать за строгую истину, не требующую доказательства — можетъ быть оказалось бы примѣтно ложнымъ еще прежде, нежели перейдемъ за предѣлы видимаго нами міра.

Съ другой стороны, мы не въ состояніи постигать, какая бы связь могла существовать въ природѣ вещей и соединять въ ней величины столь разнородныя, каковы линіи и углы. Итакъ, очень вѣроятно, что Евклидовы положенія одни только истинныя, хотя и останутся навсегда недоказанными.

Какъ бы то ни было, новая Геометрія, основаніе которой уже здѣсь положено, если и не существуетъ въ природѣ, тѣмъ не менѣе можетъ существовать въ нашемъ воображеніи, и, оставаясь безъ употребленія для измѣреній на самомъ дѣлѣ, открываетъ новое, обширное поле для взаимныхъ примѣненій Геометріи и Аналитики.

Теперь разсмотримъ, какимъ образомъ въ этой воображаемой Геометріи опредѣляется величина кривыхъ линій, площадей, кривыхъ поверхностей и объемовъ тѣлъ.

Вопервыхъ займемся изслѣдованіемъ уравненій употребительнѣйшихъ линій.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ котораго x, y катеты, A уголъ противъ x (см. урав. пятое изъ (14).

$$\text{tang A} = \text{tang F}(x).\ \cos \text{F}(y)\ldots. \qquad (18)$$

Это уравненіе прямой, которая пересѣкаетъ ось x-овъ подъ угломъ A.

Ставимъ сюда r вмѣсто x; потомъ $r + x$ вмѣсто x; b вмѣсто y. Сравнивая значенія A, получимъ

$$\text{tang F}(r) \cos\ \text{F}(y) = \text{tang F}(r + x).\ \cos \text{F}(b)$$

или

$$\cos \text{F}(y) = \cos \text{F}(b).\ \frac{\sin \text{F}(x) \cos \text{F}(r)}{\cos \text{F}(x) + \cos \text{F}(r)}$$

Полагая $r = \infty$, находимъ

$$\cos \text{F}(y) = e^{-x}.\ \cos \text{F}(b)\ldots. \qquad (19).$$

Уравненіе прямой, параллельной съ осью x въ ту сторону, куда считаются x, и проведенной чрезъ вершину перпендикула b къ оси x въ началѣ сихъ координатъ.

Пусть теперь прямая *(черт. 10)* наклонена къ оси y, на разстояніи l отъ оси x, подъ угломъ $\text{A} < \frac{\pi}{2} > \text{F}(l)$. Такая линія не встрѣчается съ осью x, сколько бы ни была продолжаема.

Ищемъ линію a, такъ, что

$$\text{tang F}(l) = \text{tang A}.\ \cos \text{F}(a), \qquad (20)$$

слѣдовательно

$$a = \tfrac{1}{2} \log.\ \frac{\sin\ [\text{A} + \text{F}(l)]}{\sin\ [\text{A} - \text{F}(l)]}$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго катеты a, l, называемъ c гипотенузу, A′ — уголъ противъ a; L — противъ l. Примѣняя сюда уравненія (14), находимъ

$$\text{tang L} = \cos \text{F}(l)\ \text{tang F}(a)$$
$$\text{tang A}' = \cos \text{F}(a)\ \text{tang F}(l)$$
$$\sin \text{F}(c) = \sin \text{F}(a) \sin \text{F}(l)\ .$$

Полагаемъ теперь a на ось x отъ l въ сторону, гдѣ берется уголъ A. Опускаемъ изъ другого конца перпендикулъ b къ данной линіи, который упадетъ на какомъ нибудь разстояніи t отъ вершины l. Составится прямоугольной

треугольникъ, котораго гипотенуза c, катеты b, t, уголъ противъ перваго $A - A'$, противъ послѣдняго назовемъ L'. Получимъ

$$\operatorname{tang} L' = \sin F(c).\ \cot (A - A')$$

$$\cos F(b) = \cos L' \cos F(c)$$

$$\operatorname{tang} F(t) = \frac{\operatorname{tang} (A' - A')}{\cos F(b)} = \frac{\sin F(c).\ \cot L'}{\cos F(b)}$$

Въ первое уравненіе, вставляя значенія tang A и tang A', выраженныя выше помощію a и l, открываемъ, что $L' = \frac{\pi}{2} - L$, слѣдовательно b перпендикулярно къ a.

Итакъ двѣ прямыя линіи въ плоскости должны быть или сходящимися, или параллельными, или перпендикулами къ одной.

Наконецъ два послѣднія уравненія даютъ

$$\cos F(b) = \sin F(a).\ \cos F(l) \tag{21}$$

$$\operatorname{tang} F(t) = \sin F(l).\ \operatorname{tang} F(a) \tag{22}$$

Примѣчательно, что уравненія (20), (21), (22), если къ тому положимъ $A = F(a')$, принадлежатъ прямоугольному треугольнику (чер. 11), гдѣ a, a' катеты, $F(l)$, $\frac{\pi}{2} - F(b)$ противоположные имъ углы, t гипотенуза.

Уравненіе прямой линіи теперь можетъ быть очень просто представлено, если считаемъ координаты x отъ b; именно:

$$\cos F(b) = \sin(x).\ \cos F(y)$$

или

$$\sin F(a) \cos F(l) \sin F(x).\ \cos F(y) \tag{23}$$

гдѣ линія a опредѣляется уравненіемъ (20), откуда, вставляя значеніе a и считая координаты x отъ l, находимъ

$$\cos F(y) = \frac{\cos F(l)}{\sin F(x)} - \sin F(l) \cot A.\ \cot F(x) \tag{24}$$

что можно представить еще такъ:

$$2 \sin A \cos F(y) = e^{x}.\ \sin [A - F(l)] + e^{-x} \sin [A + F(l)]. \tag{25}$$

Уравненіе общее, какъ легко повѣрить, всѣмъ прямымъ линіямъ и гдѣ A можетъ быть всякой уголъ; но x на сторонѣ угла A принимается положительнымъ, а на противоположной отрицательнымъ.

Въ кругѣ, если считаемъ координаты x отъ центра, r называемъ полупоперечникъ

$$\sin F(r) = \sin F(x) \sin F(y). \tag{26}$$

Если же x считаемъ отъ окружности

$$\sin F(r) = \sin F(y).\ \mathrm{Sin}\, F(r - x),$$

которое уравненіе можно представить иначе:

$$\sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y) = 1 - \cos \mathrm{F}(r) . \cos \mathrm{F}(x).$$

Полагаемъ здѣсь $r = \infty$ получимъ уравненіе предѣльной круга:

$$\sin \mathrm{F}(y) = e^{-x} \qquad (27).$$

Иначе можно притти къ этому уравненію разсматривая прямоугольной треугольникъ, котораго x, y катеты, z гипотенуза. $\mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right) - \mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(y)$ углы противъ x, y. Здѣсь находимъ

$$\cot \mathrm{F}(y) = 2 \cot \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right).$$

$$\tan \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right) = \cos \mathrm{F}(y) \tan \mathrm{F}(x)$$

откуда стоитъ только изключить z.

Кривая линія не можетъ быть составлена изъ прямыхъ, а потому измѣреніе кривой помощію прямой даетъ только условную величину, за которую обыкновенно принимаютъ границу приближенія, когда соединяютъ прямыми точки на кривой, ближе и ближе другъ отъ друга взятыя. Легко видѣть, какая цѣль предположена съ такимъ исчисленіемъ. Кривыя линіи измѣряются на самомъ дѣлѣ помощію цѣпи, которая, почитаютъ, тѣмъ вѣрнѣе опредѣляетъ величину кривой, чѣмъ звѣнья менѣе; такъ что гибкая нить даетъ уже эту величину безъ примѣтной погрѣшности.

Надобно, слѣдовательно, доказывать только, что граница приближенія существуетъ; потомъ показать, какимъ образомъ ее отыскивать.

Пусть AB (черт. 12) друга круга; AC, BD линіи, отъ концевъ дуги направленныя къ центру; BE, FA перпендикулы къ AC: одинъ опущенъ изъ конца B дуги, другой возставленъ изъ конца A и ограниченъ въ F продолженіемъ BD.

Пусть BG, изъ точки B перпендикулярная къ BD, встрѣчаетъ въ G линію AF. Здѣсь $AB > BE$; $AF < AG + BG$. Отсюда легко видѣть какъ для круга, такъ и для всякой кривой, что раздѣленіе дугъ увеличиваетъ сумму хордъ и уменьшаетъ сумму касательныхъ. Между той и другой суммой должна слѣдовательно, находиться граница, которая и будетъ величина кривой линіи.

Подъ прямыми линіями *въ чертежѣ 12* ничто не мѣшаетъ представлять предѣльныя круга, проведенныя на предѣльной сферѣ. Пусть дуга AB принадлежитъ кругу, котораго полупопчерениkъ s, измѣряемый дугою предѣльной круга отъ окружности до центра взятого на предѣльной сферѣ. Называемъ α уголъ при центрѣ. Будетъ

$$BE = s. \sin \alpha$$
$$AF = s. \tan \alpha$$

Если $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$ гдѣ n цѣлое число, то 2^n. BE и 2^nAF съ увеличеніемъ n приближается къ границѣ, которая представляетъ половину окружности круга; а $2^n \sin \alpha$ и $2^n \text{tang}\, \alpha$ къ числу

$$\pi = 3{,}141592...$$

слѣдовательно окружность круга

$$2\pi . s,$$

а дуга для неопредѣленнаго угла α

$$\alpha s.$$

Если AB дуга круга, а прочія линіи всѣ прямыя, то называя α уголъ при центрѣ для дуги AB круга, котораго полупоперечникъ r; хорду AB означаемъ c; t касательную AF. Будетъ

$$\cos \text{F}(c) = \sin \alpha . \cot \text{F}(r)$$
$$\cos \text{F}(t) = \text{tang}\, \alpha . \cot \text{F}(r)$$

Если $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, гдѣ n какое нибудь цѣлое число, то умножая уравненія на n, получимъ границу

$$2\pi \cot \text{F}(r)$$

къ которой приближаются $n \cos \text{F}(c)$ и $n \cos \text{F}(t)$ съ увеличеніемъ числа n, а вмѣстѣ съ тѣмъ уменьшеніе c даетъ границы $n \cos \text{F}(c) = nc$, $n \cos \text{F}(t) = nt$, которыя обѣ должны представлять окружность круга. Для неопредѣленнаго угла α величина дуги будетъ слѣдовательно

$$\alpha \cot \text{F}(r) = \tfrac{1}{2} \alpha \, (e^{-r} - e^{r}) \qquad (28).$$

Если r весьма мало, то находимъ дугу αr вѣрною до r^3.

Воображаемъ теперь кругъ вмѣстѣ, и на плоскости, гдѣ полупоперечникъ его y, и на предѣльной сферѣ, гдѣ полупоперечникъ его, измѣряемый предѣльною круга, s. Окружность круга должна выражаться $2\pi s$ и $2\pi \cot \text{F}(y)$, слѣдовательно

$$s = \cot \text{F}(y) \qquad (29).$$

дуга предѣльной круга, выраженная помощію перпендикула, опущеннаго отъ конца дуги на ось, проведенную чрезъ другой.

Тоже можно найти, выражая α въ значеніи (28), помощію полупоперечника r и перпендикула, опущеннаго отъ одного конца дуги круга на поперечникъ чрезъ другой, и потомъ, разсматривая только r перемѣняющимся, искать содержаніе

$$\frac{d\alpha}{d \, \text{tang}\, \text{F}(r)}$$

Наконецъ, въ треугольникѣ, котораго всѣ острея лежатъ на предѣльной круга такъ, что бока a, b представляютъ хорды двухъ дугъ, бокъ c хорду составной изъ нихъ, противоположные углы должны быть

$$\mathrm{B} = \mathbf{F}\left(\frac{b}{2}\right) - \mathbf{F}\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$\mathrm{A} = \mathbf{F}\left(\frac{a}{2}\right) - \mathbf{F}\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$\mathrm{C} = \mathbf{F}\left(\frac{a}{2}\right) + \mathbf{F}\left(\frac{b}{2}\right).$$

Уравненія (17) въ такомъ случаѣ даютъ

$$\cot \mathbf{F}\left(\frac{c}{2}\right) = \cot \frac{a}{2} + \cot \frac{b}{2}$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\cot \mathbf{F}\left(\frac{c}{2}\right)$ пропорціоналенъ дугѣ предѣльной круга, для которой c хорда; а какъ хорда, уменьшаясь, сливается съ ея дугою, то $2 \cot \mathbf{F}(c)$ должно изображать самую дугу, которой c хорда. Такъ еще доказывается справедливость уравненія (29).

Соединяя уравненія (19), (27) и (29), находимъ

$$s = \cos \mathbf{F}(t), \qquad (30).$$

гдѣ t касательная къ дугѣ предѣльной круга s въ одномъ концѣ и усѣченная осью чрезъ другой.

Чтобы найти, какимъ образомъ выражается безконечно малая хорда, или элементъ дуги кривой, помощію перпендикулярныхъ координатъ x, y, разсматриваемъ прямую трапецію (чер. 13), гдѣ $y' > y$ перпендикулярны къ a. Отдѣляемъ на y' линію равную y, соединяемъ вершины y линіею $2q$, вершины y, y' линіею t и называемъ T уголъ между $2q$ и $y' - y$, ω — между t и y; ω' — между t и y'. Линія чрезъ середины a и $2q$ должна быть перпендикулярна къ a и $2q$, слѣдовательно [смот. уравн. (20), (22) и (17)]

$$\operatorname{tang} \mathbf{F}(y) = -\operatorname{tang} \mathrm{T}. \cos \mathbf{F}\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{tang} \mathbf{F}(q) = \sin \mathbf{F}(y). \operatorname{tang} \mathbf{F}\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{Sin} \mathbf{F}(t) = \frac{\operatorname{Sin} \mathbf{F}(2q) \sin \mathbf{F}(y' - y)}{1 - \cos \mathrm{T}. \cos \mathbf{F}(2q) \cos \mathbf{F}(y' - y)}$$

$$\text{Cot } \omega' \text{ tang T. sin F}(y' - y) + 1 = \frac{\cos \text{F}(y' - y)}{\cos \text{ T. } \cos \text{F}(2q)},$$

отсюда

$$\cos \text{T} \cos \text{F}(2q) = -\frac{2 \cos \text{F}(y)}{2 + \sin \text{F}(y) \text{ tang } \text{F}(\frac{a}{2})^2},$$

что вставляя, находимъ

$$\sin \text{F}(t) = \frac{\sin \text{F}(a) \sin \text{F}(y) \sin \text{F}(y')}{1 - \sin \text{F}(a) \cos \text{F}(y) \cos \text{F}(y')} \qquad (31).$$

$$\cot \omega' \cos \text{F}(a) \sin \text{F}(y') + \sin \text{F}(a) \cos \text{F}(y) = \cos \text{F}(y').$$

Подобнымъ образомъ

$$-\cot \omega \cos \text{F}(a) \sin \text{F}(y) + \sin \text{F}(a) \cos \text{F}(y') = \cos \text{F}(y)$$

Два послѣднія уравненія тѣже, что и (24), но выведенныя здѣсь безъ всякаго предположенія, сходятся или нѣтъ линіи t и a.

Далѣе находимъ еще

$$\text{tang } (\omega + \omega') = \frac{\cos \text{F}(a) \sin [\text{F}(y') + \text{F}(y)]}{\cos [\text{F}(y') + \text{F}(y)] - \sin \text{F}(y)}, \qquad (32).$$

уравненіе, которое нужно намъ будетъ въ послѣдствіи.

Замѣтимъ еще, что уравненіе (31) для t и a параллельныхъ дѣлается

$$\frac{e^{2a} - 1}{e^{2t} - 1} = \sin \text{F}(y)^2 \qquad (33).$$

Если теперь полагаемъ $y' = y + dy$, $a = dx$, $t = ds$, разумѣя x, y перпендикулярныя координаты кривой, которой s дуга, то

$$1 - \sin \text{F}(t) = \tfrac{1}{2} ds^2; \text{ F}(y) - \text{F}(y') = dy \sin \text{F}(y).$$

Уравненіе (31) и значеніе cot ω перемѣнятся въ

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin \text{F}(y)^2}} \qquad (34).$$

$$\cot \omega' = \frac{dy}{dx} \sin \text{F}(y) \qquad (35).$$

Первое даетъ элементъ кривой линіи, послѣднее опредѣляетъ уголъ касательной съ координатою y.

Можно легче найти уравненія (34), (35), замѣтивъ, что въ безконечномаломъ треугольникѣ $\text{T} = \frac{\pi}{2}$;

$$2q = \frac{a}{\sin \text{F}(y)}; \quad \text{t}^2 = (y' - y)^2 + 4\text{q}^2$$

$$\cot \omega' = \frac{y' - y}{2q}$$

Для круга, гдѣ x считается отъ центра, r полупоперечникъ [см. ур. (26)],

$$dy = - dx. \frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(r)},$$

интегрированіе даетъ

$$s = \cot \mathrm{F}(r). \text{ Arc. Sin. } \frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(r)}.$$

Здѣсь $\frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(r)}$ представляетъ косинусъ угла при центрѣ противъ y; слѣдовательно это выраженіе для s совершенно тоже, что и (28).

Изъ уравненія (27) для предѣльной круга, находимъ:

$$dx = dy. \cos \mathrm{F}(y); \; ds = \frac{dy}{\sin \mathrm{F}(y)}$$

Интегрируя получимъ:

$$s = \cot \mathrm{F}(y),$$

какъ и выше [см. урав. (24)].

Изъ уравненія для прямой (25) находимъ

$$dy \sin \mathrm{F}(y)^2 = \frac{e^{\varpi}. \sin [\mathrm{A} - \mathrm{F}(l)] - e^{-\varpi}. \sin [\mathrm{A} + \mathrm{F}(l)]}{2 \sin \mathrm{A}},$$

далѣе

$$ds = \frac{4 \, dx. \sin \mathrm{F}(l). \sin \mathrm{A}}{4 \sin \mathrm{A}^2 - \{\sin [\mathrm{A} - \mathrm{F}(l)\, e^{\varpi} + \sin [\mathrm{A} + \mathrm{F}(l)]\, e^{-\varpi}\}^2};$$

интегрируя отъ $x = 0$

$$s = \tfrac{1}{2} \log \frac{e^{2\varpi} \cos\left[\frac{\mathrm{A} - \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2 - \sin\left[\frac{\mathrm{A} + \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2}{\sin\left[\frac{\mathrm{A} + \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2 - e^{2\varpi} \sin\left[\frac{\mathrm{A} - \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2}$$

отсюда

$$\cos \mathrm{F}(s) = \frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{F}(l) + \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{F}(l) \cos \mathrm{F}(x)}$$

Тоже бы нашли и прямо изъ разрѣшенія треугольниковъ.

Полагая здѣсь $\mathrm{A} = \mathrm{F}(l)$, получимъ для s параллельной съ x

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2s} - 1} = \sin \mathrm{F}(l)^2$$

тоже уравненіе, что и (33). Его можно найти прямо и весьма легко, если разсматриваемъ перпендикулы y, y' (*черт. 14*), опущенные отъ концевъ линіи t на параллельную съ ней, гдѣ a измѣряетъ разстояніе между y и y'; далѣе вообра-

жаемъ еще отъ концевъ t дуги s, s' предѣльной круга, которыхъ t общая ось и которыя отсѣкаются другою осью a и ея продолженіемъ. Будетъ [см. урав. (28), (29)]:

$$s = \cot \mathrm{F}(y);\ s' = \cot \mathrm{F}(y');\ \cos \mathrm{F}(y') = \mathrm{e}^{-a} \cos \mathrm{F}(y)$$

отсюда

$$s = s'.\ \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-2a} - \cos \mathrm{F}(y)^2}}{\sin \mathrm{F}(y)}$$

Воображаемъ еще касательныя q, q' къ дугамъ s, s' проведенныя, въ концахъ перпендикулярно къ оси, сливающейся съ a, и отрѣзанныя другою осью t и ея продолженіемъ. Будетъ [см. урав. (30)]:

$$s = \cos \mathrm{F}(q),\ s = \cos \mathrm{F}(q');\ \cos \mathrm{F}(q) = \mathrm{e}^{t}\ .\ \cos \mathrm{F}(q')$$

слѣдовательно

$$s = s'.\ \mathrm{e}^{-t} \qquad (36).$$

уравненіе, которое можно найти и прямо, основываясь на ствойствахъ предѣльной круга.

Вставляя сюда значеніе s выше найденное, находимъ:

$$\frac{\mathrm{e}^{-2t} - 1}{\mathrm{e}^{-2a} - 1} = \sin \mathrm{F}(y')^2$$

или

$$\frac{\mathrm{e}^{2a} - 1}{\mathrm{e}^{2t} - 1} = \sin \mathrm{F}(y')^2$$

Если r называемъ разстояніе точки до центра координатъ, φ уголъ r съ x, то

$$dy = \frac{d\varphi \cos \varphi \cos \mathrm{F}(r) + dr.\ \sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi^2 \cos \mathrm{F}(r)^2}},$$

$$\frac{dx}{\mathrm{Sin}\,\mathrm{F}(y).} = \frac{dr \cos \varphi \sin \mathrm{F}(r) - d\varphi \sin \varphi \cot \mathrm{F}(r)}{\sqrt{1 - \cos \varphi^2 \cot \mathrm{F}(r)^2}}$$

что вставляя въ выраженіе для ds (34), получимъ

$$ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2 \cot \mathrm{F}(r)^2} \qquad (37).$$

Въ кругѣ r постоянно, слѣдовательно $dr = 0$, $s = \varphi.\ \cot \mathrm{F}(c)$, какъ и выше. —

Измѣреніе площадей основано въ Геометріи на положеніяхъ: 1-е. *Площади равны, когда онъ составляются изъ одинаковыхъ частей, хотя бы и въ другомъ порядкѣ.* 2-е *Площадь менѣе другой, если она въ этой второй помѣщается, оставляя часть незакрытой.* 3-е *Площадь уменьшается до безконечности,*

когда хоть одинъ бокъ ея такъ уменьшается, а другіе не выходятъ за извѣстную границу.

Начнемъ съ треугольниковъ, какъ такихъ фигуръ, изъ которыхъ составляются всѣ прочія прямолинейныя.

Въ треугольникѣ ABC (*чер. 15.*) дѣлимъ два бока AB, BC пополамъ. Черезъ середины ведемъ линію DE и опускаемъ на нее перпендикулы AF, CG, BI изъ остреевъ треугольника ABC. Произойдутъ одинаковые треугольники AFD съ DBI, CGE съ BIE. Отсюда слѣдуетъ, что площадь треугольника ABC равна площади четыреугольника AFGC, и что площади всѣхъ треугольниковъ на AC равны между собою, когда ихъ вершины отстоятъ равно отъ DE, линіи проведенной чрезъ средину двухъ боковъ, соединяющихъ вершину B съ основаніемъ AC. Полагаемъ $BI = h$, $\angle BAC = A$, $AB = c$. Въ $\triangle$ AFD находимъ

$$\sin A = \frac{\cos F(h)}{\cos F\left(\frac{c}{2}\right)}$$

уравненіе возможное, какъ скоро c не менѣе $2h$, и которое опредѣляетъ уголъ A, когда даны h и c. Обратно находимъ c, когда даны A и h. Такъ всякой треугольникъ ABC превращается въ прямоугольной, котораго катеты будутъ AC и линія c', опредѣляемая уравненіемъ.

$$\cos F\left(\frac{c'}{2}\right) = \sin A. \cos F\left(\frac{c}{2}\right)$$

Пусть теперь въ двухъ треугольникахъ бока не равны, напримѣръ $c < c'$, въ одномъ изъ нихъ A' уголъ при c': то изъ предыдущаго легко видѣть, что безъ перемѣны площади этаго послѣдняго треугольника, вмѣсто бока c' можно поставить c, когда вмѣсто A' поставится уголъ A'' изъ уравненія

$$\sin A'' = \sin A'. \frac{\cos F\left(\frac{c'}{2}\right)}{\cos F\left(\frac{c}{2}\right)}$$

Итакъ при сравненіи площадей двухъ треугольниковъ всегда можно полагать, что у нихъ по одному боку равному, которой и будемъ называть основаніемъ. Далѣе каждой изъ сихъ треугольниковъ, оставаясь на томъ же основаніи, можетъ быть превращенъ въ прямоугольной. Въ этомъ видѣ два треугольника необходимо одинаковы, какъ скоро суммы ихъ угловъ равны, иначе разности ихъ площадей произвели бы треугольникъ, гдѣ сумма угловъ π. Вообще, слѣ-

довательно, площади двухъ треугольниковъ равны, если въ нихъ суммы угловъ равны.

Когда же площадь A треугольника болѣе площади A′ другаго, то сумма угловъ перваго, которую означимъ $\pi - s$, менѣе суммы угловъ $\pi - s'$ втораго, слѣдовательно $s > s'$. Въ этомъ можно также увѣриться, полагая одинъ треугольникъ на другой равными основаніями и прямыми углами. Разность обоихъ треугольниковъ будетъ тоже треугольникъ, гдѣ сумма угловъ $\pi - (s - s') < \pi$.

Пусть $s' = \frac{n}{m} s$, гдѣ $n < m$ цѣлыя числа. Называемъ въ треугольникѣ A катеты a, b; означаемъ къ тому α, β такія линія, чтобы

$$\mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(\alpha) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(\beta) = \frac{\pi}{2}$$

Примѣняя сюда уравненія (8), находимъ

$$s = \mathrm{F}(\alpha + \beta).$$

Если означаемъ c, γ такія линіи, что

$$\mathrm{F}(c) + \mathrm{F}(\gamma) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{F}(\alpha + \gamma) = \frac{n}{m} s,$$

то площадь прямоугольнаго треугольника изъ катетовъ a, c будетъ A′. Далѣе, еслибы въ послѣднемъ уравненіи вмѣсто n ставили всѣ числа отъ 1 до m по порядку, то различныя отсюда значенія c раздѣлили бъ треугольникъ A на m частей; катетъ b раздѣлится тоже на m частей, слѣдовательно когда содержаніе $\frac{s}{s'}$ не выражается точно содержаніемъ цѣлыхъ чиселъ, то по крайней мѣрѣ съ увеличеніемъ чиселъ n и m потребуется пренебрѣчь треугольникомъ, котораго одинъ бокъ можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малымъ.

Итакъ площади двухъ треугольниковъ содержатся какъ недостатки въ суммахъ угловъ ихъ до двухъ прямыхъ. Мы будемъ принимать этотъ недостатокъ въ суммѣ угловъ до π, за самую площадь треугольника, оставляя до времени неопредѣленнымъ тотъ треугольникъ, котораго площадь единица.

Означая a, b катеты прямоугольнаго треугольника, $\triangle$ его площадь, находимъ:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \triangle = \cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) . \cos \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right)$$

Когда a, b чрезвычайно малы, такъ что можно пренебрѣгать кубы и высшія степени, то

$$\triangle = \frac{ab}{2},$$

какъ въ обыкновенной Геометріи принимается.

Площадь многоугольника съ n боками будетъ недостатокъ въ суммѣ его угловъ до $(n - 2) . \pi$

Въ трапеціи, которой бока a, a' перпендикулы къ b; четвертой бокъ c, A — уголъ между a и c, A′ уголъ между a' и c, находимъ [*см.* урав. (32)]:

$$\text{tang } (\mathrm{A} + \mathrm{A}') = \frac{\cos \mathrm{F}(b) \sin \{ \mathrm{F}(a') + \mathrm{F}(a) \}}{\cos \{ \mathrm{F}(a') + \mathrm{F}(a) \{ - \sin \mathrm{F}(b)}.$$

Полагая здѣсь

$$\mathrm{F}(b) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(\beta)$$

$$\mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(a') = \mathrm{F}(\alpha),$$

получимъ площадь трапеціи

$$2\pi - \mathrm{A} - \mathrm{A}' = \mathrm{F}(\beta - \alpha).$$

Площадь, ограниченная кривою линіей, болѣе площади многоугольника, который вмѣсто кривой ограничивается ея хордами; и менѣе многоугольника, который вмѣсто кривой ограничивается касательными къ ней. Можно доказать что съ уменьшеніемъ боковъ разность площадей того и другаго многоугольника можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой. Граница, къ которой такимъ образомъ приближаются площади многоугольниковъ, принята за величину площади, окруженной кривою линіей. Измѣренія на самомъ дѣлѣ производится подобнымъ образомъ.

Возмемъ для примѣра кругъ. Когда отъ конца одного полупоперечника опускаемъ перпендикулъ на другой, а въ концѣ этаго возставляемъ перпендикулъ, продолжая, покуда онъ встрѣтитъ первой полупоперечникъ; то составятся два треугольника, изъ которыхъ одинъ менѣе а другой болѣе площади вырѣзка круга между двумя полупоперечниками. Называемъ α уголъ при центрѣ; A, A′ недостатки въ суммѣ угловъ малаго и большаго треугольника до π; пусть r полупоперечникъ. Будетъ:

$$\text{tang } \mathrm{A} = \frac{1 - \sin \mathrm{F}(r)}{\text{tang } \alpha^2 + \sin \mathrm{F}(r)} . \text{ tang } \alpha,$$

$$\sin A' = \frac{\cos \alpha - \sqrt{\sin F(r)^2 - \sin \alpha^2}}{\sin F(r)} \cdot \sin \alpha$$

Съ увеличеніемъ содержанія $\frac{2\pi}{\alpha}$ какъ $\frac{2\pi}{\alpha}$ tang A, такъ и $\frac{2\pi}{\alpha}$ sin A' будутъ приближаться къ одной границѣ

$$\pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right) = 4\pi \cot F\left(\frac{r}{2}\right) \quad (38).$$

которая изображаетъ площадь круга. Когда r чрезвычайно мало, то это выраженіе, съ отбрасываніемъ r^4 и т. д., дѣлается πr^2.

Вообще для кривой линіи, которой перпендикулярныя координаты x, y площадь ds трапеціи между y, $y' = y + dy$ и dx, будетъ, какъ мы видѣли,

$$F(\beta - \alpha),$$

гдѣ $F(\beta) = \frac{\pi}{2} - F(dx)$, $F(\alpha) = F(y) + F(y')$,

слѣдовательно

$$2 \text{ tang } \tfrac{1}{2} ds = 2 \cdot \frac{e^{dx} - 1}{e^{dx} + 1} \text{ cot. } \frac{F(y) + F(y')}{2},$$

то есть

$$ds = dx. \cot F(y) \quad (39).$$

Если вмѣсто трапеціи изъ y, y', которая менѣе элемента площади, ограниченной кривою, разсматриваемъ трепенцію изъ dx, y и z — продолженной y', покуда касательная къ кривой чрезъ вершину y ее встрѣтитъ, — то элементъ ds будетъ приближаться къ границѣ выраженія

$$F(\beta - \alpha'),$$

котораго онъ постоянно менѣе, и гдѣ

$$F(\alpha') = F(y) + F(z).$$

Значеніе z опредѣляется уравненіемъ [*см*, урав. (24) и (35)]

$$\cot F(z) = \frac{e^{dx} + e^{-dx}}{2} \cdot \cos F(y) - \frac{e^{dx} - e^{-dx}}{2dx} \cdot dy \sin F(y)^2$$

слѣдовательно $z = y$.

Для круга

$$ds = dx \frac{\sqrt{\text{Sin } F(x)^2}}{\text{Sin } F(r)^2} - 1$$

гдѣ r полупоперечникъ; координаты x считаются отъ центра.
Интегрируя, находимъ

$$s = \frac{1}{\sin\ \mathrm{F}(r)}.\ \mathrm{Arc\ sin.}\ \frac{\cos\ \mathrm{F}(x)}{\cos\ \mathrm{F}(r)} - \mathrm{Arc.\ sin.}\ \frac{\cot\ \mathrm{F}(x)}{\cot\ \mathrm{F}(r)}$$

Можно повѣрить это выраженіе такъ. Если называемъ φ уголъ при центрѣ, то площадь вырѣзка круга, для угла $\frac{\pi}{2} - \varphi$ при центрѣ, будетъ [*см. выраж.* (38)]:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(\frac{1}{\mathrm{Sin\ F}(r)} - 1\right)$$

Площадь прямоугольнаго треугольника изъ x, y, r

$$\mathrm{Arc.\ cos}\ \frac{\cot\ \mathrm{F}(x)}{\cot\ \mathrm{F}(r)} - \varphi,$$

сумма сихъ двухъ площадей даетъ снова s и гдѣ

$$\cos\ \varphi = \frac{\cos\ \mathrm{F}(x)}{\cos\ \mathrm{F}(r)}.$$

Когда x считается отъ окружности къ центру, то

$$s = \frac{1}{\sin\ \mathrm{F}(r)}.\ \mathrm{Arc.\ cos}\ \frac{\cos\ \mathrm{F}(r-x)}{\cos\ \mathrm{F}(r)} - \mathrm{Arc.\ cos.}\ \frac{\cot\ \mathrm{F}(r-x)}{\cot\ \mathrm{F}(r)},$$

или

$$s = \frac{1}{\sin\ \mathrm{F}(r)}.\ \mathrm{Arc.\ sin}\ \frac{\mathrm{tang\ F}(r)}{\mathrm{tang\ F}(y)} - \mathrm{Arc.\ sin}\ \frac{\cos\ \mathrm{F}(x)}{\cos\ \mathrm{F}(r)}.$$

Полагая здѣсь $r = \infty$, получимъ площадь между координатами и дугою предѣльнаго круга:

$$s = \cot\ \mathrm{F}(y) - \frac{\pi}{2} + \mathrm{F}(y).$$

Тоже бы самое нашли, если бы въ общее выраженіе (39) поставили значеніе x изъ уравненія (27), потомъ интегрировали. Замѣтимъ, что $\frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(y)$ представляетъ площадь безконечно простирающуюся въ одну сторону и ограниченную съ другихъ сторонъ двумя осями и координатою y; слѣдовательно площадь между дугою кривой и координатами x, y — будетъ

$$\cot\ \mathrm{F}(y)$$

тоже, что и самая дуга [*см. урав.* (39)].

Наконецъ площадь между двухъ осей и двухъ дугъ предѣльной круга, на

разстояніи t одна отъ другой, когда называемъ s большую дугу, будетъ [*см. урав.* (36)].

$$s\,(1 - e^{-t}) \qquad (39).$$

или

$$s'(e^{t} - 1)$$

гдѣ s' малая дуга изъ двухъ:

Сіи два значенія площади можно найти, подобно уравненію (26), не предполагая извѣстнымъ уравненія (12) и (17). Для сего стоитъ только представлять себѣ площадь раздѣленную на равныя части осями и дугами предѣльной круга.

Если r означаетъ разстояніе точки кривой отъ начала координатъ, φ уголъ r съ постоянною осью чрезъ то же начало координатъ проведенною; то элементъ ds площади можетъ быть представленъ такъ [*см.* выр. (38)]:

$$ds = d\varphi \left(\frac{1}{\sin F(r)} - 1 \right).$$

Интегрированіе даетъ

$$s = -\varphi + \int_0 \frac{d\varphi}{\sin F(r)}. \qquad (40).$$

Напримѣръ въ предѣльной круга $F\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$

слѣдовательно

$$\tfrac{1}{2}\, s = -\varphi + \operatorname{tang} \varphi$$

Здѣсь разстояніе r берется отъ точки на кривой, а уголъ φ считается отъ касательной къ той же точкѣ.

Площадь можетъ раздѣляться еще на элементы параллельными линіями. Пусть отъ конца координаты x параллельная съ осью y встрѣчаетъ кривую на разстояніи u (черт. 16). Площадь безконечно простирающаяся между двухъ параллельныхъ чрезъ концы x и $x + dx$ проведенныхъ, будетъ

$$-d\,F(x)$$

а часть этой площади, ограниченная кривою [см. выр. (37)]

$$ds = -d\,F(x)\,[1 - e^{-u}];$$

отсюда интегрированіе даетъ

$$s = \frac{\pi}{2} - F(x) - \int_0 dx.\ e^{-u} \sin F(x) \qquad (41).$$

Если u' называемъ разстояніе, на которомъ параллельная съ осью y встрѣчаетъ кривую по другую сторону оси x; то элементъ площади можетъ быть также выраженъ

$$ds = -d\,F(x)\,[e^{u'} - 1]$$

слѣдовательно площадь

$$s = \int_0 dx.\ (e^{-u'} - e^{-u}).\ \sin \mathrm{F}(x) \qquad (42).$$

Если u, u' разстоянія (черт. 11), на которыхъ параллельная съ осью y встрѣчаетъ кривую два раза по одну сторону оси x, проведенной внѣ площади кривой; то

$$s = \int_0 dx\,(e^{-u} - e^{-u'}).\ \sin \mathrm{F}(x) \qquad (43).$$

Въ кругѣ, когда x считается отъ центра черезъ которой проходятъ оси координатъ x и y, треугольникъ изъ x, u и полупоперечника r съ противоположнымъ сему послѣднему угломъ $\mathrm{F}(x)$, даетъ

$$\cos \mathrm{F}(x)^2 \cos \mathrm{F}(u) + \frac{\sin \mathrm{F}(u) \sin \mathrm{F}(x)}{\sin \mathrm{F}(r)} = 1$$

отсюда

$$e^u \sin \mathrm{F}(x) = \frac{1 + \sqrt{\cos \mathrm{F}(r)^2 - \sin \mathrm{F}(r)^2 \cos \mathrm{F}(x)^2}}{\sin \mathrm{F}(r)}.$$

$$e^{u'} = \frac{\sin \mathrm{F}(x)}{\sin \mathrm{F}(r)} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \sin \mathrm{F}(x)^2 \sin \mathrm{F}(r)^2}}{1 + \cos \mathrm{F}(x)^2}$$

Уравненіе (41) даетъ послѣ интегрированія

$$s = \varphi - \text{Arc. Sin}\,[\sin \varphi \,\text{tang}\, \mathrm{F}(r)] - \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \Big\{ \text{Arc. tang}\,(\sin \varphi)$$

$$+ \text{Arc. tang.}\ \frac{(\sqrt{\cos \mathrm{F}(r)^2 - \sin \mathrm{F}(r)^2 \sin \varphi^2})}{\sin \varphi} \Big\}$$

гдѣ $\varphi = \frac{\pi}{2} \mathrm{F}(x)$. Тоже бы самое нашли, разсматривая s, составленной изъ вырѣзка круга и треугольника, котораго бока x, r, противъ r уголъ $\mathrm{F}(x)$.

Кривыя поверхности измѣряются плоскостями сомкнутыхъ треугольниковъ, которыхъ острея лежатъ на поверхности и которыхъ размѣръ долженъ быть тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе точности требуется въ исчисленіи. Граница приближенія будетъ воображаемая и математическая величина поверхности, которую непосредственно даетъ дифференціальное исчисленіе въ предположеніи безконечно малыхъ плоскостей.

Пусть координаты: x, къ ней перпендикулярная y; къ y перпендикулярная z опредѣляютъ мѣсто точки. Вмѣсто $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(z)$ пишемъ для краткости

X, Y, Z. Кромѣ точки (x, y, z) разсматриваемъ еще двѣ, которыхъ координаты

$$x, \quad y + dy, \quad z + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

$$x + dx, \quad y, \quad z + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx$$

Находимъ квадраты разстояній (смотри урав. 34):

первой отъ второй $\left(\frac{dz}{dy}\right) dy^2 + \frac{dy^2}{\sin Z^2}$,

первой отъ третьей $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx^2 + \frac{dx^2}{\sin Y^2 \sin Z^2}$,

второй отъ третьей $\left[\left(\frac{dz}{dy}\right) dy - \left(\frac{dz}{ax}\right) dx\right]^2 + \frac{dy^2}{\sin Z^2} + \frac{dx^2}{\sin Y^2 \sin Z^2}$

Площадь безконечно малаго треугольника изъ сихъ трехъ разстояній и въ которомъ сумму угловъ должно уже полагать π, будетъ

$$\frac{dx\, dy}{2 \sin Z} \sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\sin Y^2} + \frac{1}{\sin Y^2 \sin Z^2}\right)}$$

Еслибъ вмѣсто первой взяли еще точку, которой координаты происходятъ съ перемѣною x на $x + dx$, y на $y + dy$, то разстоянія, а слѣдовательно и площадь треугольника, остались бы тѣ же. Соединеніе двухъ такихъ площадей даетъ приращеніе поверхности, когда x увеличится на dx, y на dy. Называя S поверхность, получимъ

$$\left(\frac{d^2 S}{dy\, dy}\right) = \frac{1}{\sin Z} \sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\sin Y^2} + \frac{1}{\sin Y^2 \sin Z^2}\right)} \qquad (44).$$

Для сферы, которой полупоперечникъ r, координаты x, y, z считаются отъ центра, $F(r) = R$

$$\sin X \sin Y \sin Z = \sin R,$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cos X}{\cos Z}; \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos Y}{\cos Z},$$

$$\left(\frac{d^2 S}{dx\, dy}\right) = \frac{1}{\sin Z} \sqrt{\left(\frac{\cos X^2}{\cos Z^2} + \frac{\cot Y^2}{\cos Z^2} + \frac{1}{\sin Y^2 \sin Z^2}\right)}.$$

Вставляя значеніе Z, находимъ

$$\left(\frac{d^2\mathrm{S}}{dx\,dy}\right) = \frac{\cos \mathrm{R}}{\sin \mathrm{R}^2} \cdot \frac{\sin \mathrm{Y} \sin \mathrm{X}^2}{\sqrt{(\sin \mathrm{X}^2 \sin \mathrm{Y}^2 - \sin \mathrm{R}^2)}}$$

Умножая на $4dy$ и интегрируя отъ $\sin \mathrm{Y} = \frac{\sin \mathrm{R}}{\sin \mathrm{X}}$ до $\mathrm{Y} = \frac{\pi}{2}$, получимъ для цѣлой окружности

$$\left(\frac{d\,\mathrm{S}}{dx}\right) = 2\pi \sin \mathrm{X} \frac{\cos \mathrm{R}}{\sin \mathrm{R}^2}$$

Умножая на dx и интегрируя отъ X до $\mathrm{X} = \frac{\pi}{2}$, находимъ

$$\mathrm{S} = 2\pi \frac{\cos \mathrm{R} \cos \mathrm{X}}{\sin \mathrm{R}^2}$$

— вырѣзокъ сферы между плоскостями перпендикулярными къ полупоперечнику, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ центръ, а другая на разстояніи x отъ центра.

Вся сфера будетъ

$$4\pi \cot \mathrm{R}^2 = \pi (e^r - e^{-r})^2. \qquad (45).$$

Отрѣзокъ на разстояніи x отъ центра

$$2\pi \frac{\cos \mathrm{R}}{\sin \mathrm{R}^2} (\cos \mathrm{R} - \cos \mathrm{X}),$$

или

$$\frac{2\pi \cos \mathrm{X} \cos \mathrm{R}}{1 - \cos \mathrm{X} \cos \mathrm{R}},$$

на разстояніи x отъ поверхности. Это послѣднее выраженіе для $r = \infty$ даетъ отрѣзокъ предѣльной сферы

$$\pi (e^{2x} - 1).$$

Полагая для всякой сферы

$$\cos \psi = \mathrm{tang\ R.\ cot\ Y}\,;\ \cos\ \mathrm{X} = \cos \mathrm{R} \sin \psi \sin \varphi\,,$$

Находимъ

$$\left(\frac{d^2\mathrm{S}}{d\psi\,d\varphi}\right) = -\frac{\cos \mathrm{R}^2}{\sin \mathrm{R}} \cdot \frac{\sin \psi \sqrt{(1 - \cos \mathrm{R}^2 \sin \psi^2 \sin \varphi^2)}}{1 - \cos \mathrm{R}^2 \sin \psi^2}$$

Умножая на $8d\psi d\varphi$ и интегрируя отъ $\psi = 0$ до $\psi = \frac{\pi}{2}$, отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, снова должны найти величину цѣлой сферы; слѣдовательно

$$\frac{\pi}{2 \sin \mathrm{R}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin \psi \sqrt{(1 - \cos \mathrm{R}^2 \sin \psi^2 \sin \varphi^2)}}{1 - \cos \mathrm{R}^2 \sin \psi^2} . \qquad (46).$$

Интегралъ, въ которомъ видно свойство еллиптической функціи

$$\mathrm{E}(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - a^2 \sin \varphi^2} ;$$

именно:

$$\frac{\pi a}{2\sqrt{(1 - a^2)}} = \int_0^a \frac{x dx\, \mathrm{E}(x)}{(1 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Если возмемъ въ помощь другую полную еллиптическую функцію

$$\mathrm{H}(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(1 - a^2 \sin \varphi^2)}}$$

И замѣтимъ, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \frac{d\psi\, d\varphi \cos \psi . \sqrt{(1 - \sin \mathrm{R}^2 \sin \psi^2 \sin \varphi^2)}}{1 - \sin \mathrm{R}^2 \sin \psi^2} = \mathrm{H}(\sin \mathrm{R})$$

или, что все равно,

$$x\, \mathrm{H}(x) = \int_0 \frac{dx\, \mathrm{E}(x)}{1 - x^2} ,$$

то уравненіе (46), когда здѣсь ставимъ $\frac{\pi}{2} - \mathrm{R}$ вмѣсто R, будучи умножено на $\cos \mathrm{R} d\mathrm{R}$ и интегрировано отъ $\mathrm{R} = 0$, даетъ

$$\frac{\pi \mathrm{R}}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi . \sin \mathrm{R} \sin \psi}{\sqrt{(1 - \sin \mathrm{R}^2 \sin \psi^2 \sin \varphi^2)}} .$$

Далѣе, интегрируя въ отношеніи къ ψ между назначенными границами, получимъ

$$\pi \mathrm{R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \log \left\{ \frac{1 + \sin \mathrm{R} \sin \varphi}{1 - \sin \mathrm{R} \sin \varphi} \right\}$$

что можно представить еще иначе, полагая $\varphi = \mathrm{F}(x)$,

$$\pi \mathrm{R} = \int_0^\infty dx \log \left\{ \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x \sin \mathrm{R}}{e^{2x} + 1 - 2e^x \sin \mathrm{R}} \right\},$$

или интегрируя по частямъ

$$\frac{\pi \mathrm{R}}{4 \sin \mathrm{R}} = \int_0^\infty \frac{(e^{2x} - 1)\, e^x\, x dx}{e^{4x} + 2e^{2x} \cos 2\mathrm{R} + 1} \qquad (47)$$

— интегралъ, который знали только для $\mathrm{R} = \frac{\pi}{2}$, именно

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^\infty \frac{x dx e^x}{e^{2x} - 1}.$$

Справедливость интеграла (47) можно еще доказать и въ томъ случаѣ, когда вмѣсто $\cos 2\mathrm{R}$ будетъ число болѣе единицы. Начинаемъ съ

$$\int_0^\pi d\psi.\ \log \cot \tfrac{1}{2} \psi = 0,$$

или

$$\int_0^\pi d\varphi.\ \log (e^a \cot \tfrac{1}{2} \psi) = \pi a.$$

Полагаемъ здѣсь $e^x = e^{-a} \cot \frac{1}{2} \psi$. Интегралъ перемѣнится въ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{e^{x-a} + e^{-x+a}} = \frac{\pi}{2} a$$

Раздѣляемъ его на двѣ части: одну отъ $x = o$ до $x = \infty$, другую отъ $x = -\infty$ до $x = o$. Послѣдняя можетъ быть представлена иначе

$$-\int_0^\infty \frac{x dx}{e^{-x-a} + e^{x+a}}.$$

Обѣ вмѣстѣ дадутъ

$$\int_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x}).\ x dx}{e^{2x} + (e^{2a} + e^{-2a}) + e^{-2x}} = \frac{\pi a}{2(e^a - e^{-a})}.$$

Если здѣсь ставимъ $a\sqrt{-1}$ вмѣсто a, то получимъ снова (47)

Для поверхности обращенія около оси x въ уравненіи (44) должно ставить

$$\sin \mathrm{Y} \sin \mathrm{Z} = \sin \mathrm{R}\,; \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cot \mathrm{R}}{\cos \mathrm{Z}} \cdot \left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right); \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos \mathrm{Y}}{\cos \mathrm{Z}}$$

гдѣ $\mathrm{R} = \mathrm{F}(r)$; x и r координаты точекъ производящей линіи. Послѣ сего находимъ:

$$\left(\frac{d^2\mathrm{S}}{dx\,dy}\right) = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dR}{dx}\right)^2}}{\sin \mathrm{X} \sin \mathrm{R}^2 \sqrt{(1 - \mathrm{tang}\,\mathrm{R}^2 \cot \mathrm{Y}^2)}}$$

Умножая на $4dy$ и интегрируя отъ $\mathrm{Y} = \mathrm{R}$ до $\mathrm{Y} = \frac{\pi}{2}$, получимъ

$$\left(\frac{d\mathrm{S}}{dx}\right) = \frac{2\pi \cos \mathrm{R}}{\sin \mathrm{R}^2} \sqrt{1+\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right)^2}. \qquad (48).$$

Для прямаго конуса [см. ур. 18]

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{A} = \mathrm{tang}\,\mathrm{X} \cos \mathrm{R};$$

слѣдовательно

$$d\mathrm{S} = -\frac{2\pi \cos \mathrm{R}\, \mathrm{dX}}{\sin \mathrm{R}^3 \sin \mathrm{X} \cos \mathrm{A}}.$$

Если означаемъ l бокъ конуса и полагаемъ $\mathrm{F}(l) = \mathrm{L}$, то [см. ур. 14]

$$\cos \mathrm{L} \cos \mathrm{A} = \cos \mathrm{X};\ \mathrm{tang}\,\mathrm{L} = \sin \mathrm{A}\ \mathrm{tang}\,\mathrm{R};$$

послѣ чего

$$d\mathrm{S} = -\frac{2\pi \sin \mathrm{A} \cos \mathrm{L}\, d\mathrm{L}}{\sin \mathrm{L}^2},$$

интегрированіе даетъ

$$\mathrm{S} = 2\pi \sin \mathrm{A} \left(\frac{1}{\sin \mathrm{L}} - 1\right)$$

Для предѣльной круга $\sin \mathrm{R} = e^{-x}$, что вставляя въ уравненіе (48), находимъ тоже, что и выше.

Сихъ примѣровъ довольно, чтобы дать понятіе объ исчисленіи величины кривыхъ поверхностей. Теперь займемся опредѣленіемъ объема тѣлъ.

Объемъ тѣла, — ограниченнаго двумя предѣльными сферами, выгнутыми въ одну сторону и которымъ взаимное ихъ разстояніе c служитъ общею осью, далѣе — коническою поверхностію, которой производящая c остается всегда параллельною оси двухъ сферъ, долженъ быть пропорціоналенъ вырѣзку S на одной изъ двухъ предѣльныхъ сферъ, завися при томъ отъ c; слѣдовательно онъ будетъ SC, гдѣ C функція отъ c. Если S большой изъ двухъ вырѣзковъ, т. е. тотъ, на внутренней сторонѣ котораго лежитъ c, и если онъ представляетъ прямоугольникъ изъ дугъ a, b предѣльной круга, то $\mathrm{S} = ab$; а меньшой вырѣзокъ abe^{-2c} (смотри урав. 36). Вообще, какой бы вырѣзокъ S ни былъ, другой, которой его менѣе, долженъ быть $e^{-2c}\mathrm{S}$. Теперь продолжая коническую

поверхность за меньшой и на каждомъ разстояніи c пересѣкая ее предѣльной сферой, перпендикулярной къ c, получимъ тѣла, которыхъ объемъ будетъ

$$\mathrm{SC};\ e^{-2c}\ \mathrm{SC};\ e^{-4c}\ \mathrm{SC} \text{ и т. д.}$$

и которыхъ сумма, слѣдовательно, тѣмъ болѣе приближается къ

$$\frac{\mathrm{SC}}{1 - e^{-2c}}$$

чѣмъ коническая поверхность простирается далѣе; такъ, что эта граница представляетъ уже объемъ тѣла съ безконечно продолженною поверхностію. Въ такомъ случаѣ производилель при S не можетъ болѣе зависѣть отъ c, а слѣдовательно объемъ усѣченнаго конуса съ высотою c, какой напередъ разсматривали, должно принять

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{S}(1 - e^{-2c}) \qquad (49)$$

съ тѣмъ, чтобы для весьма малаго c онъ былъ $c\mathrm{S}$, какъ въ обыкновенной Геометріи.

Послѣ сего изчисленіе объема всякаго тѣла можетъ быть сдѣлано раздѣленіемъ его на элементы помощію коническихъ поверхностей, которыхъ производящія параллельны съ какою нибудь осью, взятою произвольно.

Для примѣра пусть четыре плоскости, перпендикулярныя по порядку другъ къ другу, пересѣкаются въ параллельныхъ линіяхъ. Наконецъ тѣло ограничивается еще цилиндрическою поверхностію, которой управляющая дуга b большаго круга на одной изъ четырехъ перпендикулярныхъ плоскостей, и гдѣ двѣ параллельныя отъ пересѣченія двумя другими плоскостями будутъ вмѣстѣ осями дугѣ b, а производящая линія цилиндрической поверхности пусть перпендикулъ a къ b, отрѣзанной противоположною плоскостію. Воображаемъ предѣльную сферу чрезъ b, и называемъ s дугу, которая происходитъ на ней отъ пересѣченія съ боковою плоскостію чрезъ a и которая отрѣзывается противоположной. Пусть y разстояніе между вершинами a и s. Съ измѣненіемъ сихъ двухъ послѣднихъ линій объемъ тѣла P раздѣляется параллельными плоскостями на элементы

$$d\mathrm{P} = \frac{1}{2}\,b\,e^{-2y}\,ds.$$

Вставлямъ сюда (см. ур. 29, 30 и 36)

$$\mathrm{s} = \cos \mathrm{F}(a);\quad e^{-y} = \sin \mathrm{F}(a)$$

и интегрируя отъ $a = o$, находимъ

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\,ab. \qquad (50).$$

Здѣсь подъ b можно разумѣть также и площадь, ограниченную дугою b и отъ концевъ ея двумя безконечно продолженными осями. Итакъ если x разстояніе отъ прямой, dx безконечно малая часть x между двухъ параллельныхъ съ этою прямой, тогда $b = -dF(x)$.

Пусть теперь a, b катеты прямоугольнаго треугольника, A уголъ противъ a. Разсматриваемъ пирамиду, которой основаніе такой треугольникъ и которая продолжается безконечно, будучи ограничена тремя плоскостями такъ, что всѣ три линіи пересѣченія или ребра пирамиды параллельны между собою, а одна перпендикулярна къ основанію въ остреѣ угла A. Принимаемъ a, b перемѣняющимися, A постояннымъ. Пирамида P раздѣлится плоскостями, параллельными къ перпендикулу, на элементы, такъ что (50)

$$dP = -\frac{1}{2} a\, dF(b); \tag{51}$$

куда вставляя

$$B = F(b);\ \cot B = \cot A\ \cos F(a),$$

находимъ

$$dP = -\frac{1}{4} dB \log \frac{\sin (B + A)}{\sin (B - A)}. \tag{52}.$$

Если удерживаемъ одну первую степень tangA, вмѣсто которой ставимъ 2π, потомъ интегрируемъ отъ $B = \frac{\pi}{2}$, то получимъ

$$P = -\pi \log \sin B = \log\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) \tag{53}.$$

объемъ прямого конуса, безконечно простирающагося, котораго основаніе кругъ съ полупоперѣчникомъ b и котораго ось параллельна боку.

Дифференцируя это послѣднее уравненіе въ отношеніи къ b, получимъ

$$dP = \pi\, db \cos F(b) \tag{54}$$

величина конической оболочки, которой толстота db по направленію полупоперечника b круга въ основаніи, и которая простирается безконечно, идя параллельно съ осью конуса.

Чтобы найти величину прямого конуса въ высотой конечною, надобно раздѣлять поверхность его на элементы перпендикулярными плоскостями къ высотѣ; потомъ, начиная отъ вершины, складывать всѣ коническія оболочки, которыя идутъ отъ сихъ элементовъ параллельно къ высотѣ конуса, и сумму вычесть изъ объема конуса, ограниченнаго уже послѣднею оболочкою. Такъ пусть x высота конуса, y полупоперечникъ основанія, c бокъ, A уголъ при вершинѣ

между x и c. Означаемъ для краткости X, Y, C, углы $\mathbf{F}(x)$, $\mathbf{F}(y)$, $\mathbf{F}(c)$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ катетовъ x, y, гипотенузы c, будетъ

$$\cos X = \cos A \cos C\,;\ \operatorname{tang} A = \cos Y \operatorname{tang} X\,;\ \operatorname{tang} C = \sin A \operatorname{tang} Y$$

Разсматривая здѣсь A постояннымъ, всѣ прочія величины перемѣняющимися, находимъ

$$dy = dx \frac{\cos Y}{\sin Y^2 \cos X}.$$

Таково измѣненіе y въ конусѣ, котораго высота x; но еслибъ $x = \infty$, тогда бы приращеніе y было (19)

$$dx \frac{\cos Y}{\sin Y^2}.$$

Разность того и другого даетъ

$$\frac{2dx \sin \frac{1}{2} X^2 \cos Y}{\cos X \sin Y^2}$$

отрѣзокъ слѣдующей ордонаты за y помощію параллельной съ x, проведенной чрезъ вершину y. Послѣ этого объемъ конуса (54)

$$P = \pi \int dy \cos Y - 2\pi \int \frac{dx \sin \frac{1}{2} X^2 \cos Y^2}{\cos X \sin Y^2}$$

$$= \pi \int dy \cos Y \cos X = \pi \int dx \cot Y^2$$

$$= \pi \int \frac{dx}{\sin Y^2} - \pi x\,,$$

гдѣ интегралы начинаются отъ $x = o$, $y = o$. Далѣе, уравненіе для C и X даетъ

$$dx \sin X^2 = dc \cos A \sin C^2,$$

которое умножая на $\sin Y^2$ и вставляя сюда $\sin X \sin Y = \sin C$, получимъ

$$dx = dc \cos A \sin Y^2;$$

слѣдовательно

$$P = \pi (c \cos A - x) \qquad (55)$$

Чтобы ввести сюда однѣ буквы c и A, надобно вмѣсто x ставить

$$\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1 + \cos \frac{1}{2} A^2 (e^{2c} - 1)}{1 + \sin \frac{1}{2} A^2 (e^{2c} - 1)} \right\}$$

или строкою,

$$x = \frac{1}{2} \cos A \left[(e^{2c} - 1) - \frac{1}{2} (e^{2c} - 1)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (e^{2c} - 1)^3 . \frac{3 + \cos A^2}{4} - \text{и т. д.} \right],$$

а продолжая приближеніе до c^3

$$x = \cos A \left(c - \frac{1}{3} c^3 \sin A^2\right)$$

послѣ чего

$$P = \frac{1}{3} \pi c^3 \cos A \sin A^2 = \frac{1}{3} \pi y^2 x$$

какъ въ обыкновенной Геометріи принято.

Если y такъ мало, что можно довольствоваться его вторыми степенями, то

$$\cos A = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tang} C^2 \cot Y^2,$$

$$x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \cos A \cos C}{1 - \cos A \cos C}\right) = c - \frac{\cot Y^2}{2 \cos C.}$$

Вставля сіи значенія въ уравненіе (55), потомъ раздѣляя на величину основанія конуса и умножая на поверхность шара, котораго полупоперечникъ c [(38) и (45)], находимъ объемъ шара

$$\frac{\pi}{2} (e^{2c} - e^{-2c} - 4c) \qquad (56).$$

Помощію коническихъ, безконечно простирающихся оболочекъ, можемъ находить объемъ и всякого тѣла, ограниченнаго поверхностію обращенія. Пусть x, y, перпендикулярныя координаты производящей линіи, считаются отъ точки пересѣченія поверхности тѣла съ осью x, которая служитъ вмѣстѣ и осью обращенія. Если съ перемѣною x на $x + dx$, координата y перемѣняется въ $y + dy$, то параллельная съ x чрезъ вершину y отрѣжетъ отъ $y + dy$, какъ мы видѣли выше, линію

$$dy + dx \frac{\cos Y}{\sin Y^2}.$$

Умножая на $\pi \cos Y$, получимъ коническую оболочку, подобную той, которой значеніе дано уравненіемъ (54). Потомъ, интегрируя отъ $x = o$ и отбрасывая

$$\pi \int dy \cos Y,$$

т. е. конусъ на кругѣ съ полупоперечникомъ y (53), находимъ объемъ тѣла

$$\pi \int dx \cot Y^2 \qquad (57)$$

гдѣ границы интеграла произвольны и гдѣ x можетъ считаться въ ту или другую сторону. Напримѣръ для шара

$$\sin X \sin Y = \sin R$$

гдѣ $\mathrm{R} = \mathrm{F}(r)$, r полупоперечникъ, $\mathrm{X} = \mathrm{F}(x)$, координата x считается отъ центра. Находимъ объемъ шара

$$\pi \int dx \left(\frac{\sin \mathrm{X}^2}{\sin \mathrm{R}^2} - 1 \right)$$

послѣ интегрированія отъ $x = o$, вырѣзокъ шара будетъ

$$\pi \left(\frac{\sin \mathrm{X}}{\sin \mathrm{R}^2} - x \right), \tag{58}$$

умножая на 2 и полагая $\mathrm{X} = \mathrm{R}$, получимъ весь шаръ, какъ выше (56).

Называя A уголъ между x и r, потомъ умножая величину всего шара на $\sin \frac{1}{2} \mathrm{A}^2$, находимъ коническій вырѣзокъ шара

$$2\pi \left(\frac{\cos \mathrm{R}}{\sin \mathrm{R}^2} - r \right) \sin \tfrac{1}{2} \mathrm{A}^2$$

Еслиже отъ половины шара отнимаемъ отрѣзокъ (58), то получимъ отрѣзокъ на разстояніи x отъ центра

$$\pi \left(\frac{2 \cos \mathrm{R} \sin \frac{1}{2} \mathrm{A}^2}{\sin \mathrm{R}^2} - (r\text{-}x) \right)$$

Разность сихъ двухъ послѣднихъ выраженій даетъ объемъ конуса, какъ найдено было выше (55).

Если x считаемъ отъ поверхности шара, то отрѣзокъ плоскостію на разстояніи x будетъ

$$\pi \left(\frac{\cos \mathrm{X}}{1 - \cos \mathrm{X} \cos \mathrm{R}} - x \right).$$

Для $r = \infty$ находимъ отрѣзокъ тѣла, ограниченнаго предѣльною сферой

$$\pi \left(\frac{e^{2x} - 1}{2} - x \right)$$

Общее дифференціальное выраженіе для вычисленія объема всякаго тѣла можетъ быть дано въ элементахъ, на которые дѣлится тѣло помощію предѣльныхъ сферъ и двумя рядами параллельныхъ плоскостей, нормальныхъ къ предѣльнымъ сферамъ и перпендикулярныхъ, одинъ рядъ къ другому. Въ такомъ случаѣ называемъ ξ разстояніе отъ начала координатъ на одной изъ осей предѣльныхъ сферъ, которая вмѣстѣ будетъ слѣдовательно осью координатъ ξ. Называемъ η дугу на предѣльной сферѣ перпендикулярную къ ξ, и пусть ζ такая же дуга, проведенная отъ другого конца η въ плоскости перпендикулярной къ той, гдѣ лежатъ ξ, η. Ясно, что элементъ тѣла можетъ быть представленъ [(49) и (50)] произведеніемъ

$$d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

Воображаемъ перпендикулы: z отъ вершины ζ на плоскость линій ξ, η; y отъ конца z на ξ, и называемъ x отрѣзанную часть этой послѣдней отъ начала координатъ. Означая X, Y, Z углы F(x) F(y), F(z), получимъ [(27), (29), (36)]

$$\zeta = \cot Z\,;\ \eta = \frac{\cot Y}{\sin Z}\,.$$

Принимая сперва одно z перемѣняющимся, потомъ одно y, наконецъ одно x,

$$d\zeta = \frac{dz}{\sin Z}\,;\ d\eta = \frac{dy}{\sin Y \sin Z}\,;\ d\check{\xi} = dx\,.$$

Послѣ чего элементъ тѣла

$$d^3 P = \frac{dx\,dy\,dz}{\sin Y \sin Z^2}\,. \tag{59}$$

То же бы нашли, раздѣля тѣло перпендикулярными другъ къ другу плоскостями и принимая произведеніе трехъ боковъ за объемъ безконечно малаго элемента. Интегрируя (59) отъ $x = o$, $y = o$, $z = o$, получимъ

$$\left(\frac{d^2 P}{dy\,dz}\right) = \frac{x}{\sin Y \sin Z^2}\,,$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dx\,dz}\right) = \frac{\cot Y}{\sin Z^2}\,, \tag{60}$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dx\,dy}\right) = \frac{1}{8 \sin Y}(e^{2z} - e^{-2z} + 4z)$$

гдѣ x, y, z относятся уже къ поверхности тѣла. Для шара, когда координаты считаются отъ центра, уравненіе (60) дѣлается

$$\left(\frac{d^2 P}{dX\,dZ}\right) = \frac{1}{\sin Z^2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin R^2} - \frac{1}{\sin X^2 \sin Z^2}\right)}$$

гдѣ $R = F(r)$; r полупоперечникъ. Умножая на dZ и интегрируя отъ $Z = \frac{\pi}{2}$ до $\sin R = \sin X \sin Z$, находимъ снова выраженіе (56).

Если r разстояніе точки отъ начала координатъ, θ уголъ r съ плоскостію xy; ω уголъ проекціи r на плоскости xy съ x; то выраженіе (59) даетъ элементъ тѣла въ полярныхъ координатахъ

$$d^3 P = \tfrac{1}{4}\, d\omega d\theta dr \cos\theta\,(e^r - e^{-r})^2 \tag{61}$$

которое выраженіе еще легче служитъ къ исчисленію объема шара и прямого конуса.

Ищемъ теперь величину пирамиды, которой основаніе прямоугольной треугольникъ изъ катетовъ a, b и гипотенузы c; высота h перпендикулярная къ основанію въ точкѣ пересѣченія a съ c. Называемъ ψ уголъ между a и c; r гипотенузу въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ катетовъ a, h; въ этомъ же треугольникѣ пусть φ уголъ противъ c. Пирамида, которую назовемъ P, раздѣлится на элементы (55)

$$dP = \frac{1}{2}\, d\psi\, (r \cos\varphi - h); \tag{62}$$

откуда чрезъ интегрированіе

$$P = \frac{1}{2} \int_0 d\psi .\ r \cos\varphi - \psi h \tag{63}$$

Точно также, если называемъ ω уголъ противъ h въ треугольникѣ изъ a и h θ уголъ между b и r,

$$P = \frac{1}{2} \int_0 d\omega .\ r \cos\theta - \frac{1}{2}\, b\omega$$

Зависимость линій и угловъ a, h, r, φ, ψ, ω между собою опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\varphi \cos\psi &= \cos A \operatorname{tang} H, \\ \operatorname{tang}\omega &= \cos H \operatorname{tang} A, \\ \cos H &= \cos\varphi \ \cos\ R, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

гдѣ $A = F(a)$, $H = F(h)$, $R = F(r)$. Здѣсь можно перемѣнять H, φ, ψ, ω на B, θ, ω, ψ, разумѣя подъ B уголъ $F(b)$; слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\theta \cos\omega &= \cos A \operatorname{tang} B, \\ \operatorname{tang}\psi &= \cos B \operatorname{tang} A, \\ \cos B &= \cos\theta \ \cos R, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Отсюда находимъ

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \psi &= \frac{\cos A \sin H}{\sqrt{(\sin H^2 - \sin R^2)}} \\ \cos\ \varphi &= \sqrt{\frac{\cos\psi \sin\omega}{(\sin A^2 - \sin\omega^2 \sin\psi^2)}} \\ \cos\ R &= \frac{\cot A}{\cos\omega \cos\psi \sqrt{(\sin A^2 - \sin\omega^2 \sin\psi^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Выраженіе (63) можетъ быть представлено различно. Если вводимъ величины A, H, R, то

$$2P = \frac{1}{2}\cos A \sin 2H \int_R \frac{dR \sin R \log \cot \frac{1}{2}R}{(\sin H^2 - \sin R^2)\sqrt{(\sin A^2 \sin H^2 - \sin R^2)}}$$

$$- \text{Arc cos} \frac{\cos A \sin H}{\sqrt{(\sin H^2 - \sin R^2)}} \log \cot \tfrac{1}{2} H \qquad (67)$$

гдѣ интегралъ оканчивается съ $\sin R = \sin A \sin H$, какъ можно видѣть въ уравненіяхъ (64).

Перемѣняя буквы и сравнивая два значенія P, получимъ

$$\cos A \sin 2H \int \frac{dR \sin R \log \cot \frac{1}{2}R}{(\sin H^2 - \sin R^2)\sqrt{(\sin A^2 \sin H^2 - \sin R^2)}}$$

$$-\cos A \sin 2B \int \frac{dR \sin R \log \cot \frac{1}{2}R}{(\sin B^2 - \sin R^2)\sqrt{(\sin A^2 \sin B^2 - \sin R^2)}}$$

$$= 2 \text{ Arc. tang } (\text{tang A cos B}). \log \cot \tfrac{1}{2} H$$

$$- 2 \text{ Arc. tang } (\text{tang A cos H}). \log \cot \tfrac{1}{2} H$$

гдѣ интегралы начинаются, какъ можно заключить изъ уравненій (64), (65), съ

$$\sin R = \sin A \sin B \sin H$$

и оканчиваются, когда выраженіе подъ квадратнымъ корнемъ интеграла дѣлается нулемъ.

Если полагаемъ

$$\sin \alpha = \frac{\sin \omega \sin \psi}{\sin A}, \qquad (68)$$

то находимъ

$$2P = \alpha r - \psi h - \int_a \alpha dr$$

куда надобно поставить

$$r = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\cos \omega \cos \psi + \cos A \cos \alpha}{\cos \omega \cos \psi - \cos A \cos \alpha} \right) \qquad (69)$$

послѣ чего

$$4P = 2\alpha r - \psi h - \cos A \sin 2\omega \int_0 \frac{\alpha d\alpha \sin \alpha}{(\sin \alpha^2 - \sin \omega^2)\sqrt{(\sin \omega^2 - \sin \alpha^2 \sin A^2)}} \qquad (70)$$

а сравнивая два значенія P, получимъ

$$\sin 2\omega \int_0 \frac{\alpha d\alpha \sin \alpha}{(\sin \alpha^2 - \sin \omega^2)\sqrt{(\sin \psi^2 - \sin \alpha^2 \sin A^2)}}$$

$$- \sin 2\psi \int_0 \frac{\alpha d\alpha \sin \alpha}{(\sin \alpha^2 - \sin \psi^2)\sqrt{(\sin \psi^2 - \sin \alpha^2 \sin A^2)}}$$

$$= \omega \log \frac{\sin (A + \psi)}{\sin (A - \psi)} - \psi \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)}$$

гдѣ углы A, ψ, ω не зависятъ другъ отъ друга и гдѣ интегралы оканчиваются съ

$$\sin \alpha = \frac{\sin \omega \sin \psi}{\sin A}$$

но гдѣ необходимо $A > \psi$ и $> \omega$.

Наконецъ мы видѣли, что

$$\int_0 d\psi . r \cos\varphi = \int_0 r d\alpha$$

Если ставимъ сюда значеніе r (69), то послѣдній интегралъ можно представить, разсматривая въ немъ A, α независящими, ψ функціей отъ A и α, а прочія постоянными

$$2 \cos\omega \int_0 d\alpha \cos\alpha \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin A . dA}{(\sin A^2 - \sin \omega^2) \cos \psi} =$$

$$2 \cos\omega \int_0 \frac{\sin A}{\cos \psi} \cos\alpha \, d\alpha \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{d A}{\sin A^2 - \sin \omega^2} +$$

$$\frac{1}{\sin \omega} \int_0 d\alpha \cos\alpha \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{d A \cos A}{\cos \psi^2} \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} ;$$

въ послѣднемъ двойномъ интегралѣ измѣняя порядокъ интегрированія, находимъ

$$\int r d\alpha = \psi \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} + \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{d A \cos A}{\cos \psi} \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)},$$

что вставляя въ уравненіе (63), получимъ

$$4P = \sin 2\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi \, d A}{\sin (A + \omega) \sin (A - \omega)} - 2\psi h$$

но гдѣ надобно вмѣсто ψ поставить значеніе (68) и потомъ разсматривать одно только A перемѣняющимся, слѣдовательно

$$P = -\frac{1}{2} \psi h + \frac{1}{2} \cos\omega \sin\alpha \int \frac{\psi d \psi \cos \psi}{(\sin \psi^2 - \sin \alpha^2) \sqrt{(\sin \alpha^2 - \sin \omega^2 \sin \psi^2)}}$$

гдѣ одно ψ разсматривается перемѣняющимся, а интегралъ берется отъ ψ до

$$\sin \psi = \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} .$$

Для $\psi = \mathrm{A}$, дѣлается $b = \infty$ и пирамида P простирается безконечно. Тогда уравненіе (63) даетъ

$$2\mathrm{P} = \int_0^A d\psi . r \cos\varphi - \mathrm{A}h. \tag{72}$$

Но можно еще иначе найти значеніе P, примѣняя сюда выраженіе (51), именно

$$2\mathrm{P} = \int_A^{\frac{\pi}{2}} h d\mathrm{A}$$

или, вставляя значеніе h изъ уравненій (64),

$$4\mathrm{P} = \int_A^{\frac{\pi}{2}} d\mathrm{A} \log \frac{\sin(\mathrm{A}+\omega)}{\sin(\mathrm{A}-\omega)} . \tag{73}$$

Наконецъ основываясь на уравненіи (53), еще можно писать

$$2\mathrm{P} = \int_0 d\omega \log(\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{H}),$$

гдѣ H разсматривается функціей отъ ω; а вставляя значеніе H изъ уравненій (64), получимъ

$$4\mathrm{P} = -\int_0 d\omega \log\left(1 - \frac{\cos \mathrm{A}^2}{\cos \omega^2}\right); \tag{74}$$

то и другое выраженіе для P одинакозо, какъ можно увѣриться дтфференцированіемъ.

Такимъ же образомъ, полагая въ (71) углы ψ и A равными, слѣдовательно и $\alpha = \omega$, находимъ

$$4\mathrm{P} = \sin 2\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{A}d\mathrm{A}}{\sin(\mathrm{A}+\omega)\sin(\mathrm{A}-\omega)} = \mathrm{A} \log \frac{\sin(\mathrm{A}+\omega)}{\sin(\mathrm{A}-\omega)}$$

тоже выраженіе что и (73). Такое значеніе опредѣленнаго интеграла

$$\int_0^A d\psi . r \cos\varphi$$

можно слѣдовательно разсматривать какъ доказанное геометрически и аналитически.

Уравненіе (73), когда ставимъ сюда значеніе A изъ (64), можетъ быть еще представлено

$$\mathrm{P} = \sin 2\omega \int_0 \frac{hdh}{e^{2h} + e^{-2h} - \cos 2\omega} \tag{75}$$

Чрезъ сложеніе и вычитаніе подобныхъ пирамидъ съ параллельными ребрами и которыхъ величину опредѣлили мы выраженіями (73) и (75), можно составить вообще всякую пирамиду. Такъ P въ уравненіи (63) можетъ быть представлено

$$P = P' - P'' + P_1 - P_2 \qquad (76)$$

гдѣ P', P'', P_1 и P_2 трехсторонніе пирамиды, кохорыхъ ребра параллельны высотѣ b пирамиды P. Изъ сихъ пирамидъ у P' основаніе общее съ P, т. е. прямоугольной треугольникъ, котораго катеты a, h, уголъ ω противъ h. Чтобы показать, какіе треугольники служатъ основаніями остальнымъ тремъ пирамидамъ и каково ихъ положеніе, замѣтимъ преждѣ слѣдующія линіи и углы. Въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ катетовъ a, b и гдѣ ψ уголъ противъ b, называемъ c гипотенузу. Въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ катетовъ h, c называемъ, какъ это было выше, r гипотенузу и φ уголъ противъ c (см. ур. 63), γ уголъ противъ h. Параллельная съ b отъ прямого угла между a и h дѣлаетъ съ c уголъ

$$A - \psi = F(c + d) \qquad (77)$$

Линія d происходитъ отъ продолженія c чрезъ вершину пирамиды P и опредѣляется тѣмъ, что отъ конца ея параллельная съ b дѣлается перпендикулярна къ d и, слѣдовательно, къ плоскости треугольника изъ h, c, r. Опускаемъ теперь перпендикулъ g отъ этого конца d на продолженіе r чрезъ вершину пирамиды P и называемъ l отрѣзокъ отъ продолженія r. Такъ произойдутъ прямоугольные треугольники: съ катетами h, $c + d$, который будетъ основаніемъ пирамиды P'' и гдѣ пусть λ уголъ противъ h; съ катетами g, $r + l$ — основаніе пирамиды P_1, наконецъ основаніе пирамиды P_2 съ катетами g, l и гдѣ пусть μ уголъ противъ l. Зависимость угловъ и боковъ въ сихъ треугольникахъ опредѣляется въ дополненіе къ уравненіямъ (64) и (65), съ означеніемъ подобно тому, какъ было выше

$$C = F(c),\ D = F(d),\ G = F(g),\ L = F(l),$$

еще уравненіями

$$\left.\begin{aligned}
&\cos C \cos \psi = \cos A \\
&\cos D \cos \mu = \cos G \\
&\sin C = \sin A \sin B \\
&\operatorname{tang} \mu = \cos L \operatorname{tang} G \\
&\operatorname{tang} \lambda = \cos H \operatorname{tang} (A - \psi) \\
&\sin R = \sin H \sin C \\
&\operatorname{tang} \gamma = \cos H \operatorname{tang} C \\
&\sin D = \operatorname{tang} \gamma \operatorname{tang} \mu
\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

изъ двухъ послѣднихъ находимъ

$$\sin D = \text{tang}\, \mu \cos H \,\text{tang}\, C\ ;$$

замѣтимъ, что (77) даетъ

$$\sin D = \frac{\sin (A - \psi)\ \sin C}{1 - \cos (A - \psi)\ \cos C}\ ,$$

$$\cos D = \frac{\cos (A - \psi) - \cos C}{1 - \cos (A - \psi) \cos C}\ ,$$

куда вставляя $\cos C$ изъ перваго уравненій (78),

$$\sin D = \frac{\sin C \cos \psi}{\sin A}\ ; \quad \cos D = \frac{\sin \psi}{\sin A}\ .$$

Послѣ чего

$$\text{tang}\, \mu = \frac{\cot A}{\cos H}\ ;$$

сравнивая съ значеніемъ $\text{tang}\, \omega$ въ уравненіяхъ (64), заключаемъ

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \omega.$$

Уравненіе (68) и второе уравненіе изъ (78) даютъ

$$\sin \alpha = \cos G\ ,$$

слѣдовательно

$$G = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Вставля сіи значенія въ уравненія (78), получимъ

$$\left.\begin{aligned} \cos C \cos \psi &= \cos A \\ \sin C &= \sin A \sin B \\ \cos L &= \cot \omega \,\text{tang}\, \alpha \\ \text{tang}\, \lambda &= \cos H \,\text{tang}\, (A - \psi) \\ \sin R &= \sin H \sin A \sin B \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

если къ тому полагаемъ

$$h' = r + l$$

то, примѣняя сюда уравненіе (75), находимъ.

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{P}' &= \sin 2\omega \int \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega} \\
\mathrm{P}'' &= \sin 2\lambda \int \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\lambda} \\
\mathrm{P}_1 &= \sin(2\omega - 2\lambda) \int \frac{h'\,dh'}{e^{2h'} + e^{-2h'} + 2\cos(2\omega - 2\lambda)} \\
\mathrm{P}_2 &= \sin 2\omega \int \frac{l\,dl}{e^{2l} + e^{-2l} + 2\cos 2\omega}
\end{aligned}\right\} \quad (80)$$

гдѣ всѣ интегралы начинаются отъ нуля. Или, употребля выраженіе (73) для подобныхъ пирамидъ,

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{P}' &= \int_{\mathrm{A}}^{\frac{\pi}{2}} d\mathrm{A} \log \frac{\sin(\mathrm{A} + \omega)}{\sin(\mathrm{A} - \omega)} \\
\mathrm{P}'' &= \int_{\mathrm{A}-\psi}^{\frac{\pi}{2}} d\mathrm{A} \log \frac{\sin(\mathrm{A} + \lambda)}{\sin(\mathrm{A} - \lambda)} \\
\mathrm{P}_1 &= \int_{0}^{\alpha} d\alpha \log \frac{\sin(\alpha + \omega - \lambda)}{\sin(\alpha - \omega + \lambda)} \\
\mathrm{P}_2 &= \int_{0}^{\alpha} d\alpha \log \frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin(\omega - \alpha)}
\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Въ сихъ значеніяхъ (80) и (81) пирамидъ можно перемѣнять h, ω на b, ψ, и обратно, оставляя A и α, для составленія значенія (76), пирамиды P.

Разсматриваемъ еще пирамиду, которой основаніе трапеція изъ линій h, a, h', a', перпендикулярныхъ по порядку другъ къ другу, и которой одно ребро перпендикулярно къ основанію въ точкѣ пересѣченія a съ a', прочія съ нимъ параллельны. Продолжая означать

$$\mathrm{A} = \mathrm{F}(a),\ \mathrm{H} = \mathrm{F}(h),\ \mathrm{A}' = \mathrm{F}(a'),\ \mathrm{H}' = \mathrm{F}(h'),$$

величину такой пирамиды находимъ (51)

$$-\frac{1}{2}\int h\,d\,\mathrm{A}$$

начиная интегралъ отъ $a = o$, и гдѣ надобно поставивши (21)

$$\sin \mathrm{A} \cos \mathrm{H} = \cos \mathrm{A}'$$

разсматривать A и H перемѣняющимися. Если раздѣляемъ эту пирамиду на двѣ трехстороннія плоскостію чрезъ ребро перпендикулярное къ основанію и противоположное ему въ соединеніи h съ h'; называемъ ω уголъ противъ h въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ a, h и сравниваемъ величину четырехсторонней пирамиды съ суммою двухъ трехсторонних (75), то получимъ

$$\int_0 \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} + 2\cos 2\omega} + \int_0 \frac{h'\,dh'}{e^{2h'} + e^{-2h'} + 2\cos 2\omega} =$$

$$\frac{1}{4\sin 2\omega} \int_{\mathrm{A}}^{\frac{\pi}{2}} d\mathrm{A} \log \frac{\sin \mathrm{A} + \cos \mathrm{A}'}{\sin \mathrm{A} - \cos \mathrm{A}'}$$

здѣсь послѣдній интегралъ составляется изъ двухъ

$$2 \int dx \log \operatorname{tang} x - 2 \int dy \log \operatorname{tang} y$$

отъ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{A} - \mathrm{A}'}{2}$ до $x = \frac{\pi - \mathrm{A}'}{2}$; отъ $y = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}'}{2} - \frac{\pi}{4}$ до $y = \frac{\mathrm{A}'}{2}$; но по свойству сихъ интеграловъ можно придать еще такой-же между границами $\frac{\pi - \mathrm{A}'}{2}$ и $\frac{\mathrm{A}'}{2}$, тогда всѣ при соединятся въ одинъ между границами

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{A} - \mathrm{A}'}{2} \text{ и } \frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}'}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Итакъ

$$\int \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega} + \int \frac{h'\,dh'}{e^{2h'} + e^{-2h'} + 2\cos \omega}$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\omega} \int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} \tag{82}$$

отъ $h = o$, . $h' = o$; отъ

$$z = \log \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{A} - \mathrm{A}'}{2} \right)$$

до

$$z = \log \cot \left(\frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}'}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Отношенія между h, h', A, A′ опредѣляются уравненіями

$$\operatorname{tang} \omega = \cos \mathrm{H} \operatorname{tang} \mathrm{A}$$

$$\cot \omega = \cos \mathrm{H}' \operatorname{tang} \mathrm{A}'$$

и еще уравненіемъ [см. (22)]

$$\operatorname{tang} \mathrm{H}' = \sin \mathrm{H} \operatorname{tang} \mathrm{A}$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tang} H' = \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang} H$$

отсюда

$$\cos A' = \cos A \operatorname{tang}\omega \tag{83}$$

$$e^{h'} = \frac{1}{2}\cot\omega\,(e^{h} - e^{-h}) + \sqrt{(\frac{1}{4}\cot\omega^{2}\,(e^{h} - e^{-h})^{2} + 1)}$$

а крайнія значенія для z будутъ $h' - h$ и $h' + h$

для $h = \infty$ находимъ $h' = \infty$, $A = \omega, A' = \frac{\pi}{2} - \omega$. Послѣ чего

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(e^{h} + e^{-h})\,h dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega} = \frac{1}{\sin\omega}\int \frac{z dz}{e^{z} + e^{-z}},$$

гдѣ интегралъ въ отношеніи къ z берется отъ $z = \log\cot\frac{1}{2}\omega$ до $z = \infty$.

Если въ уравненіе (82) вмѣсто h и h' вводимъ A и A', то [см. (73)] получимъ

$$\int_{A}^{\frac{\pi}{2}} dA \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + \int_{A'}^{\frac{\pi}{2}} dA' \log\frac{\cos(A'-\omega)}{\cos(A'+\omega)} = \frac{1}{2}\int \frac{z dz}{e^{z} + e^{-z}}$$

или, полагая $A' = \frac{\pi}{2} - A_1$

$$\int dA \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + \int dA_1 \log\frac{\sin(A_1+\omega)}{\sin(A_1-\omega)} = \frac{1}{2}\int \frac{z dz}{e^{z} + e^{-z}} \tag{85}$$

гдѣ интегралы берутся отъ A до $A = \frac{\pi}{2}$; отъ $A_1 = o$ до [см. (83)]

$$\sin A_1 = \cos A \operatorname{tang}\omega$$

и отъ $z = \log\cot\left(\frac{A + A_1}{2}\right)$ до $z = \log\cot\left(\frac{A - A_1}{2}\right)$.

Надобно замѣнить что въ уравненіи (85) числа, отъ которыхъ берутся логарифмы, принимаются всегда положительными.

Для $A = A_1$ уравненіе (85) дѣлается

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dA \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{z dz}{e^{z} + e^{-z}} \tag{86}$$

Послѣдній интегралъ начинается съ $z = \log\cot\omega$.

Чтобъ показать еще на нѣкоторыхъ примѣрахъ, какъ много теорія опредѣсенныхъ интеграловъ можетъ ожидать отъ введенія новыхъ началъ Геометріи, мы займемся вычисленіемъ по различному способу объема прямыхъ пирамидъ и конусовъ.

Пусть основаніе прямого конуса кругъ, котораго полупоперечникъ r, а центръ служитъ началомъ координатамъ x, y точекъ на окружности. Полагаемъ

$$\mathrm{R} = \mathrm{F}(r)\,,\ \mathrm{X} = \mathrm{F}(x)\,,\ \mathrm{Y} = \mathrm{F}(y)$$

Когда бока параллельны съ осью, то объемъ конуса, какъ мы видѣли (53), будетъ

$$-\pi \log \sin \mathrm{R}$$

и можетъ быть еще выраженъ иначе (51),

$$2\int_{R}^{\frac{\pi}{2}} y\,d\mathrm{X}$$

Вставляя сюда значенія X, Y изъ уравненія круга

$$\sin \mathrm{X}\ \sin \mathrm{Y} = \sin \mathrm{R}$$

и сравнивая два значенія для объема конуса, находимъ

$$\int_{R}^{\frac{\pi}{2}} d\mathrm{X} \log \frac{\sin \mathrm{X} + \sqrt{(\sin \mathrm{X}^2 - \sin \mathrm{R}^2)}}{\sin \mathrm{X} - \sqrt{(\sin \mathrm{X}^2 - \sin \mathrm{R}^2)}} = -\pi \log \sin \mathrm{R}$$

$$\int_{R}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mathrm{Y} \cot \mathrm{Y} \log \cot \frac{1}{2} \mathrm{Y}}{\sqrt{(\sin \mathrm{Y}^2 - \sin \mathrm{R}^2)}} = -\frac{\pi \log \sin \mathrm{R}}{2 \sin \mathrm{R}}$$

Интегрируя по частямъ, первый интегаалъ перемѣнимъ въ

$$\int_{R}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{X} d\mathrm{X} \cos \mathrm{X}}{\sqrt{(\sin \mathrm{X}^2 - \sin \mathrm{R}^2)}} = \frac{\pi}{2} \log (1 + \cos \mathrm{R})$$

какъ и Лежандръ нашелъ два эти послѣдніе интеграла (Suppl. aux Exercices de calcul integral. T. I).

Если высота конуса не безконечная, то въ пирамидѣ, которой высота h таже что и конуса и которой основаніемъ служитъ треугольникъ изъ x, y, означаемъ c, q линіи отъ вершины до конца y на окружности и до другаго конца y на оси x; ω уголъ q съ h; φ уголъ c съ h, θ уголъ c съ q. Далѣе

подъ C, Q, H разумѣемъ углы F(c), F(q), F(h). Такая пирамида дана уравненіемъ (61), которое въ настоящемъ случаѣ дѣлается

$$d^3\,\mathrm{P} = \frac{1}{4}\,d\omega\,d\theta\,dc\cos\theta(e^c - e^{-c})^2.$$

Интегрируя въ отношеніи къ c отъ $c = o$, получимъ

$$4d^2\,\mathrm{P} = d\omega\,d\theta\cos\theta\left(\frac{2\cos\mathrm{C}}{\sin\mathrm{C}^2} - \log\frac{1+\cos\mathrm{C}}{1-\cos\mathrm{C}}\right).$$

Ставимъ сюда

$$\cos\theta\cos\mathrm{C} = \cos\mathrm{Q}$$

и интегрируемъ въ отношеніи къ θ отъ $\theta = o$,

$$4d\mathrm{P} = d\omega\left(\frac{2y}{\sin\mathrm{Q}} - 2\sin\theta\log\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\right);$$

накопяцъ ставя

$$\sin\mathrm{Q} = \sin\mathrm{H}\sin\mathrm{X},$$

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\mathrm{H}\cos\mathrm{X},$$

$$\operatorname{tang}\theta = \cos\mathrm{Y}\operatorname{tang}\mathrm{Q},$$

получимъ

$$2d\mathrm{P} = -\frac{\cos\mathrm{H}y\,d\mathrm{X}}{1-\sin\mathrm{H}^2\sin\mathrm{X}^2} + \sin\mathrm{H}^2\cos\mathrm{H}\frac{c.\cos\mathrm{Y}\sin\mathrm{X}^2\,d\mathrm{X}}{\cos\mathrm{C}(1-\sin\mathrm{H}^2\sin\mathrm{X}^2)}; \quad (87)$$

для $h = \infty$, слѣдовательно и $\mathrm{H} = o$, находимъ снова выраженія (51) элемента въ пирамидѣ съ параллельными ребрами.

Интегрированіе уравненія (87) въ отношеніи къ X даетъ конусъ, гдѣ высота стоитъ въ началѣ координатъ x, y и гдѣ основаніе ограничено линіей, которая опредѣляется уравненіемъ между X и Y. Напримѣръ, когда основаніе кругъ, то c и r постоянны,

$$\sin\mathrm{X}\sin\mathrm{Y} = \sin\mathrm{R}.$$

Въ такомъ случаѣ распространяя интегралъ на все основаніе конуса и сличая съ значеніемъ, какое было найдено прежде (55), замѣтивъ къ тому что здѣсь

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}}\cos\mathrm{Y}\,d\mathrm{X} = \frac{\pi}{2}(1-\sin\mathrm{A}),$$

послѣ всѣхъ приведеній заключаемъ

$$\int_{R}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dY.\ \sin Y \cos Y \log \cot \frac{1}{2} Y}{(\sin Y^2 - \sin C^2)\sqrt{(\sin Y^2 - \sin R^2)}} = \frac{\pi \log (\cot \frac{1}{2} C.\ \mathrm{tang} \frac{1}{2} H)}{2 \sin R \cos H},$$

гдѣ $\sin C = \sin H \sin R$. Изъ этого интеграла слѣдуютъ всѣ тѣ, къ которымъ Г Лежандръ приходитъ помощію эллиптическихъ функцій (Exercices de calcul integral, supp. à la 1-e partie, par Legendre).

Если основаніе пирамиды трапеція, которая составляется, когда отъ вершины y опускается перпендикулъ на ось y и здѣсь отрѣзываетъ къ началу координатъ линію a, то полагая $A = F(a)$, надобно ставить [см. ур. (21)]

$$\sin X \cos Y = \cos A,$$

и тогда уравненіе (87) сдѣлается

$$2P = \cos H \cos A \int_{Y}^{A} \frac{dY \sin Y \cos Y \log \cot \frac{1}{2} Y}{(\cos Y^2 - \sin H^2 \cos A^2)\sqrt{(\cos Y^2 - \cos A^2)}}$$

$$- \cos H \sin H^2 \int \frac{dC.\ \sin C \log \cot \frac{1}{2} C}{\cos C^2 - \sin H^2 \cos A^2}. \qquad (89)$$

Послѣдній интегралъ берется отъ $\sin C = \sin A \sin H$ до $\sin C = \sin H \cos A \,\mathrm{tang}\, Y$. Пирамида P происходитъ въ такомъ случаѣ изъ соединенія двухъ трехсторонихъ прямыхъ, изъ которыхъ величина каждой можетъ быть выражена, какъ мы видѣли, суммою интеграловъ такого вида [см. (76) и (80)]

$$\int_{0}^{\cdot} \frac{h dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2 \cos 2\omega}.$$

гдѣ ω постоянный уголъ.

Сравненіе интегралов̀ъ и найденные внсвь опредѣленные интегралы.

Слѣдующіе двойные интегралы заслуживаютъ вниманіе (46)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin\psi \sqrt{(1-\alpha^2 \sin\psi^2 \sin\varphi^2)}}{1-\alpha^2 \sin\psi^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{(1-\alpha^2)}}, \tag{90}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \cos\psi \sqrt{(1-\alpha^2 \sin\psi^2 \sin\varphi^2)}}{1-\alpha^2 \sin\psi^2} = \mathrm{H}(\alpha). \tag{91}$$

Буква H означаетъ эллиптическую функцію, именно

$$\mathrm{H}(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha^2 \sin\varphi^2)}}.$$

Если беремъ другую эллиптическую функцію

$$\mathrm{E}(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{(1-a^2 \sin\varphi^2)},$$

то два интеграла (90) и (91) придставляютъ свойство сихъ двухъ эллиптическихъ функцій:

$$\frac{\pi a}{2\sqrt{(1-a^2)}} = \int_0^a \frac{x dx\, \mathrm{E}(a)}{(1-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$x\,\mathrm{H}(x) = \int_0 \frac{dx\, \mathrm{E}(x)}{1-x^2}.$$

Изъ уравненій (90) и (91) еще слѣдуетъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin a \sin\psi}{\sqrt{(1-\sin a^2 \sin\psi^2 \sin\varphi^2)}} = \frac{\pi a}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \log\left(\frac{1+\sin a \sin\varphi}{1-\sin a \sin\varphi}\right) = \pi a,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x + e^{-x})\, x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2\cos 2a} = \frac{\pi a}{4 \sin a}. \tag{92}$$

Этотъ интегралъ былъ извѣстенъ до сихъ поръ только для $a = \frac{\pi}{2}$. Справедливость его можно доказать и для числа > 1 вмѣсто $\cos 2a$. Тогда онъ сдѣлается

$$\int_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x})\, x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + e^{2a} + e^{-2a}} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{e^a - e^{-a}}$$

или, что все равно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{e^{a-x} + e^{-a+x}} = \frac{\pi}{2} a.$$

Этотъ интегралъ можетъ быть еще представленъ, слѣдуя нашему означенію,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx \sin \mathrm{F}(x - a) = \pi a.$$

Дифференцируя въ отношеніи къ a, находимъ для цѣлаго числа i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx \sin (2i + 1)\, \mathrm{F}(x - a) = \pi a\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx \sin 2i\, \mathrm{F}(x - a) = 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2i - 1}\right).$$

Полагая здѣсь $a = o$ и $\mathrm{F}(x) = \varphi$, получимъ

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \sin 2i\varphi \log \cot \tfrac{1}{2}\varphi = 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2i - 1}\right).$$

Мы видѣли (84), что

$$\int_0^\infty \frac{(e^x + e^{-x})\, x dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = \frac{1}{2 \sin \omega} \int d\omega \log \cot \tfrac{1}{2}\omega; \qquad (93)$$

соединяя этотъ интегралъ съ (92), поставя сюда $\frac{\pi}{2} - \omega$ вмѣсто ω, получимъ

$$\int_0^\infty \frac{e^x .\, x dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = \frac{\pi(\pi - 2\omega)}{16 .\cos \omega} + \frac{1}{4 \sin \omega} \int d\omega \log \cot \tfrac{1}{2}\omega,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} .\, x dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = -\frac{\pi(\pi - 2\omega)}{16 \cos \omega} + \frac{1}{4 \sin \omega} \int d\omega \log \cot \tfrac{1}{2}\omega.$$

Два опредѣленные интеграла, которыхъ значенія мы теперь дали, могутъ быть представлены еще помощію интеграла

$$\int_0 \frac{x dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos \omega},$$

который будемъ означать для краткости

$$\mathbf{L}(x, \omega),$$

когда онъ берется отъ $x = o$, и просто будемъ писать

$$\mathbf{L}(\omega),$$

когда $x = \infty$. Этому интегралу во первыхъ принадлежитъ то свойство, что

$$\mathbf{L}(\omega) - \mathbf{L}(\pi - \omega) = \cos\omega\, \mathbf{L}(2\omega),$$
$$\mathbf{L}(x, \omega) - \mathbf{L}(x, \pi - \omega) = \cos\omega\, \mathbf{L}(2x, 2\omega).$$

Уравненіе (93) даетъ еще

$$\mathbf{L}(\omega) + \mathbf{L}(\pi - \omega) = \frac{1}{4\sin\omega} \int_0 d\omega\, \log\cot\tfrac{1}{2}\omega.$$

Отъ интеграловъ $\mathbf{L}(x, \omega)$ зависитъ много другихъ. Такъ [см. (64), (73), (74), (75)]

$$\int_0 d\xi\, \log\frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} = \sin 2\omega.\, \mathbf{L}(x, 2\omega), \tag{94}$$

$$\int_0 d\omega \log\frac{\cos\omega^2}{\cos(\omega + \xi)\cos(\omega - \xi)} = \sin 2\omega\, \mathbf{L}(x, 2\omega),$$

гдѣ

$$x = \log\frac{\cos(\breve{\xi} - \omega)}{\cos(\breve{\xi} + \omega)}.$$

Изъ спхъ двухъ интеграловъ видно, что $\mathbf{L}(x, 2\omega)$ зависитъ также отъ интеграла болѣе простого

$$-\int_0 dx \log\cos x = \Phi(x),$$

именно

$$\sin 2\omega\, \mathbf{L}(x, 2\omega) = \Phi(\omega + \xi) + \Phi(\omega - \xi) - 2\Phi(\omega), \tag{95}$$

гдѣ

$$\operatorname{tang}\breve{\xi} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\cot\omega.$$

Интегралъ (94) даетъ еще такой

$$\int_0 \frac{\xi d\xi}{\cos(\xi + \omega)\cos(\xi - \omega)} = \frac{\breve{\xi}}{\sin 2\omega} \log\frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} - \mathbf{L}(x, 2\omega).$$

Лежандръ разсматривалъ такого рода интегралъ (Exercices de calcul integral, T. II page 217), и для $\xi = \frac{\pi}{2}$ находитъ строку въ спнусахъ кратной дуги ω; но какъ такою строкою можетъ быть представлена $\Phi(\omega)$, то выраженіе (95) подаетъ средство къ подобному разложенію и для всякаго ξ.

Изъ уравненій (64), (65), (67), (76), (79) и (80), послѣ всѣхъ приведеній, находимъ

$$\sin 2\beta \cos\alpha \cos\omega \int_{\xi}^{\alpha} \frac{d\xi \sin\xi \log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)\sqrt{(\sin\alpha^2 - \sin\xi^2)}}$$

$$= 2 \operatorname{Arc.tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\alpha \cos\xi \cos\eta}{\sin\beta\cos\omega}\right) \log\cot\tfrac{1}{2}\beta$$

$$+ \sin 2\omega\, \mathbf{L}(2x, 2\omega) - \sin(2\omega - 2\lambda)\, \mathbf{L}(2x, 2\omega - 2\lambda)$$

$$+ \sin 2\lambda\, \mathbf{L}(2y, \pi - 2\lambda) - \sin 2\omega\, \mathbf{L}(2y - 2x, \pi - 2\omega), \qquad (97)$$

гдѣ

$$\sin\omega = \operatorname{tang}\alpha \cot\beta\,;\ \sin\eta = \cot\alpha \operatorname{tang}\xi,$$

$$\cot\lambda = \frac{\operatorname{tang}\beta\cos\omega}{\sin\xi}(\operatorname{tang}\eta + \operatorname{tang}\alpha\sin\xi),$$

$$x = \log\cot\tfrac{1}{2}\beta\,;\ y = \log(\cot\tfrac{1}{2}\eta\ \cot\tfrac{1}{2}\beta).$$

Можно присоединить еще сюда уравненіе

$$\cot(\omega - \lambda) = \frac{\sin\beta^2}{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\xi\cos\eta)} - \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\beta}.$$

Еще иначе представляется значеніе того же интеграла

$$\sin 2\beta \cos\alpha \cos\omega \int_{\xi}^{\alpha} \frac{d\xi \sin\xi \log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)\sqrt{(\sin\alpha^2 - \sin\xi^2)}}$$

$$= 2\ \operatorname{Arc.tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\alpha\cos\xi\cos\eta}{\sin\beta\cos\omega}\right) \log\cot\tfrac{1}{2}\beta$$

$$+ \sin 2\psi\, \mathbf{L}(2x', 2\psi) - \sin 2\lambda'\, \mathbf{L}(2x', 2\lambda')$$
$$+ \sin(2\psi - 2\lambda')\, \mathbf{L}(2y', \pi - 2\psi + 2\lambda')$$
$$- \sin^2\psi\, \mathbf{L}(2y' - 2x', 2\psi),$$

гдѣ

$$2x' = \log\left(\frac{1 + \cos\xi\cos\eta}{1 - \cos\xi\cos\eta}\right),$$

$$2y' - 2x' = \log\left(\frac{\cos\xi + \cos\beta}{\cos\xi - \cos\beta}\right),$$

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\alpha.\frac{\cos\xi\cos\eta}{\sin\beta\cos\omega},$$

$$\operatorname{tang}\lambda' = \cos\omega\cos\alpha.$$

Подобнымъ образомъ уравненія (70) и (79) даютъ

$$2\cos\omega\sin\nu(\sin\beta^2-\sin\omega^2)\int_0\frac{\alpha d\alpha\sin\alpha}{(\sin\omega^2-\sin\alpha^2)\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)}$$

$$=2\alpha(h'-l)-2h\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)-\sin 2\omega\,\mathrm{L}(2h,2\omega)$$

$$+\sin 2\lambda\,\mathrm{L}(2h,2\lambda)-\sin(2\omega-2\lambda)\,\mathrm{L}(2h',\pi-2\omega+2\lambda)$$

$$+\sin 2\omega\,\mathrm{L}(2l,\pi-\omega), \tag{98}$$

гдѣ

$$2h'=2l+\log\frac{\cos\omega\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)+\cos\alpha\nu(\sin\beta^2-\sin\omega^2)}{\cos\omega\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)-\cos\alpha\nu(\sin\beta^2-\sin\omega^2)},$$

$$2l=\log\frac{\sin(\omega+\alpha)}{\sin(\omega-\alpha)},$$

$$2h=\log\frac{\cos\omega+\nu(\sin\beta^2-\sin\omega^2)}{\cos\omega-\nu(\sin\beta^2-\sin\omega^2)},$$

$$\cot(\omega-\lambda)=\operatorname{tang}\omega\cot\beta^2+\frac{\nu(\sin\beta^2-\sin\omega^2)\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)}{\sin\alpha\cos\omega\sin\beta^2}.$$

Наконецъ уравненія (71) и (76), съ перемѣною въ послѣднемъ ω, h, ψ на ψ, b, ω, даютъ

$$2\sin\alpha\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)\int_{\psi}^{\beta}\frac{\psi d\psi\cos\psi}{(\sin\psi^2-\sin\alpha^2)\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}$$

$$=\psi\log\left\{\frac{\sin\psi\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)+\sin\alpha\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}{\sin\psi\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)-\sin\alpha\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}\right\}$$

$$+\sin 2\psi\,\mathrm{L}(2b,2\psi)-\sin 2\lambda\,\mathrm{L}(2b,2\lambda)$$

$$-\sin(2\psi-2\lambda)\,\mathrm{L}(2h',\pi-2\psi+2\lambda)-\sin 2\psi\,\mathrm{L}(2l,\pi-2\psi),$$

гдѣ

$$h'=2l+\log\left\{\frac{\cos\psi\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)+\cos\alpha\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}{\cos\psi\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)-\cos\alpha\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}\right\},$$

$$2l=\log\left\{\frac{\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)+\cos\alpha}{\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)-\cos\alpha}\right\},$$

$$2b=\log\left\{\frac{\cos\psi+\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}{\cos\psi-\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}\right\},$$

$$\cot(\psi-\lambda)=\operatorname{tang}\psi\cot\beta^2+\frac{\nu(\sin\beta^2-\sin\alpha^2)\,\nu(\sin\beta^2-\sin\psi^2)}{\sin\alpha\cos\psi\sin\beta^2}.$$

Интегралы (97), (98), (99), какъ неопредѣленные, могутъ служить для интегрированія во всѣхъ случаяхъ съ обращеніемъ, если нужно, воображаемыхъ въ дѣйствительные. Они также могутъ быть приведены одинъ къ другому. Ихъ зависимость открывается въ сравненіи значеній пирамиды (67), (70), (71). Такъ

$$\int_0^{\xi} \frac{d\,\xi \sin\xi \log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)\sqrt{(\sin\alpha^2 - \sin\xi^2)}} =$$

$$\frac{\sin\alpha^2 - \sin\xi^2}{\sin\alpha\cos\alpha^2\,(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)} \int_{\psi}^{b} \frac{\psi\, d\,\psi\cos\psi}{(\sin\psi^2 - \sin\alpha^2)\sqrt{(\sin b^2 - \sin\psi^3)}}\,, \qquad (100)$$

гдѣ

$$\sin b = \frac{\sin\beta\sin\psi}{\sin\alpha}\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{\cos\beta\sin\dot{\psi}}{\cos\alpha}\,,$$

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{(\sin\alpha^2 - \sin\xi^2)}}{\sqrt{(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)}}\,,$$

разсматривая a, b постоянными, ψ одно перемѣняющимся въ интегралѣ. Другое сравненіе даетъ

$$\int_{\psi}^{\alpha} \frac{\psi d\psi\cos\psi}{(\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\sqrt{(\sin\alpha^2 - \sin\psi^2)}}$$

$$= \psi\log\frac{\sin(\mathrm{A}+\omega)}{\sin(\mathrm{A}-\omega)} - \omega\log\frac{\sin(\mathrm{A}+\psi)}{\sin(\mathrm{A}-\psi)}$$

$$+ \varphi\log\frac{\cos\omega\cos\psi + \cos\mathrm{A}\cos\varphi}{\cos\omega\cos\psi - \cos\mathrm{A}\cos\varphi}$$

$$+ \cot\mathrm{A}\sin 2\psi \int_0^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi\sin\varphi}{(\sin\psi^2 - \sin\varphi^2)\sqrt{(\sin\alpha^2 - \sin\varphi^2)}}\,, \qquad (101)$$

гдѣ $\sin\mathrm{A} = \frac{\sin\psi}{\sin\alpha}$; $\sin\varphi = \sin\alpha\sin\omega$; прочія величины не зависятъ другъ отъ друга, и гдѣ интегрированіе въ отношеніи ψ предполагаетъ φ постояннымъ, какъ и обратно.

Помощію геометрическаго разсмотрѣнія нашли мы (88), что

$$\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi \sin\xi \cos\xi \log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin\xi^2 - \sin a^2)\sqrt{(\sin\xi^2 - \sin b^2)}} = \frac{\pi \log(\cot\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}c)}{2\sin b\cos c} \qquad (102)$$

гдѣ

$$\sin a = \sin b \sin c.$$

Можно придти къ этому интегралу разсматривая двойной

$$\int\int \frac{dp\, d\varphi \sin\varphi^2}{(1 - p^2\sin\varphi^2)\ (1 - \mathrm{n}^2\sin\varphi^2)}$$

отъ $p = o$ и отъ $\varphi = o$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$; а послѣ интегрированія, въ томъ и другомъ порядкѣ, полагая

$$\sin\varphi = \frac{\cos\xi}{\cos b};\ \ p = \cos b;\ \ \mathrm{n} = \frac{\cos b}{\cos a}.$$

Такимъ же образомъ можно найти значеніе опредѣленнаго интеграла (102), когда въ знаменателѣ вмѣсто $\sin\xi^2 - \sin a^2$ будетъ вообще полиномъ съ четными степенями $\sin\xi$.

Въ интегралѣ (102) полагая

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{(\sin\xi^2 - \sin b^2)}}{\sin b\cos c};\ \ \sin\gamma = \frac{\cos b}{\cos a},$$

потомъ интегрируя по частямъ, находимъ

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi\, d\varphi \sin\varphi}{(1 - \sin c^2\sin\varphi^2)\sqrt{(\sin\gamma^2 - \sin\varphi^2)}} = \frac{\pi \log\left\{\dfrac{\cos c + \sqrt{(1 - \sin\gamma^2\sin c^2)}}{2\cos\alpha\ \cos\frac{1}{2}c^2}\right\}}{2\cos c\sqrt{(1 - \sin\gamma^2\sin c^2)}} \qquad (103)$$

другой интегралъ болѣе общій, нежели найденный Лежандромъ (supp. aux Exercices de calcul intégral. T. I).

Если интегралъ (103) разлагаемъ въ строку по степенямъ $\sin c$, то производитель при $\sin c$ съ показателемъ n цѣлымъ положительнымъ числомъ будетъ

$$< \frac{\pi}{2}\sin\gamma^n \log\frac{1}{\cos\gamma}$$

слѣдовательно строка остается спреведливой и тогда, когда вмѣсто $\sin c$ ставимъ $\frac{1}{\sin c}$, предполагая при томъ $\sin c > \sin \gamma$. Такъ получимъ, переходя отъ воображаемыхъ къ дѣйствительнымъ,

$$\int_{\lambda}^{\gamma} \frac{\varphi d\varphi \sin \varphi}{(\sin c^2 - \sin \varphi^2)\sqrt{(\sin \gamma^2 - \sin \varphi^2)}} = \frac{\pi \left[c - \text{arc cos} \left(\frac{\cos c}{\cos \gamma} \right) \right]}{2 \cos c \sqrt{(\sin c^2 - \sin \gamma^2)}} \qquad (104)$$

Для $c = \frac{\pi}{2}$ то и другое выраженіе интеграла даетъ

$$\int_{0}^{\gamma} \frac{\varphi d\varphi \sin \varphi}{\cos \varphi^2 \sqrt{(\sin \gamma^2 - \sin \varphi^2)}} = \frac{\pi \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\cos \gamma^2}$$

Интегралъ (104), когда сюда поставимъ $\frac{\pi}{2} - \varphi$ вмѣсто φ, перемѣнится въ такой

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi d\varphi \cos \varphi}{(\sin \varphi^2 - \sin \beta^2)\sqrt{(\sin \varphi^2 - \sin \alpha^2)}} = \frac{\pi \left\{ \text{arc tang} \frac{\sin \beta \sqrt{(\sin \alpha^2 - \sin \beta^2)}}{\cos \alpha^2 + \cos \beta^2} - \beta \right\}}{2 \sin \beta \sqrt{(\sin \alpha^2 - \cos \beta^2)}}$$

Можно бы умножить подобныя примѣненія къ опредѣленнымъ интеграламъ помощію тѣхъ уравненій, къ которымъ приводятъ исчисленія, основанныя на новыхъ началахъ Геометріи. Особенно должно замѣтить этотъ обширный родъ интеграловъ, который зависитъ единственно отъ познанія одного

$$-\int_{0} dx \log \cos x = \Phi(x)$$

или представляя строкой,

$$\Phi(x) = x \log 2 - \frac{2'}{2^2} \sin 2x + \frac{2}{4^2} \sin 4x - \text{ и т. д.}$$

откуда

$$\Phi(\pi + x) = \Phi(x) + \pi \log 2$$
$$\Phi(\pi - x) + \Phi(x) = \pi \log 2.$$

Особенные случаи:

$$\Phi(o) = o\,, \quad \Phi(\pi) = \pi \log 2\,; \quad \Phi \frac{\pi}{2} \log 2.$$

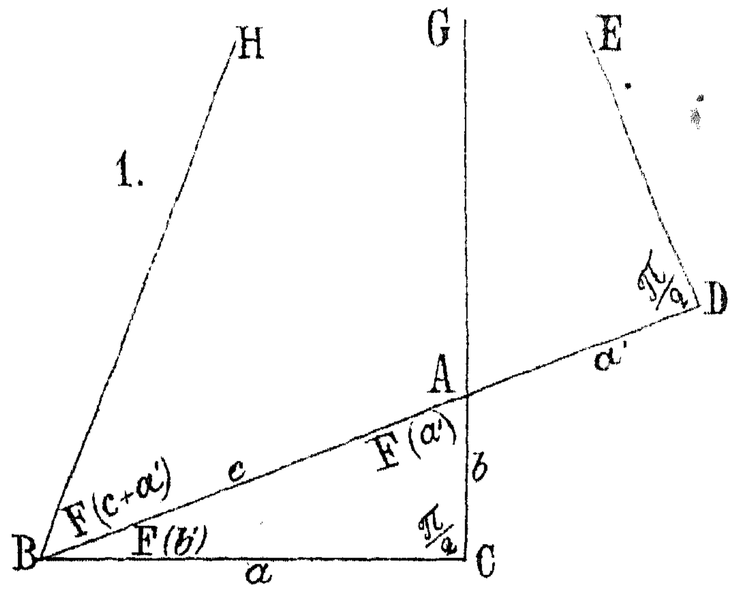
ЗАКЛЮЧЕНІЕ

Послѣ того, какъ мы нашли уравненія (17) которыя представляютъ зависимость угловъ и боковъ треугольника; когда наконецъ дали мы общія выраженія для элементовъ линій, площадей и объема тѣлъ, все прочее въ Геометріи будетъ уже аналитикой, гдѣ исчисленія необходимо должны быть согласны между собою и ничего не въ состояніи открыть намъ новаго, чего бы не заключалось въ тѣхъ первыхъ уравненіяхъ, откуда должны быть взяты всѣ отношенія геометрическихъ величинъ другъ къ другу. Итакъ, если надобно предполагать теперь, что какое нибудь противорѣчіе принудитъ въ послѣдствіи опровергнуть начала, принятыя нами въ этой новой Геометріи; то это противорѣчіе можетъ только скрываться въ самыхъ уравненіяхъ (17). Замѣтимъ однакожъ, что эти уравненія перемѣняются въ (20) сферической Тригонометріи, какъ скоро вмѣсто боковъ a, b, c ставимъ $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; но въ обыкновенной Геометріи и сферической Тригонометріи вездѣ входятъ одни содержанія линій: слѣдовательно обыкновенная Геометрія, Тригонометрія и эта новая Геометрія всегда будутъ согласны между собою.

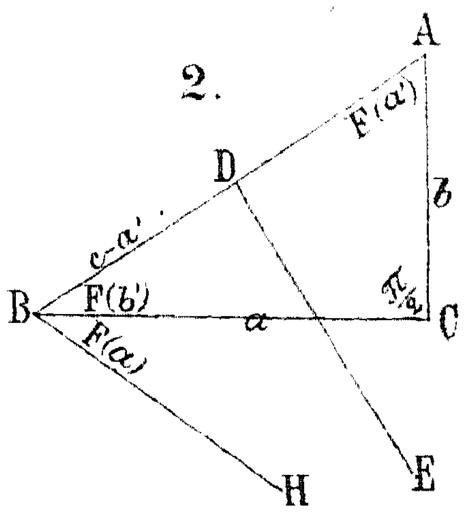
Если теперь аналитика съ новой — назовемъ *воображаемой* Геометріей. въ отличіе отъ *употребительной* — соглашены уже между собою: то можно ожидать отъ той и другой взаимнаго пособія. Это ожиданіе кажется не безъ основанія послѣ того какъ предположивши собственно достигнуть только одной цѣли — дать общія правила для измѣренія всѣхъ геометрическихъ величинъ,—идя прямо къ этой цѣли и дозволивши себѣ мимоходомъ только нѣкоторыя примѣненія, мы были въ состояніи открыть значенія опредѣленныхъ интеграловъ, къ познанію которыхъ одной аналитикѣ, безъ пособія Геометріи, трудно было бы проложить дорогу.

Оставалось бы изслѣдовать, какого рода перемѣна произойдетъ отъ введенія воображаемой Геометріи въ Механику, и не встрѣтится ли здѣсь принятыхъ уже и несомнительныхъ понятій о природѣ вещей, но которыя принудятъ насъ ограничивать, или совсѣмъ не допускать зависимости линій и угловъ. Однакожъ можно предвидѣть, что перемѣны въ Механикѣ при новыхъ началахъ Геометріи будутъ того же рода, какія показалъ Лаплассъ (Mécanique célèste T. I. Liv. I. Ch. II.), предполагая возможной всякую зависимость скорости отъ силы, или—выразимся вѣрнѣе—предполагая силы, измѣряемыя всегда скоростію, подчиненными другому закону въ соединеніи, нежели принятому сложенію ихъ.

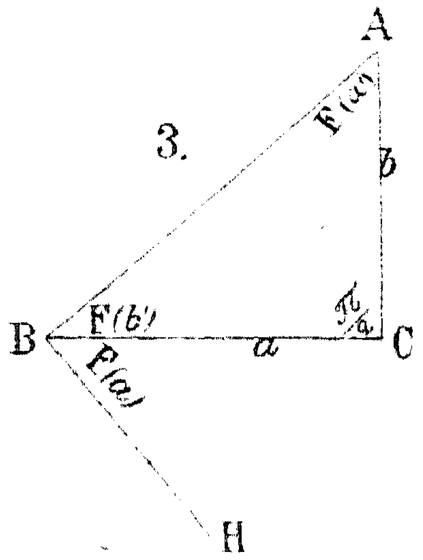
1.


H
G
E
D
A
B
C
F(c+a')
c
F(a')
b
F(b')
a
a'
π/2

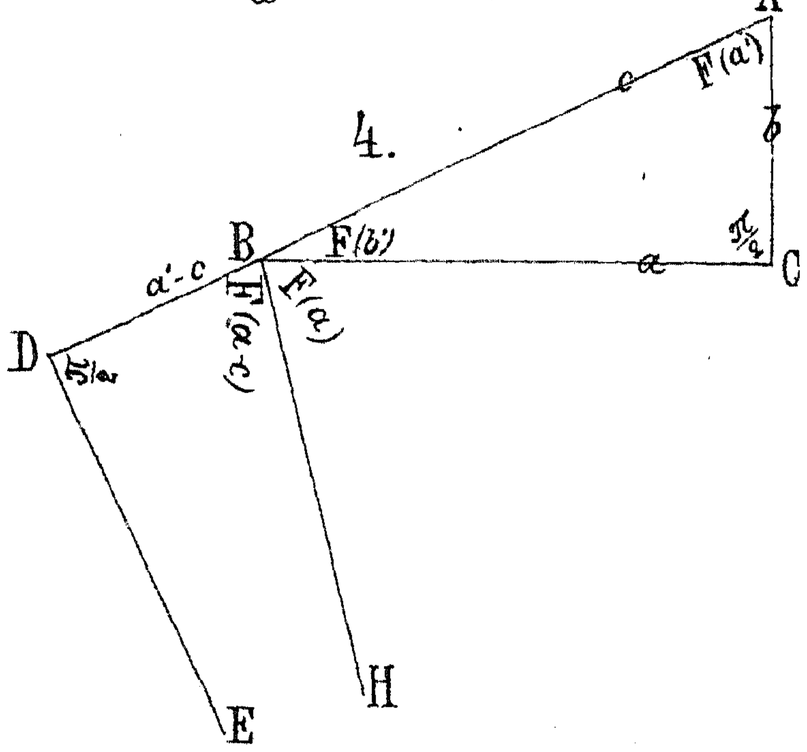
2.


A
D
F(a')
b
c-a'
B
F(b')
a
π/2
C
F(a)
H
E

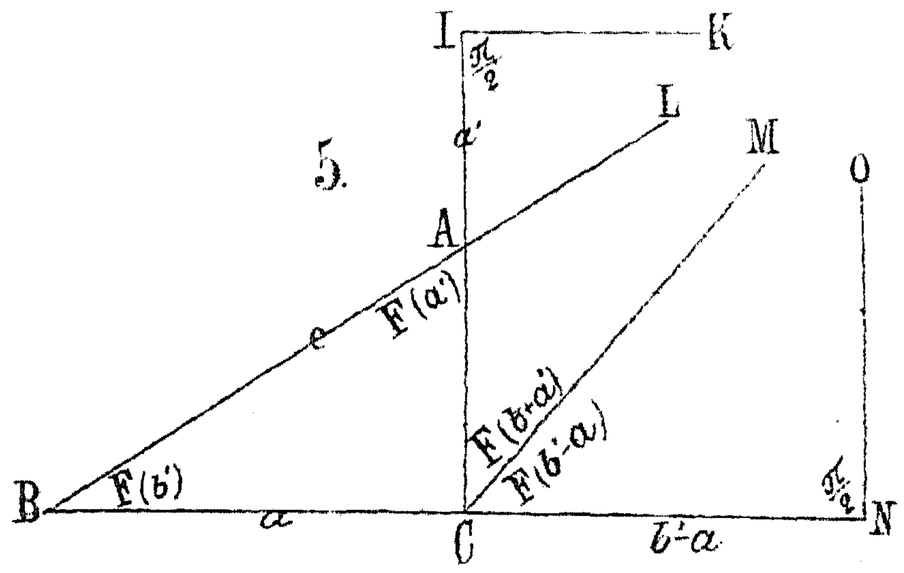
3.


A
F(a')
b
B
F(b')
a
π/2
C
F(a)
H

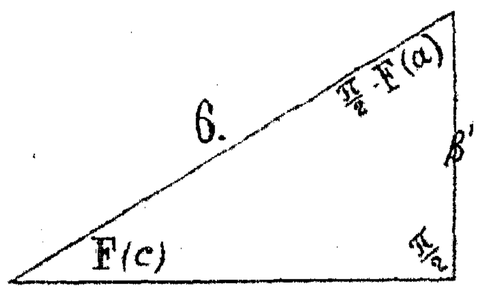
4.


A
c
F(a')
b
B
F(b')
a
π/2
C
a'-c
H
F(a)
(a'-c)
D
π/2-a
E
H

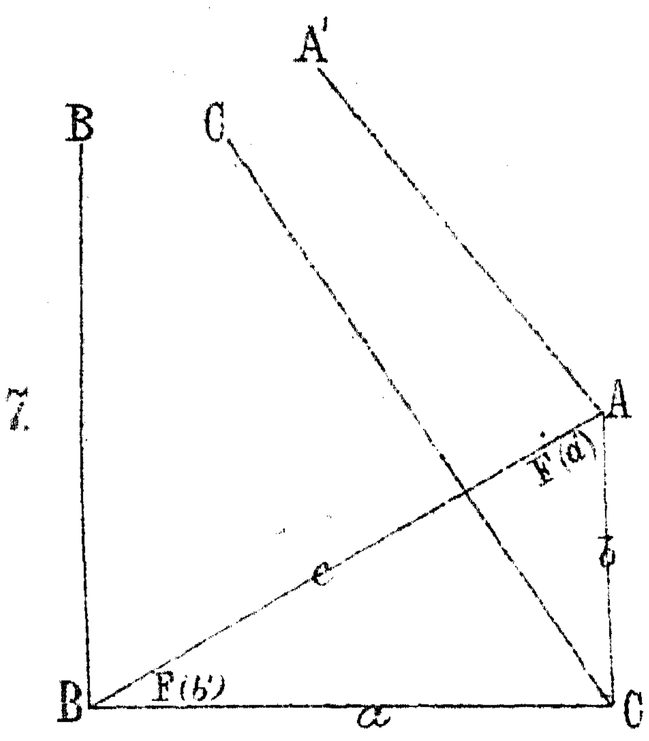
5.


I
K
π/2
a'
L
M
O
A
c
F(a')
F(b-a')
F(b'-a)
B
F(b')
a
C
b'-a
π/2
N

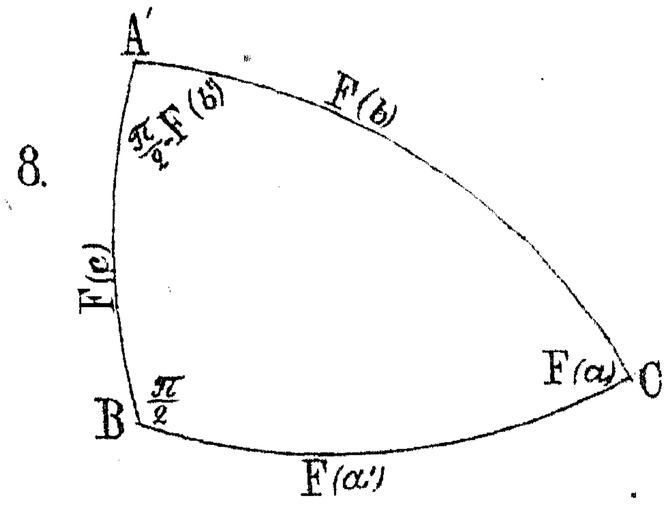
6.


π/2-F(a)
6.
B'
F(c)
π/2

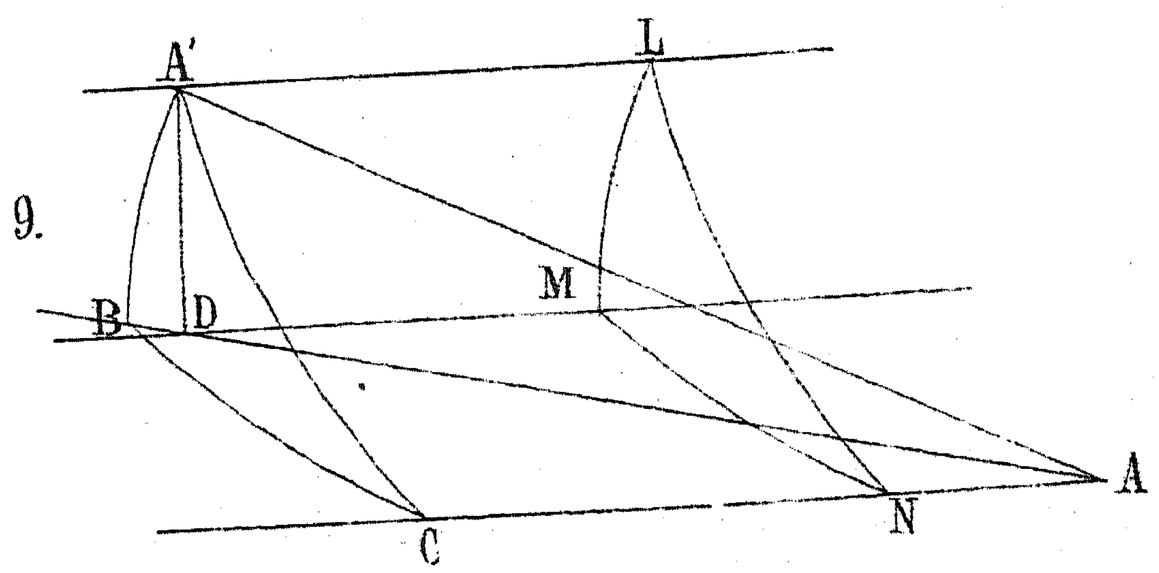
7.


A'
B
C
7.
A
F(a)
b
c
B
F(b')
a
C

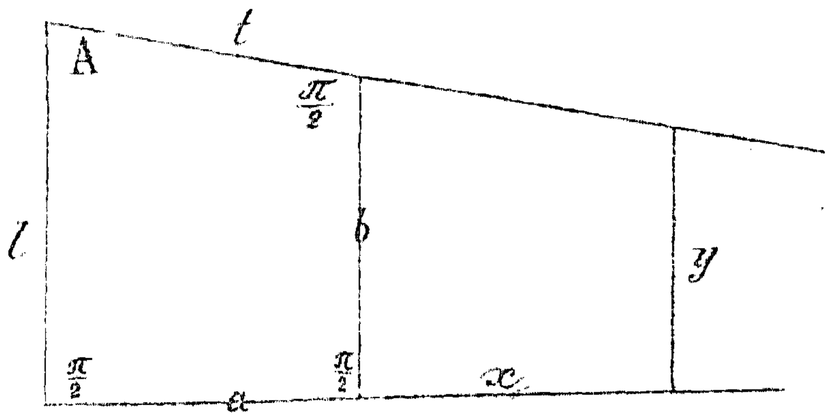
8.


A'
π/2-F(b')
F(b)
F(c)
F(a)
B
π/2
C
F(a')

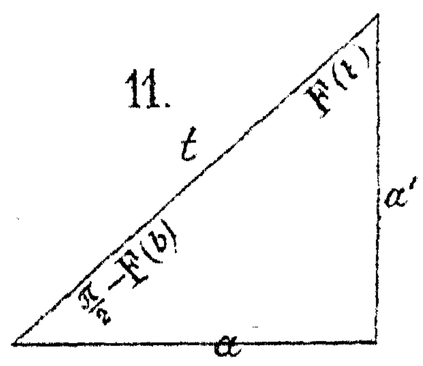
9.


A'
L
B
D
M
A
C
N

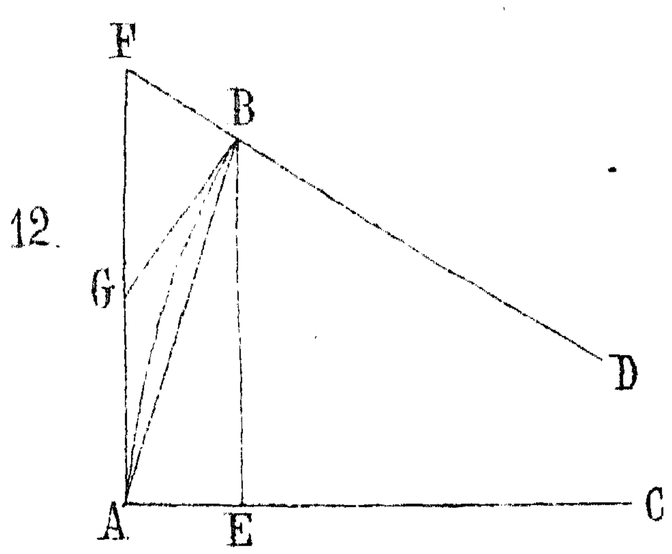
10.



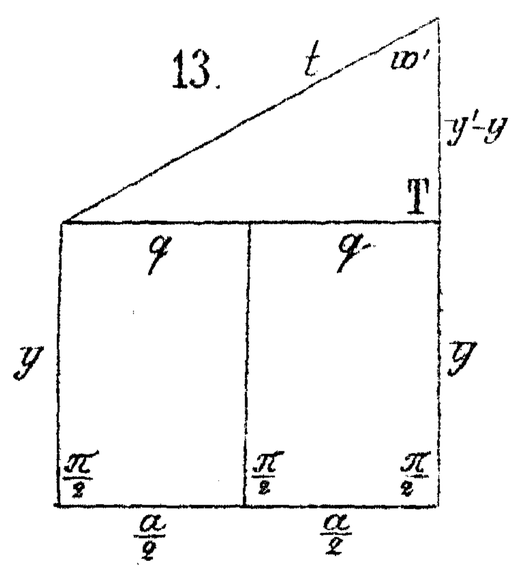
11.



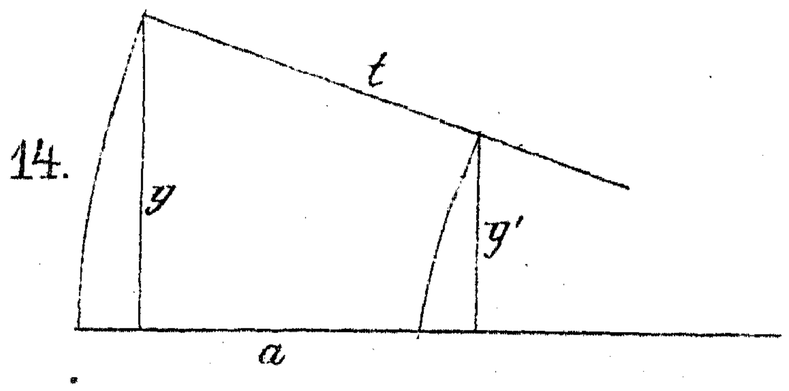
12.



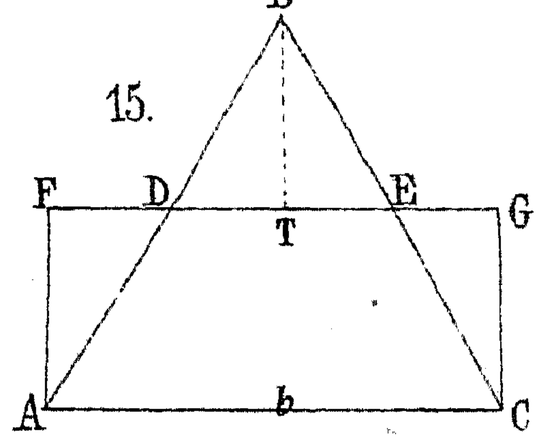
13.



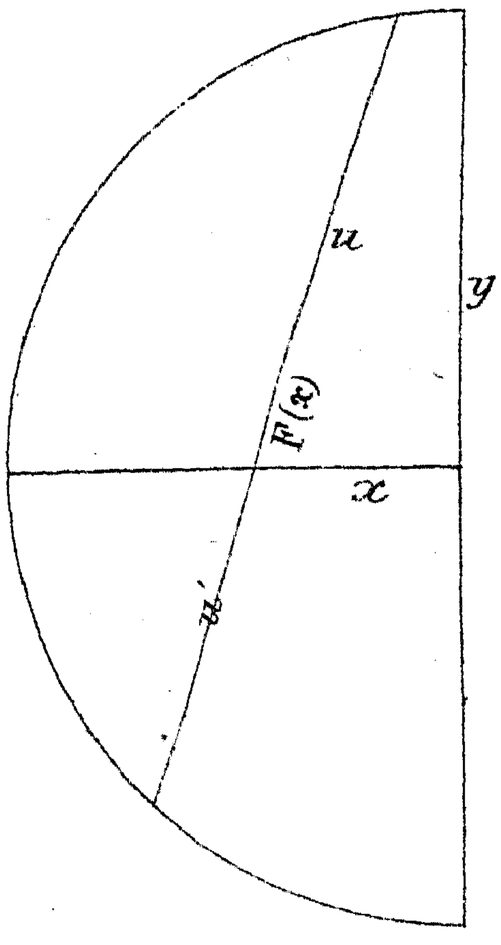
14.



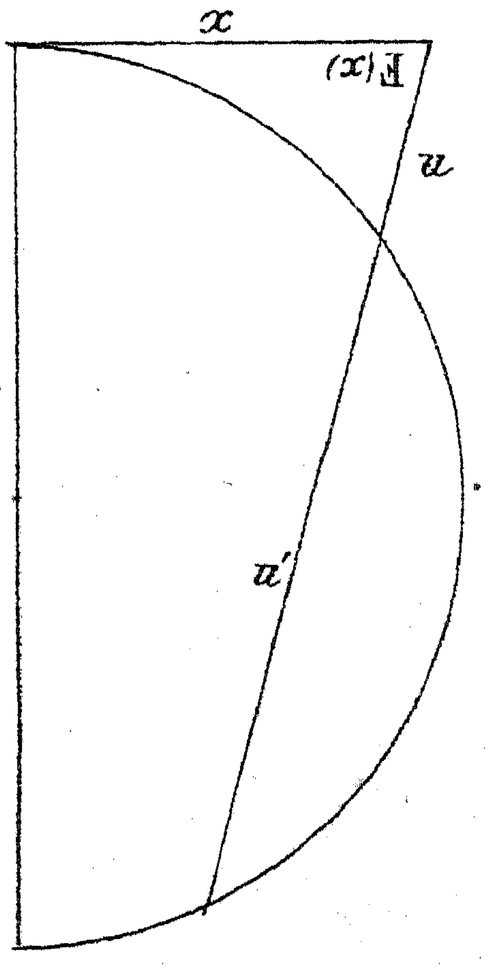
15.



16.



17.



ВООБРАЖАЕМАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ВООБРАЖАЕМАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Предложеніе XII Эвклидовыхъ началъ принято въ Геометріи какъ ощутительная истина, которую строго доказать математически напрасно трудились въ продолженіи двухъ тысячь лѣтъ. Особенно занимался этимъ предметомъ Лежандръ, и въ запискахъ Французской Академіи собралъ все, что по его мнѣнію казалось болѣе удовлетворительнымъ (Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des paralleles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle, par Legendre. Mémoires de l' Acad. roy. d. Sciences de l' Inst. de France, Tome XII, an 1833). Кто ни думалъ найти рѣшеніе затруднительнаго вопроса, всѣ безъ исключенія ошибались, будучи предубѣждены въ справедливости того, что не можетъ еще слѣдовать прямо изъ нашихъ понятій о тѣлахъ безъ пособія наблюденій, какъ я думаю доказалъ это несомнительно въ моемъ сочиненіи, *о началахъ Геометріи.* Изложивъ новую теорію параллельныхъ, я утверждалъ, что сумму угловъ прямолинейнаго треугольника, независимо отъ измѣреній на самомъ дѣлѣ, можно допускать менѣе половины окружности, и на такомъ предположеніи основать другую Геометрію, которую назвалъ я *воображаемой,* и которая, если не существуетъ въ природѣ, по крайней мѣрѣ должна быть принята въ Аналитикѣ. Съ помощію однихъ геометрическихъ построеній выведены были уравненія, которыя представляютъ зависимость боковъ и угловъ прямолинейнаго треугольника; наконецъ даны выраженія для элементовъ линіи, поверхности и объема тѣлъ; а слѣдовательно воображаемая Геометрія, какъ новая отрасль Математическихъ наукъ, обнята была во всей обширности, чтобъ не оставить болѣе сомнѣнія въ справедливыхъ и достаточныхъ ея началахъ. Между тѣмъ въ тѣсныхъ предѣлахъ повременнаго сочиненія, не могъ изложить я моего предмета со всей подробностію. Много предложеній помѣщенныхъ безъ доказательства, одни выводы изъ продолжительныхъ и до-

вольно запутанныхъ вычисленій, заставляютъ меня подозрѣвать, что мое сочиненіе, казавшись съ перваго взгляда темнымъ, предупреждало охоту заняться имъ съ нѣкоторымъ вниманіемъ и даже могло подать поводъ усумниться въ строгости моего сужденія и въ вѣрности выведенныхъ заключеній (*). Эта причина понудила меня искать другого способа увѣриться самому въ истинѣ мной доказаннаго и потомъ осмѣлиться еще разъ представить мои изслѣдованія на судъ ученыхъ. Теперь, оставляя геометрическія построенія и выбирая краткой обратной путь, намѣренъ я показать, что главныя уравненія, которыя нашелъ я для зависимости сторонъ и угловъ треугольника въ воображаемой Геометріи, могутъ быть приняты съ пользою въ Аналитикѣ и никогда не приведутъ къ заключеніямъ ложнымъ, въ какомъ бы то ни было отношеніи.

Пусть e означаетъ основаніе Неперовыхъ логарифмовъ, π содержаніе окружности къ поперечнику, то самое число, которое принято въ употребительной Геометріи. Пусть a' какой нибудь уголъ $\geqq o$, $\leqq \frac{1}{2}\pi$; a число, которое вмѣстѣ представляетъ сравнительно прямую линію, и которое можно найти помощію одного изъ такихъ упраненій

$$\cot.\tfrac{1}{2}a' = e^{a}$$

$$\sin. a' = \frac{2e^{a}}{e^{2a}+1},$$

$$\cos. a' = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1},$$

$$\tang. a' = \frac{2e^{a}}{e^{2a}-1},$$

$$\cot. a' = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a}).$$

Обратно уголъ a' опредѣляется числомъ a, всегда положительнымъ. Вообще надъ буквой, которая представляетъ подобное число, будемъ ставить удареніе,

---

(*) Статьи о началахъ Геометріи помѣщены были въ Казанскомъ Вѣстникѣ за 1829 и 1830 годы. Въ № 41 Журнала Сынъ Отечества 1834 года, напечатана критика, весьма оскорбительная для меня, и надѣюсь, совершенно несправедливая. Рецензентъ основалъ свой отзывъ на томъ только, что онъ моей Теоріи не понялъ и почитаетъ ее ошибочной, потому что въ примѣрахъ встрѣчаетъ одинъ *нелѣпой* интегралъ. Впрочемъ такого интеграла не нахожу я въ моемъ сочиненіи. Въ Ноябрѣ мѣсяцѣ прошедшаго года послалъ я къ издателю отвѣтъ, который однакожъ, не знаю почему, до сихъ поръ, въ продолженіи пяти мѣсяцовъ, еще не напечатанъ.

чтобы означить уголъ въ томъ же отношеніи къ первой, въ какой зависимости предполагаемъ a' съ a.

Въ прямолинейномъ прямоугольномъ треугольникѣ пусть r гипотенуза, p и q катеты, P и Q противоположные имъ углы. Въ предположеніи $P+Q<\frac{1}{2}\pi$, допускаемъ

$$\text{sin. } r' = \text{sin. } p' \text{ sin. } q', \tag{1}$$

$$\text{sin. } r' = \text{tang. } P \text{ tang. } Q, \tag{2}$$

$$\text{tang. } r' = \text{tang. } p' \text{ sin. } P, \tag{3}$$

и посмотримъ, къ какимъ заключеніямъ поведутъ далѣе такія уравненія. Соединеніе перваго съ третьимъ даетъ

$$\text{cos. } r' \text{ sin. } P = \text{cos. } p' \text{ sin } q'.$$

Взявши квадратъ на обѣихъ сторонахъ и поставя сюда sin. p' изъ уравненія (1), находимъ

$$\text{cos. } q' = \text{cos. } r' \text{ cos. } P \tag{4}$$

безъ обоюдности знаковъ при извлеченіи квадратнаго корня, потому что всѣ углы острые.

Исключаемъ r' изъ уравненій (3), (4).

$$\text{tang. } P = \text{cos. } p' \text{ tang. } q'. \tag{5}$$

Тоже дѣлаемъ съ уравненіями (2), (3).

$$\text{sin. } Q = \text{sin. } p' \text{ cos. } P. \tag{6}$$

Изъ уравненій (2), (4) еще находимъ

$$\text{tang. } r' = \text{tang. } q' \text{ sin. } Q$$

Это послѣднее уравненіе въ отношеніи къ q', Q тоже, что было (3) для p', P, а слѣдовательно его соединеніе съ первыми двумя (1), (2) должно произвести уравненія подобныя (4), (5), (6), такъ что число ихъ будетъ десять, которыя всѣ въ отношеніи къ частямъ треугольника или составлены симетрически, или безъ различія принадлежатъ тому и другому катету съ противоположными углами.

Пусть вообще a, b, c три стороны прямолинейнаго треугольника; A, B, C противъ нихъ углы. Полагаемъ напередъ $A<\frac{1}{2}\pi$, $B<\frac{1}{2}\pi$ (чер. 1), такъ какъ подобные два угла должны всегда найтись въ треугольникѣ. Изъ общей точки a съ b опускаемъ перпендикулъ x на c, гдѣ онъ отрѣжетъ къ углу A

линію y, къ углу B линію $c - y = z$. Для прямоугольнаго треугольника съ боками b, x, y, основываясь на уравненіи (3), пишемъ

$$\text{tang. } b' = \text{tang. } x' \text{ sin. } A.$$

Для прямоугольнаго треугольника изъ a, x, z такимъ же образомъ

$$\text{tang. } a' = \text{tang. } x' \text{ sin. } B;$$

слѣдовательно

$$\text{tang, } a' \text{ sin. } A = \text{tang. } b' \text{ sin. } B. \qquad (7)$$

Тоже бы нашли, предположивши одинъ изъ угловъ A, B тупой.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ b, x, y, согласно съ уравненіемъ (4),

$$\text{cos. } y' = \text{cos. } b' \text{ cos. } A.$$

Откуда

$$e^{2y} = \frac{1 + \text{cos. } b' \text{ cos. } A}{1 - \text{cos. } b' \text{ cos. } A}.$$

Такимъ же образомъ въ треугольникѣ изъ a, x, z:

$$e^{2x} = \frac{1 + \text{cos. } a' \text{ cos. } B}{1 - \text{cos. } a' \text{ cos. } B}.$$

Потомъ

$$e^{2c} = \frac{1 + \text{cos. } a' \text{ cos. } B}{1 - \text{cos. } a' \text{ cos. } B} \cdot \frac{1 + \text{cos. } b' \text{ cos. } A}{1 - \text{cos. } b' \text{ cos. } A}. \qquad (8)$$

Если одинъ изъ угловъ, напримѣръ A, тупой (чер. 2), то перпендикулъ x упадетъ на продолженіе бока c въ точкѣ, которой разстояніе $'y$ отъ острея A и $z = c + y$ отъ B. Въ такомъ случаѣ

$$\text{cos. } y' = -\text{cos. } b' \text{ cos. } A, \quad \text{cos. } z' = \text{cos. } a' \text{ cos. } B;$$

потомъ

$$e^{2y} = \frac{1 - \text{cos. } b' \text{ cos. } A}{1 + \text{cos. } b' \text{ cos. } A},$$

$$e^{2z} = \frac{1 + \text{cos. } a' \text{ cos. } B}{1 - \text{cos. } a' \text{ cos. } B}.$$

Соединеніе двухъ послѣднихъ уравненій даетъ снова уравненіе (8), которое, слѣдовательно, принадлежитъ вообще всѣмъ треугольникамъ и можетъ быть еще представлено иначе

$$\text{cos. } a' \text{ cos. } B = \frac{(e^{2c} - 1) - (e^{2c} + 1) \text{ cos. } b' \text{ cos. } A}{(e^{2c} + 1) - (e^{2c} - 1) \text{ cos. } b' \text{ cos. } A}$$

или, слѣдуя принятому означенію, напишемъ

$$\text{cos. } a' \text{ cos. } B = \frac{\text{cos. } c' - \text{cos. } b' \text{ cos. } A}{1 - \text{cos. } b' \text{ cos. } c' \text{ cos. } A}. \qquad (9)$$

Возвысивъ къ квадратъ, ставимъ сюда значеніе cos. B. изъ уравненія (7)

$$\cos.\ a'^2 - \sin.\ a'^2 \sin.\ A^2 \cot.\ b'^2 = \left\{\frac{\cos.\ c' - \cos.\ b' \cos.\ A}{1 - \cos.\ b' \cos.\ c' \cos.\ A}\right\}^2.$$

Откуда находимъ

$$\sin.\ a'^2\ (1 + \sin.\ A^2 \cot.\ b'^2) = \sin.\ c'^2 \frac{1 - \cos.\ b'^2 \cos.\ A^2}{(1 - \cos.\ b' \cos.\ c' \cos.\ A)^2}.$$

Умноживъ на $\sin.\ b'^2$ и раздѣливъ на $1 - \cos.\ b'^2 \cos.\ A^2$, наконецъ получимъ

$$\frac{\sin.\ b' \sin.\ c'}{\sin.\ a'} = 1 - \cos.\ b' \cos.\ c' \cos.\ A. \tag{10}$$

Произведеніе этого послѣдняго уравненія на уравненіе (9) даетъ такое

$$\cot.\ a' \cos.\ B \sin.\ b' \sin.\ c' = \cos.\ c' - \cos.\ b' \cos.\ A,$$

которое, со введеніемъ сюда значенія $\cot.\ a'$ изъ уравненія (7), перемѣняется въ

$$\cot.\ B \sin.\ A \sin.\ c' + \cos.\ A = \frac{\cos.\ c'}{\cos.\ b'} \tag{11}$$

Откуда

$$\cos\ b' = \frac{\cos.\ c'}{\cot.\ B \sin.\ A \sin.\ c' + \cos.\ A}.$$

Уравненіе (11) въ томъ же треугольникѣ даетъ еще

$$\cot.\ C \sin.\ A \sin.\ b' + \cos.\ A = \frac{\cos.\ b'}{\cos.\ c'}.$$

Послѣ чего

$$(\cot.\ B \sin.\ A \sin.\ c' + \cos.\ A)\ (\cot.\ C \sin.\ A \sin.\ b' + \cos.\ A) = 1.$$

Отсюда

$$\cot.\ C \sin.\ b' = \frac{\sin.\ A - \cot.\ B \sin.\ c' \cos.\ A}{\cot.\ B \sin.\ A \sin.\ c' + \cos.\ A}.$$

Произведеніе этого уравненія на (11) будетъ

$$\cot.\ C \cos.\ c' \operatorname{tang}.\ b' = \sin.\ A - \cot.\ B \sin.\ c' \cos.\ A.$$

Ставимъ сюда значеніе $\operatorname{tang}.\ b'$ изъ уравненія (7), напередъ перемѣнивъ здѣсь a', A на c', C.

$$\sin.\ c' \cos.\ C = \sin.\ A \sin.\ B - \cos B \cos.\ A \sin.\ c'.$$

Это послѣднее уравненіе раздѣливъ на $\sin.\ c'$ и замѣнивъ буквы другими въ томъ же треугольникѣ, получимъ

$$\cos.\ A + \cos.\ B \cos C = \frac{\sin.\ B \sin.\ C}{\sin.\ a'} \tag{12}$$

Уравненія (7), (10), (11) и (12) для всякаго треугольника будутъ слѣдовательно такія

$$\left.\begin{aligned}
&\text{tang. } a' \text{ sin. } A - \text{tang. } b' \text{ sin. } B = o,\\
&\text{cos. } A \text{ cos. } b' \text{ cos. } c' + \frac{\text{sin. } b' \text{ sin. } c'}{\text{sin } a'} - 1 = o,\\
&\text{cot. } A \text{ sin. } B \text{ sin. } c' + \text{cos } B - \frac{\text{cos. } a'}{\text{cos } c'} = o,\\
&\text{cos. } A + \text{cos. } B \text{ cos. } C - \frac{\text{sin. } B \text{ sin. } C}{\text{sin. } a'} = o
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

всего четыре и гдѣ a', b', c' можемъ переставлять, дѣлая тоже соотвѣтственно съ A, B, C, покуда произойдетъ 15 уравненій для одного треугольника съ произвольными боками a, b, c. Изъ всѣхъ этихъ уравненій стоитъ выбрать три различныхъ, чтобы вывести отсюда прочія. Напримѣръ можно довольствоваться однимъ вторымъ, отнеся его ко всѣмъ угламъ треугольника. Чтобы увѣриться въ этомъ на самомъ дѣлѣ, замѣтимъ, что поставивши $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ вмѣсто a, b, c, и слѣдовательно

$$\frac{1}{\text{cos. } a}, \qquad \sqrt{-1}.\ \text{tang. } a, \qquad \sqrt{-1}.\ \text{sin. } a$$

вмѣсто

$$\text{sin. } a', \quad \text{cos. } a', \quad \text{cot. } a$$

уравненія (13) перемѣняемъ въ такія

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sin. } A \text{ sin. } b - \text{sin. } B \text{ sin. } a = o,\\
&\text{cos. } A \text{ sin. } b \text{ sin. } c + \text{cos. } b \text{ cos. } c - \text{cos } a = o,\\
&\text{cot. } A \text{ sin. } B + \text{cos } B \text{ cos. } c' - \text{cot. } a' \text{ sin. } b = o,\\
&\text{cos. } A + \text{cos. } B \text{ cos. } c - \text{sin. } B \text{ sin. } C \text{ cos. } a = o,
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

извѣстныя уравненія Сферической Тригонометріи и которыхъ справедливость, скажу мимоходомъ, доказалъ я въ моемъ сочиненіи о началахъ Геометріи, независимо отъ предположенія о суммѣ угловъ прямолинейнаго треугольника. Второе изъ уравненій (14), какъ всякой знаетъ, будучи принято безъ различія для всѣхъ боковъ и угловъ треугольника, заключаетъ уже въ себѣ и остальныя три. Послѣ этого дозволяется утверждать, что свойства прямолинейныхъ треугольниковъ, оправданныя вторымъ изъ уравненій (13), не встрѣтятъ противорѣчія въ трехъ другихъ, а слѣдовательно и во всѣхъ вообще вычисленіяхъ основанныхъ на уравненіяхъ (13).

Теперь посмотримъ, уговлетворяютъ ли уравненія (13) тѣмъ условіямъ, при которыхъ составленіе всякаго треугольника возможно. Такихъ условій, незави-

симо отъ значенія суммы трехъ угловъ, находится только два: *составленіе треугольника всякой разъ возможно, когда даны* или *три стороны*, *изъ которыхъ сумма двухъ болѣе третьей*, или *двѣ стороны и уголъ между ними произвольные*. Этому послѣднему требованію удовлетворяетъ второе изъ уравненій (13), потому что здѣсь

$$\sin a' = \frac{\sin. b' \sin. c'}{1 - \cos. b' \cos. c' \cos. A}.$$

Между тѣмъ, каковы два бока b, c и уголъ A ни будутъ, всегда

$$1 + 2 \sin. \tfrac{1}{2} A^2 \cos. b' \cos. c' > \cos. (b' - c').$$

Прикладывая на обѣихъ сторонахъ $\cos. b' \cos. c'$, получимъ

$$1 - \cos. b' \cos. c' \cos. A > \sin. b' \sin. c'.$$

Послѣ чего $\sin. a' < 1$ и слѣдовательно уголъ a' съ линіей a дѣйствительныя числа. Что касается до другого условія, то изъ втораго уравненій (13) находимъ

$$\cos. A = \frac{1}{\sin. a'} \cdot \frac{\sin. a' - \sin. b' \sin. c'}{\cos. b' \cos. c'};$$

потомъ переходя отъ тригонометрическихъ функцій къ ихъ значенію въ линіяхъ a, b, c,

$$\cos. A = \frac{(e^b + e^{-b})(e^c + e^{-c}) - 2(e^a + e^{-a})}{(e^b - e^{-b})(e^c - e^{-c})}.$$

Пусть $a = b - c + d$, то

$$\cos. \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{(e^{2b+d} - 1)(e^{2c-d} - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}$$

Пусть еще

$$e^{2b} = 1 + \beta \quad e^{2c} = 1 + \gamma \quad e^d = 1 + \delta$$

такъ, чо необходимо β, γ, δ положительныя чила и при томъ

$$d > o, \quad \beta \gtrless \gamma, \quad \gamma > \delta.$$

Послѣ этого значенію $\cos. \frac{1}{2} A^2$ можемъ дать двоякой видъ

$$\cos. \tfrac{1}{2} A^2 = (1 - \frac{\delta}{\gamma}) \left\{1 + \frac{\delta}{\beta(1+\delta)}\right\},$$

$$\cos. \tfrac{1}{2} A^2 = 1 - \delta \left\{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta(\gamma+\delta)}\right\} - \frac{\delta^2}{\beta\gamma(1+\delta)};$$

первой доказываетъ, что $\cos. \frac{1}{2} A^2 > o$, а второй; что $\cos. \frac{1}{2} A^2 < 1$, и слѣдовательно уголъ A дѣйствительный.

Ищемъ теперь сумму угловъ во всякомъ треугольникѣ, чтобы рѣшить, какъ она прерполагается съ тѣмъ вмѣстѣ, когда уравненія (1), (2), (3) будутъ приняты для прямоугольнаго треугольника. Разумѣя $s = a + b + c$ и начиная съ

$$\cos.\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(e^{s-2a}-1)\ (e^s-1)}{(e^{2b}-1)\ (e^{2c}-1)}$$

какъ сейчасъ видѣли, не трудно продолжать и найти

$$\sin.\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{e^{s-2c}\cdot(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}.$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B = \frac{e^{2c}-1}{e^s-1}e^{c-\frac{1}{2}s}.\sin.\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B = \frac{e^{s-c}-e^c}{e^{2c}-1}\cdot\sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B = e^{\frac{1}{2}s-a}\cdot\frac{e^{s-2b}-1}{e^{2c}-1}\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B = e^{\frac{1}{2}s-b}\cdot\frac{e^{s-2a}-1}{e^{2c}-1}\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B) = e^{-\frac{1}{2}s}\cdot\frac{e^s+e^c}{e^c+1}\cdot\sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+B) = e^{\frac{1}{2}s}\cdot\frac{e^{-a}+e^{-b}}{e^c+1}\cdot\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{(1+e^{-a})(1+e^{-b})}{e^c+1}e^{\frac{1}{2}s}.\sin.\tfrac{1}{2}C.\cos.\tfrac{1}{2}C$$

Ставя въ это послѣднее уравненіе значенія $\sin.\frac{1}{2}C$, $\cos.\frac{1}{2}C$, получимъ

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\sqrt{(e^s-1)\ (e^{s-2a}-1)\ (e^{s-2b}-1)\ (e^{s-2c}-1)}}{(e^a+1)\ (e^b+1)\ (e^c+1)}$$

число менѣе единицы, потому что углы A, B, C дѣйствительные, какъ мы уже доказали. Это число вмѣстѣ положительное, потому что $C < \pi$, и наконецъ не дѣлается нулемъ, покуда каждыя двѣ стороны треугольника болѣе третьей; а слѣдовательно $A + B + C < \pi$, единственное предположеніе, которое до сихъ поръ въ Геометріи нельзя было опровергнуть.

Въ этомъ самомъ предположеніи, чтобы дополнить все Геометрическое ученіе, остается теперь указать только способъ, какимъ образомъ должны быть

измѣряемы линіи, поверхности и объемъ тѣла. Способъ къ тому самъ собой уже представляется, когда замѣтимъ, что для весьма малыхъ сторонъ a, b, c въ треугольникѣ и когда можемъ довольствоваться въ приближеніи значеніями

$$\sin. a' = 1 - \tfrac{1}{2} a^2, \quad \cos. a' = a,$$

подобнымъ образомъ для b, c; уравненія (13) сдѣлаются

$$\left.\begin{aligned} & b \sin. A - a \sin. B = o, \\ & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A, \\ & \sin. (A + B) - \frac{c}{a} \sin. A = o, \\ & \cos. A + \cos. (B + C) = o, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

уравненіями для прямолинейныхъ треугольниковъ въ употребительной Геометріи. Послѣ всего этого мы въ правѣ утверждать:

1. *Въ теоріи ничто не мѣшаетъ, сумму угловъ прямолинейнаго треугольника принимать менѣе двухъ прямыхъ.*

2. *Съ тикимъ предположеніемъ уравненія* (13) *замѣняютъ уравненія* (15) *и не могутъ вести къ ложнымъ заключеніямъ.*

3. *Воображаемая Геометрія обнимаетъ употребительную Геометрію, какъ частный случай, къ которому переходимъ, принимая линіи безконечно малыми: такъ что въ этомъ отношеніи употребительная Геометрія можетъ быть названа Геометрія дифференціальная.*

4. *Значенія для элементовъ линіи, поверхности и объема тѣлъ въ обѣихъ Геометріяхъ одинаковы.*

5. *Предположеніе, что сумма угловъ треугольника менѣе двухъ прямыхъ можетъ быть допущено только въ примѣненіи къ Аналитикѣ, потому что измѣренія въ природѣ не открываютъ намъ въ этой суммѣ на малѣйшаго отклоненія отъ половины окружности.*

Въ моемъ сочиненіи о началахъ Геометріи я доказывалъ, основываясь на нѣкоторыхъ астрономическихъ наблюденіяхъ, что въ треугольникѣ, котораго бока почти таковы, какъ разстояніе отъ земли до солнца, сумма угловъ можетъ разниться отъ двухъ прямыхъ не болѣе $0''{,}0003$ въ шестидесятичныхъ секундахъ градуса. Предположеніе употребительной Геометріи надобно слѣдовательно почитать какъ бы строго доказаннымъ, а вмѣстѣ быть убѣжденну и въ томъ, что независимо отъ опыта, напрасно было бы искать доказательства на такую истину,

которая еще не заключается сама собою въ нашемъ понятіи о тѣлахъ. Можетъ быть кому нибудь покажется съ перваго взгляда предположеніе уравненій (1), (2), (3) столько произвольнымъ, что его легко замѣнить другимъ; однакожъ этого сдѣлать нельзя, какъ доказалъ я въ моемъ сочиненіи о началахъ Геометріи. Въ самомъ дѣлѣ, выборъ здѣсь ограниченъ такими условіями, которымъ иначе удовлетворить невозможно. Надобно, чтобы изъ первыхъ трехъ положеній для прямоугольнаго треугольника происходили четыре уравненія для всякаго, которыя бы одинаково примѣнялись ко всѣмъ частямъ этого послѣдняго, а слѣдовательно заключали въ себѣ собственно 15 уравненій, единообразно составленныхъ для сторонъ и угловъ, какъ скоро ихъ отношеніе въ треугольникѣ остается тоже. Надобно, чтобы въ четырехъ уравненіяхъ для всякаго треугольника заключались, какъ частной случай, тѣ три, которыя приняты въ употребительной Геометріи. Надобно еще удовлетворить двумъ требованіямъ, чтобы составленіе треугольника было возможно. Наконецъ присоединяется условіе, которое произволъ выбора уже совершенно уничтожаетъ. Сумма угловъ въ треугольникѣ должна быть всегда менѣе двухъ прямыхъ и увеличиваться съ возрастаніемъ площади пропорціонально къ недостатку въ суммѣ угловъ противъ π. Дѣйствительно, ежели въ треугольникѣ сумма угловъ $\pi - \alpha$, а въ другомъ $\pi - \beta$, и оба треугольника соединяются въ одинъ, то здѣсь уже сумма угловъ будетъ $\pi - \alpha - \beta$. Это замѣчаніе остается вѣрнымъ даже и въ томъ случаѣ, когда для составленія треугольника изъ двухъ, потребуется дѣленіе на части и расположеніе частей въ новомъ порядкѣ. На такомъ свойствѣ треугольниковъ можно бы основать уже полную теорію параллельныхъ и слѣдовательно всю Геометрію; но я предпочелъ способъ, изложенной въ моемъ первомъ сочиненіи объ этомъ предметѣ, и гдѣ всѣ доказательства, съ одними геометрическими построеніями, въ естественномъ ходѣ самой науки, совершенно свободны отъ предположенія аналитическихъ функцій.

Займемся теперь примѣненіями къ Аналитикѣ, и въ этотъ разъ, оставляя способъ геометрическихъ построеній, для простоты и новѣрки будемъ основываться единственно на одинаковости значенія элементовъ въ той и другой Геометріи.

Пусть y, x, ξ, γ, (чер. 3) линіи, перпендикулярныя по порядку одна къ другой, замыкаютъ площадь и составляютъ такимъ образомъ трапецію, которую діогональ r раздѣляетъ на два прямоугольныхъ треугольника, проходя чрезъ точки соединенія x съ ξ, y съ η. Въ треугольникахъ называемъ α, β, γ углы противъ x, y, ξ; четвертой острой уголъ противъ η будетъ слѣдовательно $\frac{1}{2}\pi - \beta$.

Уравненія (1), (4), (5) для прямоугольнаго треугольника изъ x, y, r даютъ

$$\sin. r' = \sin. x' \sin. y'. \tag{16}$$
$$\cos. x' = \cos. r' \cos. \beta \tag{17}$$
$$\tang. \beta = \cos. y' \tang. x' \tag{18}$$
$$\tang. \alpha = \cos. x' \tang. y' \tag{19}$$

а для треугольника изъ ξ, η, r:

$$\sin. r' = \sin \xi'. \sin. \eta' \tag{20}$$
$$\cos. \xi' = \cos. r'. \sin. \beta \tag{21}$$
$$\cot. \beta = \cos. \eta' \tang. \xi' \tag{22}$$
$$\tang. \gamma' = \cos. \xi' \tang. \eta' \tag{23}$$

Изъ уравненій (17), (21) находимъ

$$\cos. \xi' = \cos. x' \tang. \beta \tag{24}$$

Сравнивая отсюда значеніе tang. β съ тѣми, которыя заключаются въ уравненіяхъ (18) и (22), выводимъ

$$\cos. x' = \cos. \eta' \sin. \xi' \tag{25}$$
$$\cos. \xi' = \cos. y' \sin. x' \tag{26}$$

Исключая ξ' въ этихъ послѣднихъ уравненіяхъ, получимъ

$$\tang. \eta' = \sin. y' \tang. x' \tag{27}$$

Итакъ для перехода отъ одной системы координатъ къ другой, служатъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} \cos. x' &= \sin. \xi' \cos. \eta' \\ \tang. y' &= \sin. \eta'. \tang. \xi' \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos. \eta' &= \frac{\cos. x'}{\sin. \xi'} \\ \cos. y' &= \frac{\cos. \xi'}{\sin. x'} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} \tang. x' &= \frac{\tang. r'}{\sin. y'} \\ \tang. \xi' &= \frac{\tang. y'}{\sin. \eta'} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Когда вмѣсто x, η ставимъ безконечно малыя линіи dx, $d\eta$, то уравненіе (25) перемѣнится въ такое

$$d\eta = \frac{dx}{\sin. \xi'} \tag{32}$$

Уравненія (19), (23) даютъ

$$\text{tang. } (\alpha + \gamma) = \frac{\text{cos. } x' \text{ tang. } y' + \text{cos. } \xi' \text{ tang. } \gamma'}{1 - \text{cos. } x' \text{ cos. } \xi' \text{ tang. } y' \text{ tang. } \eta}$$

Куда вставляя значенія cos ξ', tang. η' изъ уравненій (26), (27), получимъ

$$\text{tang. } (\alpha + \gamma) = \frac{\text{tang. } y'}{\text{cos. } x'} \tag{32}$$

и въ соединеніи съ уравненіемъ (27) находимъ

$$\text{cos. } (\alpha + \gamma) = \text{cos. } y' \text{ cos. } r'. \tag{33}$$

Изъ уравненій (17), (21) слѣдуетъ

$$\text{cos. } x'^2 + \text{cos. } \xi'^2 = \text{cos. } r'^2 , \tag{34}$$

а изъ уравненій (29) съ помощію уравненій (16), (20) выводимъ

$$\text{cot. } \eta' = \frac{\text{cos. } x'}{\text{sin. } r'} \qquad \text{cot. } y' = \frac{\text{cos. } \xi'}{\text{sin. } r'}$$

Потомъ отсюда, съ присоединеніемъ уравненія (34),

$$\text{cot. } y'^2 + \text{cot. } \eta'^2 = \text{cot. } r'^2 \tag{35}$$

Если x, y перпендикулярныя другъ къ другу координаты кривой линіи, на которой лежатъ вершины y, то элементъ ds линіи долженъ быть гипотенуза въ прямоугольномъ треугольникѣ, гдѣ одинъ катетъ dy, а другой проведенъ отъ вершины y къ сосѣдней ординатѣ, и слѣдовательно будетъ [см. ур. (1)]

$$\frac{dx}{\text{sin. } y'}$$

Послѣ чего

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\text{sin. } y'^2}} \tag{39}$$

Площадь S, ограниченную какой нибудь линіей, раздѣлимъ перпендикулами y къ оси x (чер. 4). Разстояніе между двумя послѣдующими y пусть измѣряется на оси x безконечно малою линіей dx. Полоса между двумя такими y пусть еще раздѣлится, перпендикулами z къ y, на квадраты, изъ которыхъ dy бокъ по направленію y, а другой, какъ мы видѣли [см. урав. (31)],

$$z = \frac{dx}{\text{sin. } y'}$$

Слѣдовательно элементъ площади S выражается

$$d^2S = \frac{dx\ dy}{\text{sin. } y'} \tag{37}$$

Интегрированіе этого уравненія въ отношеніи къ y отъ $y' = \frac{\pi}{2}$ даетъ

$$dS = dx \text{ cot. } y'. \tag{38}$$

Если координаты x, y, перпендикулярныя одна къ другой, перемѣняемъ на ξ, x, отрѣзанныя на перпендикулярныхъ осяхъ (чер. 3), то выраженіе для dS въ соединеніи съ уравненіемъ (25) сдѣлается

$$dS = \frac{dx \text{ cos. } \xi'}{\sqrt{\text{sin. } x'^2 - \text{cos } \xi'^2}}.$$

Разсматривая здѣсь ξ, постояннымъ и интегрируя отъ $x = o$ или $x' = \frac{\pi}{2}$, находимъ площадь трапеціи, которой два бока y, ξ перпендикуляры къ третьему, x, а четвертой γ изъ вершины y падаетъ перпендикулярно къ ξ,

$$S = \tfrac{1}{2}\pi - \text{arc. cos. } (\text{cot. } \xi' \text{ cot. } x').$$

Отсюда

$$\text{tang. } S = \frac{\text{cot. } \xi' \text{ cot. } x'}{\sqrt{1 - \text{cot. } \xi'^2 \text{ cot. } x'^2}},$$

а поставивши значеніе cot. ξ' изъ уравненія (26), получимъ

$$\text{tang. } S = \text{cos. } x' \text{ cot. } y'. \tag{39}$$

Одинаковость значенія $\frac{\pi}{2} - S$ съ значеніемъ угла въ трапеціи между y, η [см. урав. (32)] показываетъ, что площадь S трапеціи равна недостатку въ суммѣ ея угловъ противъ 2π. Въ моемъ первомъ сочиненіи помощію однихъ геометрическихъ построеній выведено, что площадь всякаго многоугольника съ n боками будетъ разность $(n - 2)\,\pi$ безъ суммы угловъ многоугольника.

Выраженіе (38) элемента dS площади можетъ быть замѣнено выраженіемъ $d\xi$ cos. γ' съ перемѣною системы координатъ на другую, такъ что x, ξ, выходя изъ этого же начала перпендикулярны другъ къ другу, а γ изъ точки кривой падаетъ перпендикулярно къ ξ. Зависимость тѣхъ и другихъ координатъ опредѣляется въ такомъ случаѣ уравненіями (28) или, что все равно, такими

$$\text{cos. } \xi' = \text{sin. } x' \text{ cos. } y' \qquad \text{tang. } \eta' = \text{sin. } y' \text{ tang. } x' \tag{40}$$

Если кривая пересѣкаетъ оси x и ξ, то полагая $x = \text{X}$ для $y = o$ и пользуясь найденнымъ значеніемъ трапеціи (39) внутри кривой, должны получить

$$\int_x^{\text{X}} dx \text{ cot. } y' = \int_o^{\xi} d\xi \text{ cot. } \eta' - \text{arc. tang. } (\text{cos. } x' \text{ cot. } y') \tag{41}$$

Въ уравненія (40), (41) поставя $x\sqrt{-1}$ вмѣсто x, находимъ

$$\left.\begin{array}{l} \int_x^X dx \text{ cot. } y' = \int_0^\xi d\xi \text{ cot. } \eta' - \frac{1}{2} \text{ log. } \dfrac{\text{sin. } (y'+x)}{\text{sin. } (y'-x)} \\ \text{cos. } \xi' \text{ cos. } x = \text{cos. } y' \quad \text{sin. } x \text{ tang. } \eta' = \text{sin. } y' \end{array}\right\} \quad (42)$$

Ставимъ сюда x' вмѣсто x, потомъ $x\sqrt{-1}$, $-\xi\sqrt{-1}$ вмѣсто x, ξ:

$$\left.\begin{array}{l} \int_x^X \dfrac{dx}{\text{cos. } x} \text{ cot. } y' = \int_0^\xi d\xi \text{ cot. } \eta' - \text{arc. tang. } \left\{\dfrac{\text{cot. } y'}{\text{sin. } x}\right\} \\ \text{tang. } \xi \text{ tang. } x = \text{cos. } y' \qquad \text{tang. } \eta' = \text{sin. } y' \text{ cos. } x \end{array}\right\} \quad (43)$$

Перемѣнимъ здѣсь X на x', ξ на $\frac{\pi}{2} - \xi'$, потомъ ставимъ $x\sqrt{-1}$, $\xi\sqrt{-1}$, вмѣсто x, ξ; а наконецъ $\frac{\pi}{2} - \xi$ вмѣсто ξ:

$$\left.\begin{array}{l} \int_x^X \dfrac{dx}{\text{sin. } x} \text{ cos. } y' = \int_0^\xi \dfrac{d\xi}{\text{sin. } \xi} \text{ cot. } \eta' + \text{arc. tang. (cot. } y' \text{ cos. } x) \\ \text{cos. } \xi = \text{cos. } y' \text{ sin. } x \qquad \text{tang. } \eta' = \text{sin. } y' \text{ tang. } x \end{array}\right\} \quad (44)$$

Послѣднія уравненія прямо слѣдуютъ изъ уравненій (40), (41), когда сюда вводимъ x', ξ' вмѣсто x, ξ; именно

$$dx = -\frac{dx}{\text{sin. } x'} \qquad d\xi = -\frac{d\xi'}{\text{sin. } \xi'}$$

Когда въ уравненіяхъ (40), (41) вмѣсто ξ, η, ставимъ $\xi\sqrt{-1}$, $\eta\sqrt{-1}$, то получимъ

$$\left.\begin{array}{l} \int_x^X dx \text{ sin. } y = \int_0^\xi d\xi \text{ cot. } \eta' - \frac{1}{2} \text{ log. } \dfrac{1 + \text{cos. } x' \text{ sin. } y}{1 - \text{cos. } x' \text{ sin. } y} \\ \text{tang. } \xi = \text{sin. } x' \text{ tang. } y \qquad \text{tang. } \eta' \text{ cos. } y = \text{tang. } x \end{array}\right\} \quad (45)$$

Тоже дѣлая съ уравненіями (41), находимъ

$$\left.\begin{array}{l} \int_x^X dx \text{ sin. } y = \int_0^\xi d\xi \text{ cot. } \eta' - \text{arc. tang. (tang. } x \text{ sin. } y) \\ \text{tang. } \xi \text{ cos. } x = \text{tang. } y \qquad \text{tang. } \eta' \text{ cos. } y = \text{tang. } x \end{array}\right\} \quad (46)$$

Если въ уравненія (43) ставимъ $\xi\sqrt{-1}$, $\eta\sqrt{-1}$ вмѣсто ξ, η, потомъ ξ вмѣсто ξ, наконецъ $-\xi\sqrt{-1}$ вмѣсто ξ, то будетъ

$$\int^{x} \frac{dx}{\cos.\ x} \sin.\ y$$

$$= \int_{0}^{\xi} \frac{d\xi}{\cos.\ x} \cot.\ \eta' - \tfrac{1}{2} \log.\ (\tang.\ \frac{x+y}{2} \cot.\ \frac{y-x}{2}) \Big| \qquad (47)$$

$$\sin.\ \xi = \tang.\ x \cot.\ y \qquad \tang.\ \eta' \cos.\ y = \cos.\ x \Big|$$

Уравненія (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46) и (47) представляютъ интегрированіе, подобное обыкновенному по частямъ. Въ справедливости всѣхъ этихъ интегральныхъ выраженій можно увѣриться прямо помощію дифференцированія.

Для круга, котораго r полупереченикъ, центръ въ началѣ координатъ x, y и слѣдовательно

$$\sin.\ x'\ \sin.\ y' = \sin.\ r'$$

уравненіе (38) дѣлается

$$dS = -\,dx'\,\sqrt{\cot.\ r'^2 - \cot.\ x'^2}$$

Полагая здѣсь

$$\sin.\ \psi = \tang.\ r'\ \cot.\ x' \qquad \cot.\ \theta = \cot.\ \psi\ \sin.\ r'$$

и интегрируя отъ $\psi = o$, $\theta = o$, находимъ

$$S = \frac{\theta}{\sin.\ r'} - \psi\,,$$

Умножая это уравненіе на 4 и дѣлая $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, получимъ площадь круга

$$S = \pi\ (e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r})^2 \qquad (48)$$

Для r весьма малаго $S = \pi r^2$, какъ и въ употребительной геометріи. Дифференцируя значеніе S въ уравненіи (48), находимъ окружность круга

$$\left\{\frac{dS}{dr}\right\} = 2\pi\ \cot.\ r' \qquad (49)$$

Тоже бы самое нашли, интегрируя выраженіе (36) для элемента ds кривой линіи.

Считая x, ξ отъ начала координатъ на двухъ перпендикулярныхъ осяхъ; y, η ведя перпендикулярно изъ точки къ осямъ x, ξ, какъ это предполагалось въ уравненіяхъ (28), (29) и (30), выраженію (37) для элемента d^2S площади можемъ давать различный видъ, употребляя тѣ или другія координаты по извѣстному способу для подобныхъ превращеній. Такъ находимъ

$$d^2 S = \frac{\text{sin. } x' \text{ sin. } \xi' \, dx' \, d\xi'}{(1 - \text{cos. } x'^2 - \text{cos. } \xi'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{50}$$

$$d^2 S = \frac{dy \, d\eta}{\sqrt{1 - \text{cos. } y'^2 \text{ cos. } \eta'^2}} \tag{51}$$

Наконецъ, вводя полярныя координаты, r разстояніе отъ начала и ω уголъ r съ осью x, уравненіе (50) съ помощію уравненій (34) и (17), разумѣя въ послѣднемъ ω подъ β, перемѣняемъ въ

$$d^2 S = - d\omega \, dr \text{ cot. } r'. \tag{52}$$

Пусть теперь $F(a)$, $f(a)$ двѣ какія нибудь функціи отъ произвольнаго a; къ тому означаемъ

$$\frac{dF(a)}{da} = F'(a) \qquad \frac{df(a)}{da} = f'(a)$$

и полагаемъ

$$F\{a + f(\infty)\} = o$$

Уравненіе (52) даетъ

$$\int\int d^2 S. \; F'\left\{a + f\left(\frac{1}{\text{sin. } r'}\right)\cdot\right\} f'\left\{\frac{1}{\text{sin. } r'}\right\} = \tfrac{1}{2}\pi \, F\{a + f(1)\} \tag{53}$$

гдѣ двойное интегрированіе распространяется между тѣми двумя крайними значеніями перемѣнныхъ, которыя отвѣчаютъ $r' = o$, $r' = \frac{\pi}{2}$.

Если теперь въ уравненіе (53) ставимъ выраженіе (37) d^2S, потомъ sin. r' = sin. x' sin. y' {см. ур. (16)}, наконецъ дѣлаемъ

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2} x' = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \qquad \text{cot. } \tfrac{1}{2} y' = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1},$$

то получимъ

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta d\alpha d\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)}} f'(\alpha \; \beta). \; F'\{\alpha + f(\alpha \; \beta)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \, F\{\alpha + f(1)\} \tag{54}$$

Если же въ уравненіе (53) ставимъ выраженіе (50) для d^2S, потомъ значеніе $\sin. r'$ изъ уравненія (34), наконецъ дѣлаемъ

$$\cos. x' = \alpha \qquad \cos. y' = \beta$$

то находимъ

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha\ d\beta}{(1-\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right) F'\left\{\alpha + f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi F\left\{\alpha + f(2)\right\} \tag{55}$$

Ставимъ еще выраженіе (51) для d^2S въ уравненіе (53), потомъ вмѣсто $\sin. r'$ его значеніе изъ уравненія (35) и полагаемъ

$$\cot. y' = \alpha \qquad \cot. \eta' = \beta$$

Получимъ

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha\ d\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}} f'\left(\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\right).\ F'\left\{\alpha + f\left(\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi F\left\{\alpha + f(1)\right\} \tag{56}$$

Для $f(a) = a^2 - 1$ это послѣднее уравненіе дѣлается

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha\ d\beta\ F'(a+\alpha^2+\beta^2) = \tfrac{1}{4}\pi F(a)$$

какъ находитъ и Льувиль (Mémoire sur une formule d' analyse, par Liouville. Crelle' s Jour. f. d. reine u. ang. math. 1834. B. XII).

Разумѣя тоже подъ $F(x)$, $F'(x)$, къ тому означая λ произвольное постоянное и полагая

$$F(\infty) = o$$

беремъ двойной интегралъ

$$-\int_0^\pi \int_0^\infty dB\ dc\ \cot. c'\ F'\left(\frac{\lambda}{\sin. c'}\right) = \frac{\pi}{\lambda} F(\lambda)$$

который слѣдовательно распространяется на безконечную плоскость по одну сторону прямой линіи. Составляемъ треугольникъ изъ боковъ a, b, c, съ противоположными углами A, B, C, взявши a произвольно. Второе изъ уравненій (13) даетъ

$$\frac{1}{\sin. c'} = \frac{1}{\sin. a' \sin. b'} - \cot. a' \cot. b' \cos. C.$$

Пусть

$$\lambda = p \sin. a', \qquad \lambda \cot. a' = q;$$

слѣдовательно

$$\frac{\lambda}{\sin.\ c'} = \frac{p - q\ \cos.\ b'\ \cos.\ C}{\sin.\ b'}$$

Между тѣмъ выраженіе (52) для элемента предполагаетъ

$$dB\ dc\ \cot.\ c' = dC\ db\ \cot.\ b'.$$

Послѣ чего

$$-\int_{\pi}^{0}\int_{0}^{\infty} dC\ db\ \cot.\ b'\ F'\left(\frac{p - q\ \cos.\ b'\ \cos.\ C}{\sin.\ b'}\right) = \frac{\pi\ F(\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}} \qquad (57)$$

или съ обыкновеннымъ означеніемъ,

$$-\int_{c}^{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega\ dx\ (e^x - e^{-x})\ F'\left\{(p + q\ \cos.\ \omega)\ e^x + (p - q\ \cos.\ \omega)\ e^{-x}\right\}$$

$$= \frac{\pi\ F(2\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}} \qquad (58)$$

гдѣ $p^2 > q^2$ произвольныя числа

Означаемъ y перпендикулъ въ треугольникѣ изъ острея A на сторону a, на которой отрѣзанную часть къ углу C называемъ x. Основываясь на уравненіяхъ (14) и (16), (37) и (52) вставляемъ

$$\sin.\ b' = \sin.\ x'\ \sin.\ y' \qquad \cos.\ b'\ \cos.\ C = \cos.\ x'$$

$$-dC\ db\ \cot.\ b' = \frac{dx\ dy}{\sin.\ y'}$$

въ интегралъ (57), который такимъ образомъ сдѣлается

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\ dy}{\sin.\ y'}\ F'\left(\frac{p - q\ \cos.\ x'}{\sin.\ x'\ \sin.\ y'}\right) = \frac{\pi\ F(\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}} \qquad (59)$$

или съ обыкновеннымъ означеніемъ для произвольныхъ положительныхъ и постоянныхъ a, b:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{c}^{\infty} dx\ dy\ (e^y + e^{-y})\ F'\left\{(ae^x + be^{-x})\ (e^y + e^{-y})\right\}$$

$$\frac{\pi\ F(4\sqrt{ab})}{2\sqrt{ab}} \qquad (60)$$

или наконецъ

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx}{x}\, dy\ F'\left\{\left(ax+\tfrac{b}{x}\right)\left(y+\tfrac{1}{y}\right)\right\} = \frac{\pi F(4\sqrt{ab})}{2\sqrt{ab}}. \tag{61}$$

Напримѣръ для $F'(x) = x^{-n}$ находимъ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x\left(ax+\frac{b}{x}\right)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{dy.\ y^{n+1}}{(y^2+1)^{n+1}} = \frac{\pi}{n}(ab)^{-\frac{n+1}{2}}.2^{-2n-1} \tag{62}$$

или, поставя $\sqrt{x}\sqrt{\frac{b}{a}}$ вмѣсто x, $\sqrt{y}$ вмѣсто y,

$$\int_0^\infty \frac{dx.\ x^{\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^{n+1}} \cdot \int_0^\infty \frac{dy.\ y^{\frac{n}{2}}}{(1+y)^{n+1}} = \frac{\pi}{n}.2^{-n+1} \tag{63}$$

Справедливость этого уравненія повѣряется извѣстными свойствами функціи

$$\int_0^\infty e^{-x}\ x^{n-1}\ dx = \Gamma(n).$$

Однакожь замѣтимъ, что уравненію (52) можно дать еще такой видъ

$$\int_0^\pi \frac{d\psi\ \text{sin.}\ \psi^n}{(p+q\ \text{cos.}\ \psi)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{n(p^2-q^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

или, все равно, такой

$$\int_0^\pi \frac{d\psi\ \text{sin.}\ \psi^n}{(p+q\ \text{cos.}\ \psi)^{n-1}} = \frac{\pi\,\Gamma(n)}{n\,2^{n-2}(p^2-q^2)^{\frac{n+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}. \tag{64}$$

Къ этому интегралу приходимъ, когда въ уравненіе (63) ставимъ $a = \frac{1}{2}(p-q)$, $b = \frac{1}{2}(p+q)$, $x = \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\psi$, $y = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi$; а къ тому замѣтимъ, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{n+m}} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}.$$

Если здѣсь одинъ разъ полагаемъ $x = \text{tang.}\ \varphi^2$, въ другой $x = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\psi^2$ и интегрируемъ между границами $\varphi = o$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = o$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, то находимъ

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m-n}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{sin. } \varphi^{2m-1} \text{ cos. } \varphi^{2n-1}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \,(\text{sin. } \tfrac{1}{2}\psi^{2m-1} \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\psi^{2n-1} + \text{sin. } \tfrac{1}{2}\psi^{2n-1} \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\psi^{2m-1}).$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \text{ sin. } \varphi^{m-1} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}m)\ \Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(\frac{m+1}{2})}$$

или

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \text{ sin. } \varphi^{m-1} = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})^2}{\Gamma(m)} \cdot 2^{m-2}$$

и что слѣдовательно

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}n).\ \Gamma(\tfrac{n+1}{2}) = 2^{1-n}\sqrt{\pi}.\ \Gamma(n)$$

Въ треугольникѣ, которой до сихъ поръ разсматривали, ведемъ ось координатъ ξ перпендикулярно къ a изъ острея угла C, называя η другую координату, перпендикулярную къ ξ изъ угла A. Помощію уравненія (26) находимъ

$$\frac{p - q \text{ cos. } x'}{\text{sin. } x' \text{ sin. } y'} = \frac{p - q \text{ cos. } x'}{\sqrt{\text{sin. } x'^2 - \text{cos. } \xi'^2}}.$$

Къ тому выраженія (37), (50) для элемента даютъ

$$\frac{dx\ dy}{\text{sin. } y'} = \frac{\text{sin. } x' \text{ sin. } \xi'\ dx'\ d\xi'}{(\text{sin. } x'^2 - \text{cos. } \xi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Послѣ чего интегралъ (59) сдѣлается

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \frac{dx'\ d\xi' \text{ sin. } x' \text{ sin. } \xi'}{(\text{sin. } x'^2 - \text{cos. } \xi'^2)^{\frac{3}{2}}} F'\left(\frac{p - q \text{ cos. } x'}{\sqrt{\text{sin. } x'^2 - \text{cos. } \xi'^2}}\right) = \frac{\pi F(\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}}$$

а послѣ того какъ поставимъ сюда x, y вмѣсто cos ξ', cos. x'

$$\int_0^1\int_{-1}^{+1} \frac{dx\ dy}{(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} F'\left(\frac{p - qy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right) = \frac{\pi F(\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}}. \qquad (65)$$

Основываясь на уравненіи (27), находимъ

$$\frac{p - q \text{ cos. } x'}{\text{sin. } x' \text{ sin. } y'} = -q \text{ cot. } \eta' + p\sqrt{1 + \text{cot. } y'^2 + \text{cot. } \eta'^2}.$$

Къ тому выраженія (37) и (51) даютъ

$$\frac{dx\ dy}{\text{sin. } y'} = \frac{dx\ d\eta}{\sqrt{1 - \text{cos. } y'^2 \text{ cos. } \eta'^2}}$$

Послѣ чего интегралъ (59) сдѣлается

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy\ d\eta}{\sqrt{1-\cos.\ y'^2\ \cos.\ \eta'^2}}\, F'(-q\ \cot.\ \eta' + p\sqrt{1+\cot.\ y'^2+\cot.\ \eta'^2})$$

$$= \frac{\pi F(\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}};$$

а когда ставимъ x, y вмѣсто cot. y', cot. η',

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\ dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, F'(-qy + p\sqrt{1+x^2+y^2}) = \frac{\pi F(\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}} \qquad (66)$$

Ведемъ еще изъ начала координатъ линію подъ угломъ ω къ оси x, увеличивая при томъ y. Перпендикулъ изъ острея угла A на эту линію называемъ η, отрѣзокъ на ней къ началу координатъ ξ. Въ двухъ прямоугольныхъ треугольникахъ, которымъ b служитъ общей гипотенузой, находимъ

$$\text{tang. } \eta' \text{ sin. } (C+\omega) = \text{tang. } b', \qquad \cos.\ \xi' = \cos.\ b'\ \cos.\ (C+\omega),$$

$$\text{tang. } C = \cos.\ y'\ \text{tang. } x', \qquad \sin.\ b' = \sin.\ x'\ \sin.\ y'.$$

Исключая отсюда углы b', C, получимъ

$$\left.\begin{aligned} \cos.\ \xi' &= \cos.\ x'\ \cos.\ \omega - \sin.\ x'\ \cos.\ y'\ \sin.\ \omega \\ \cot.\ \eta' &= \cot.\ y'\ \cos.\ \omega - \frac{\cot.\ x'}{\sin.\ y'}\sin.\ \omega \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

два уравненія для перемѣны двухъ перпендикулярныхъ координатъ ξ, η на другія x, y, также перпендикулярныя. Итакъ полагая

$$p + q\ \cos.\ \omega = 4\ a,$$
$$p - q\ \cos.\ \omega = 4\ b,$$
$$q\ \sin.\ \omega = 4\ c,$$

находимъ

$$\frac{p - q\ \cos.\ \xi'}{\sin.\ \xi'\ \sin.\ \eta'} = (ae^{x} + be^{-x})\ (e^{y} + e^{-y}) - c\ (e^{y} - e^{-y}).$$

Къ тому должно быть

$$\frac{dx\ dy}{\sin.\ y'} = \frac{d\xi\ d\eta}{\sin.\ \eta'}.$$

Между тѣмъ значеніе интеграла (59), распространеннаго на всю безконечную

плоскость, даетъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\ d\eta}{\sin.\ \eta'} F'\left(\frac{p - q\ \cos.\ \xi'}{\sin.\ \xi'\ \sin.\ \eta'}\right) = \frac{2\pi F(\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

Послѣ чего

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ dy\ (e^x + e^{-x})\ F'\left\{(ae^{\varpi} + be^{-\varpi})\ (e^x + e^{-x}) - c\,(e^x - e^{-x})\right\}$$

$$= \frac{\pi F(4\sqrt{ab - c^2})}{\sqrt{ab - c^2}}, \qquad (68)$$

гдѣ a, b, c произвольныя числа, ограниченныя только условіемъ

$$ab - c^2 > o.$$

Всѣ такіе двойные интегралы переходятъ еще въ другіе, когда здѣсь линіи умножаемъ на $\sqrt{-1}$, а интегрированіе распространяемъ на половину или на всю поверхность шара, основываясь на томъ, какъ замѣчено было выше, что въ этомъ случаѣ прямолинейной треугольникъ переходитъ въ сферической, а безконечная плоскость обращается въ поверхность шара. Условіе $F(\infty) = o$, для функціи $F(\lambda)$ отъ λ, теперь будетъ уже $F(-\lambda) = o$, а потому для всякаго числа λ вмѣсто $F(\lambda)$ должно вездѣ писать $F(\lambda) - F(-\lambda)$. Слѣдуя этому правилу легко переходимъ отъ интеграла (68) къ тому, которой г. Пуассонъ употребилъ для интегрированія линейныхъ уравненій съ частными дифференціалами (Sur l' integ. de quelques équations linéaires etc. Mémoires de l' Acad. roy. d. sciences de l'Institut de France, année 1818. T. III. p. 128). Можно слѣдовательно предвидѣть, что интегралы (59), (65), (66), (68) должны служить къ достиженію тойже цѣли. Такое примѣненіе составляетъ уже само по себѣ столь обширной предметъ, что здѣсь не мѣсто было бы вдаваться въ подобныя изслѣдованія. Обратимся къ воображаемой Геометріи.

Положеніе точки въ пространствѣ опредѣляемъ тремя координатами x, y, z, одна къ другой по порядку перпендикулярными, и такимъ образомъ, чтобы y, z заключались въ плоскости перпендикулярной къ линіи x, которая выходитъ изъ начала координатъ. Объемъ тѣла P раздѣлится на элементы тремя рядами плоскостей, перпендикулярныхъ къ x и $x + dx$, къ y и $y + dy$, къ z и $z + dz$. Первыя четыре плоскости вырѣзываютъ въ тѣлѣ призму, которой основаніе на плоскости, проведенной чрезъ x, y, будетъ прямоугольникъ съ боками

$$dy, \qquad \frac{dx}{\sin.\ y'},$$

какъ мы видѣли выше [урав. (37)]. Такимъ же образомъ основаніе паризмы на плоскости, перпендикулярной къ ея разстоянію z, будетъ прямоугольникъ съ бсками

$$\frac{dy}{\sin.\ z'}, \qquad \frac{dx}{\sin.\ y'\ \sin.\ z'},$$

которыхъ произведеніе на dz даетъ величину элемента

$$d^3P = \frac{dx\ dy\ dz}{\sin.\ y'\ \sin.\ z'^2}. \tag{69}$$

Интегрируя въ отношеніи къ y отъ $y = o$, получимъ

$$d^2P = \frac{dx\ dz}{\sin.\ z'} \cot.\ y'$$

или иначе

$$d^2P = \frac{dx'\ dz'}{\sin.\ x'\ \sin.\ z'^2} \cot.\ y'.$$

Для шара, котораго r полупоперечникъ,

$$\sin.\ r' = \sin.\ x'\ \sin.\ y'\ \sin.\ z'$$

Послѣ чего

$$d^2P = \frac{dx'\ dz'}{\sin\ z'^2} \sqrt{\frac{1}{\sin.\ r'^2} - \frac{1}{\sin.\ x'^2\ \sin.\ z'^2}}.$$

Принимая x' постояннымъ и полагая

$$\cos.\ \psi = \frac{\cot.\ z'\ \sin.\ r'}{\sqrt{\sin.\ x'^2 - \sin.\ r'^2}},$$

потомъ интегрируя отъ $\psi = o$ или $\sin.\ r' = \sin.\ x'\ \sin.\ z'$, находимъ

$$dP = -\frac{dx'\ \sin.\ x'}{4\ \sin.\ r'^2}\left(1 - \frac{\sin.\ r'^2}{\sin.\ x'^2}\right)\ (2\psi - \sin.\ 2\psi),$$

а распространяя значеніе интеграла до $\psi = \frac{\pi}{2}$ или $z = o$,

$$dP = -\frac{\pi\ dx'\ \sin.\ x'}{4\ \sin.\ r'^2}\left(1 - \frac{\sin.\ r'^2}{\sin.\ x'^2}\right).$$

Наконецъ отсюда

$$P = \frac{\pi}{4\ \sin.\ r'^2}\left(\cos.\ x' - \sin.\ r'^2\ \log.\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\,x'\right)$$

объемъ вырѣзка изъ шара, ограниченнаго сферой, тремя перпендикулярными другъ къ другу плоскостями въ центрѣ и четвертой плоскостію, перпендикулярной къ линіи пересѣченія двухъ первыхъ на разстояніи x отъ центра. Умножая на 8 и полагая $x = r$, получимъ объемъ шара

$$P = \tfrac{1}{2}\pi\ (e^{2r} - e^{-2r} - 4\,r). \tag{70}$$

Разложеніе въ сторону до r^3 даетъ

$$P = \tfrac{4}{3}\pi\, r^3,$$

какъ это принято въ употребительной Геометріи. Дифференцируя выраженіе (70) въ отношеніи къ r, находимъ поверхность шара

$$\left(\frac{dP}{dr}\right) = \pi\ (e^{r} - e^{-r})^2. \tag{71}$$

Тоже бы самое нашли, полагая элементъ всякой поверхности

$$d^2S = \frac{dx\ dy}{\sin.\ z'}\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin.\ y'^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin.\ y'^2\ \sin.\ z'^2}} \tag{72}$$

къ которому выраженію легко придти, слѣдуя всегда обыкновенному способу въ вычисленіи безконечно малыхъ линій и площадей, какъ это подробно изложено въ моемъ сочиненіи *о началахъ Геометріи.*

Если ось x принимаемъ за ось обращенія, гипотенузу въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ y, z называемъ p, противъ z уголъ ω, то

$$\begin{aligned} \sin.\ y'\ \sin.\ z' &= \sin.\ p', \\ \tang.\ p' &= \tang.\ z'\ \sin.\ \omega, \\ \cos.\ p'\ \cos.\ \omega &= \cos.\ y. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\cos.\ p'}{\cos.\ z'}\left(\frac{dp}{dx}\right), \qquad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos.\ y'}{\cos.\ z'},$$

а выраженіе элемента (72) для поверхности обращенія сдѣлается

$$d^2S = \frac{dx\ dy\ \cos.\ p'}{\sin.\ z'\ \cos.\ z'}\sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \frac{1}{\sin.\ p'^2}}.$$

Такъ какъ здѣсь y съ ω измѣняются, когда x и p остаются постоянными, то

$$dy\ \sin.\ y'^2 = d\omega\ \cos.\ p'\ \sin.\ \omega$$

и слѣдовательно

$$d^2S = dx\ d\omega\ \text{cot.}\ p'\ \sqrt{(\frac{dp}{dx})^2 + \frac{1}{\text{sin.}\ p'^2}}.$$

Интегрируя отъ $\omega = o$ до $\omega = 2\pi$, получимъ

$$dS = 2\pi\ dx\ \text{cot.}\ p'\ \sqrt{(\frac{dp}{dx})^2 + \frac{1}{\text{sin.}\ p'^2}}. \qquad (73)$$

Для поверхности шара, котораго r полупоперечникъ, а центръ въ началѣ координатъ x, должно полагать

$$\text{sin.}\ x'\ \text{sin.}\ p' = \text{sin.}\ r', \qquad (\frac{dp}{dx}) = -\frac{\text{cos.}\ x'}{\text{cos.}\ p'}.$$

Послѣ чего

$$dS = -\frac{2\pi\ \text{cos.}\ r'}{\text{sin.}\ r'^2}\ \text{sin.}\ x'\ dx'.$$

Интегрируя отъ $x' = \frac{\pi}{2}$ до $x' = r'$, находимъ какъ и выше [выр. (71)],

$$S = 4\pi\ \text{cot.}\ r'^2 \qquad (74)$$

Между тѣмъ выраженіе (73) для поверхности шара дѣлается

$$d^2S = \frac{\text{sin.}\ r'^2}{\text{cos.}\ r'} \cdot \frac{dx'\ dy'\ \text{sin.}\ x'^2\ \text{sin.}\ y'}{\sqrt{\text{sin.}\ x'^2\ \text{sin.}\ y'^2 - \text{sin.}\ r'^2}}$$

и съ положеніемъ

$$\text{cos.}\ \psi = \text{tang.}\ r'\ \text{cos.}\ y', \qquad \text{cos.}\ x' = \text{cos.}\ r'\ \text{sin.}\ \psi\ \text{sin.}\ \varphi$$

перемѣняется въ

$$d^2S = -\ d\varphi\ d\psi\ \frac{\text{cos.}\ r'^2}{\text{sin.}\ r'} \cdot \frac{\text{sin.}\ \psi\ \sqrt{1 - \text{cos.}\ r'^2\ \text{sin.}\ \psi^2\ \text{sin.}\ \varphi^2}}{1 - \text{cos.}\ r'^2\ \text{sin.}\ \psi^2}$$

Умножая на 8 и интегрируя отъ $\psi = o$ до $\psi = \frac{\pi}{2}$, отъ $\varphi = o$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, сравнивая потомъ съ значеніемъ сферы (74), заключаемъ, что

$$\frac{\pi}{2\ \text{sin.}\ r'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi\ d\varphi\ \text{sin.}\ \psi\ \sqrt{1 - \text{cos.}\ r'^2\ \text{sin.}\ \psi^2\ \text{sin.}\ \varphi^2}}{1 - \text{cos.}\ r'^2\ \text{sin.}\ \psi^2} \qquad (75)$$

Итакъ, если означаемъ эллиптическую функцію съ постояннымъ угломъ α,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\ \sqrt{1 - \text{sin.}\ \alpha^2\ \text{sin.}\ \varphi^2} = \frac{\text{cos.}\ \alpha^2}{\text{sin.}\ \alpha} E\ (\text{sin.}\ \alpha)$$

то

$$\tfrac{1}{2}\pi \text{ cot. } \alpha = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \; E(\text{cos. } \alpha \text{ sin. } \psi). \tag{76}$$

Пусть

$$E(x) = A_1 \; x + A_2 \; x^2 + A_3 \; x^3 + A_4 \; x^4 + \cdots$$

Ставя сюда $x = \text{cos. } \alpha \text{ sin. } \psi$, умножая на $d\psi$ и интегрируя отъ $\psi = o$ до $\psi = \frac{\pi}{2}$, получимъ

$$\tfrac{1}{2}\pi \text{ cot. } \alpha = A_1 \text{ cos. } \alpha + \frac{1}{2} A_3 \text{ cos. } \alpha^3 + \frac{4.\ 2}{5.\ 3} A_5 \text{ cos. } \alpha^5 + \cdots$$

$$+ \tfrac{1}{2}\pi \left\{ \frac{1}{2} A_2 \text{ cos. } \alpha^2 + \frac{3.\ 1}{4.\ 2} A_4 \text{ cos. } \alpha^4 + \frac{5.\ 3.\ 1}{6.\ 4.\ 2} A_6 \text{ cos. } \alpha^6 + \cdots \right\}$$

Отсюда

$$A_2 = o \quad A_4 = o \quad A_6 = o \cdots$$

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\pi \quad A_3 = \tfrac{1}{2}\pi . 3.(\frac{1}{2})^2 \quad A_5 = \tfrac{1}{2}\pi . 5. (\frac{1.\ 3}{2.\ 4})^2 \cdots$$

Послѣ чего

$$E(x) = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ x + 3 (\frac{1}{2})^2 x^3 + 5 (\frac{1.\ 3}{2.\ 4})^2 x^5 + 7 (\frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6})^2 x^7 + \cdots \right\} \tag{77}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - x^2 \text{ sin. } \varphi^2} = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ 1 - (\frac{1}{2})^2 x^2 - \tfrac{1}{3} . (\frac{1.\ 3}{2.\ 4})^2 \; x^4 \right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{5} (\frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6})^2 . \; x^6 + \cdots \right\}$$

Умножая послѣднее уравненіе на x^2 и складывая съ предъидущимъ, получимъ извѣстную строку

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \text{ sin. } \varphi^2}} = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ 1 + (\frac{1}{2})^2 \; x^2 + (\frac{1.\ 3}{2.\ 4})^2 \; x^4 + \cdots \right\}$$

Если означаемъ теперь

$$x \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \text{ sin. } \varphi^2}} = H(x) \; ,$$

то уравненіе (77) даетъ

$$H(x) = \int_0 \frac{dx}{x} E(x).$$

Послѣ чего изъ уравненія (76) находимъ

$$\tfrac{1}{2}\pi\ (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi\, H\ (\text{cos. } \alpha\ \text{sin. } \psi)$$

Если вмѣсто прямыхъ, другъ къ другу перпендикулярныхъ координатъ x, y, z, хотимъ употребить полярныя: r разстояніе до начала координатъ, θ уголъ линіи r съ ея проэкціей p на плоскость координатъ x, y (чер. 5), ω уголъ p съ остью x.

Основываясь на уравненіяхъ (1), (5), пишемъ

$$\begin{aligned} \text{siu. } r' &= \text{sin. } p'\ \text{sin. } z', & \text{sin. } p' &= \text{sin. } x'\ \text{sin. } y', \\ \text{tang. } \omega &= \text{cos. } y'\ \text{tang. } x', & \text{tang. } \theta &= \text{cos. } z'\ \text{tang. } p'. \end{aligned}$$

Отсюда находимъ

$$\left.\begin{aligned} \text{sin. } r' &= \text{sin. } x'\ \text{sin. } y'\ \text{sin. } z', \\ \text{tang. } \omega &= \text{cos. } y'\ \text{tang. } x', \\ \text{sin. } \theta &= \frac{1}{\text{cos. } r'}\ \text{sin. } x'\ \text{sin. } y'\ \text{sin. } z'. \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Обратно

$$\left.\begin{aligned} \text{cos. } x' &= \text{cos. } r'\ \text{cos. } \omega\ \text{cos. } \theta, \\ \text{cot. } y' &= \frac{\text{cos. } r'\ \text{sin. } \omega\ \text{cos. } \theta}{\sqrt{1 - \text{cos. } r'^2\ \text{cos. } \theta^2}}, \\ \text{cot. } z' &= \text{cot. } r'\ \text{sin. } \theta. \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Элементъ объема въ тѣлѣ можно слѣдовательно выразить въ полярныхъ координатахъ r, θ, ω, слѣдуя обыкновенному способу и основываясь на уравненіяхъ (79) или (80), но я, по краткости, предпочитаю здѣсь Геометрическое построеніе и въ намѣреніи показать вѣрность такого рода предстaвленій.

Измѣненіямъ угловъ θ, ω отвѣчаютъ на разстояніи r измѣненія дугъ [выраж. (49)]

$$d\ \theta\ \text{cot. } r', \qquad d\ \omega\ \text{cot. } p'.$$

Второе изъ этихъ приращеній, будучи раздѣлено на sin. z' [урав. (31)], даетъ дугу, которую описываетъ r съ измѣненіемъ $d\,\omega$ въ углѣ ω. Умножая на $d\ r$ произведеніе двухъ дугъ, описанныхъ концемъ r, получимъ элементъ объема P въ тѣлѣ

$$d^3 P = dr.\ d\omega.\ d\theta\ \text{cot. } r' \frac{\text{cot. } p'}{\text{sin. } z'}$$

Въ треугольникѣ, котораго p, z катеты, r гипотенуза, находимъ [урав. (3), (5)]

$$\text{tang. } r' = \text{tang. } z' \text{ sin. } \theta, \qquad \text{tang. } \theta = \cos. z' \text{ tang. } p'.$$

Послѣ чего

$$d^3P = \tfrac{1}{4}\, dr.\, d\omega.\, d\theta \cos.\, \theta\, (e^r - e^{-r})^2 \tag{81}$$

Когда r постоянное, то интегрированіе отъ $\omega = o$ до $\omega = 2\pi$, отъ $\theta = o$ до $\theta = \pi$ даетъ снова выраженіе (70) для шара.

Вычисляемъ теперь объемъ конуса съ плоскимъ основаніемъ. Называемъ h высоту (чер. 6), отъ пяты которой ведемъ растояніе r до ребра c, и пусть θ уголъ r съ основаніемъ, φ уголъ между h и c, ω уголъ проекціи r на основаніе съ линіей здѣсь постоянной.

Интегрируя выраженіе (81) для элемента отъ $r = o$, находимъ

$$2\, d^2\, P = \cos.\, \theta \left\{ \frac{\cos.\, r'}{\sin.\, r'^2} - \log.\, \cot.\, \tfrac{1}{2} r' \right\} d\, \omega\, d\, \theta. \tag{82}$$

Въ треугольникѣ, котораго h, r стороны, φ уголъ противъ r, $\frac{1}{2}\pi - \theta$ уголъ между h и r, третье изъ уравненій (13) даетъ

$$\cos.\, r' = \frac{\cos.\, h'}{\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta}.$$

Послѣ чего

$$2\left(\frac{d^2\, P}{d\,\omega\, d\,\theta}\right) = \frac{\cos.\, h' \cos.\, \theta\, (\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta)}{(\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta)^2 - \cos.\, h'^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} \cos.\, \theta \log. \left(\frac{\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta + \cos.\, h'}{\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta - \cos.\, h'} \right)$$

Умноживши на $d\theta$, интегруруемъ отъ $\theta = o$.

$$2\, \left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \int_o \frac{\cos.\, h' \sin.\, h' \cot.\, \varphi\, d\, \theta}{\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta)^2 - \cos.\, h'^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} \sin.\, \theta \log. \left(\frac{\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta + \cos.\, h'}{\cot.\, \varphi \cos.\, \theta \sin.\, h' + \sin.\, \theta - \cos.\, h'} \right).$$

Полагаемъ здѣсь

$$\cot.\, \varphi \sin.\, h' = \cot.\, \lambda$$

и распространяемъ интегрированіе до $\theta = \frac{1}{2}\tau$.

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \text{sin. } h' \text{ cos. } h' \int_0^{\frac{1}{2}\tau} \frac{d\ \theta \text{ sin. } \lambda^2 \text{ cot. } \varphi}{\text{sin. } (\theta - \lambda)^2 - \text{sin. } \lambda^2 \text{ cos. } h'^2} - \tfrac{1}{2} \text{log.} \left(\frac{1+\text{cos. } h'}{1-\text{cos. } h'}\right)$$

$$= -h + \frac{\text{cos. } \lambda}{2\sqrt{1 - \text{cos. } h'^2 \text{ sin. } \lambda^2}} + \left\{ \frac{\text{cos. } \lambda + \text{cos. } h' \sqrt{1 - \text{sin. } \lambda^2 \text{ cos. } h'^2}}{\text{cos. } \lambda - \text{cos. } h' \sqrt{1 - \text{sin. } \lambda^2 \text{ cos. } h'^2}} \right|$$

Вводимъ снова уголъ φ.

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \tfrac{1}{2} \text{ cos. } \varphi \text{ log.} \left(\frac{\text{cos. } \varphi + \text{cos. } h'}{\text{cos. } \varphi - \text{cos. } h'}\right) - h.$$

Уравненіе (4) для треугольника, котораго h, c бока и φ уголъ между ними, даетъ

$$\text{cos. } h' = \text{cos. } c' \text{ cos. } \varphi; \tag{83}$$

слѣдовательно

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = c \text{ cos. } \varphi - h. \tag{84}$$

Если основаніе конуса кругъ, то c, φ и h постоянныя. Въ такомъ случаѣ объемъ конуса

$$P = \pi\ (c \text{ cos. } \varphi - h).$$

Ставимъ сюда значеніе h изъ уравненія (83).

$$P = \pi \left\{ c \text{ cos. } \varphi - \tfrac{1}{2} \text{ log. } \frac{1 + \text{cos. } \varphi \text{ cos. } c'}{1 - \text{cos. } \varphi \text{ cos. } c'} \right\}$$

Иначе

$$P = \pi \left\{ c \text{ cos. } \varphi - \tfrac{1}{2} \text{log. } \frac{1 + \text{cos. } \frac{1}{2}\varphi^2 \ (e^{2c} - 1)}{1 - \text{sin. } \frac{1}{2}\varphi^2 \ (e^{2c} - 1)} \right\}.$$

Разлагая въ строку и продолжая до члена съ c^3, находимъ

$$P = \tfrac{1}{3}\pi\, c^3 \text{ sin. } \varphi^2 \text{ cos. } \varphi$$

какъ и въ обыкновенной Геометріи.

Впрочемъ, какое основаніе конуса ни будетъ, уравненіе (84) всегда даетъ объемъ

$$P = \tfrac{1}{2} \int (c \text{ cos. } \varphi - h)\ d\omega \tag{85}$$

гдѣ c ребро, h высота конуса, φ уголъ между c и h, ω уголъ, который описываетъ плоскость, проходя чрезъ h.

Беремъ снова уравненіе (82), которому можно дать такой видъ

$$2\left(\frac{d^2 P}{d\omega d\theta}\right) = \cos.\ \theta \left\{\frac{\cos.\ r'}{\sin.\ r'^2} - r\right\}.$$

Считаемъ въ этотъ разъ линію r отъ вершины конуса (чер. 7), разумѣемъ θ уголъ между r и проекціей его p на плоскости, проведенной чрезъ h, гдѣ ω уголъ между h и p. Здѣсь

$$\cos.\ r' \cos.\ \theta = \cos.\ p' \tag{86}$$

и слѣдовательно

$$2\left(\frac{d^2 P}{d\omega\, d\theta}\right) = \frac{2 \cos.\ p' \cos.\ \theta^2}{\cos.\ \theta^2 - \cos\, p'^2} - \cos.\ \theta \log.\left(\frac{\cos.\ \theta + \cos.\ p'}{\cos.\ \theta - \cos.\ p'}\right).$$

Умножаемъ на $d\ \theta$ и интегрируемъ отъ $\theta = o$.

$$4\left(\frac{d\, P}{d\, \omega}\right) = \frac{1}{\sin.\ p'} \log.\left(\frac{1 + \cot.\ p' \tang.\ \theta}{1 - \cot.\ p' \tang.\ \theta}\right) - \sin.\ \theta \log.\left(\frac{\cos.\ \theta + \cos.\ p'}{\cos.\ \theta - \cos.\ p'}\right).$$

Соединяемъ концы линій p и h, p и r, r и h прямыми x, y, ϱ, изъ которыхъ первыя двѣ перпендикулярны другъ другу. Въ двухъ прямоугольныхъ треугольникахъ, у которыхъ p общая сторона, находимъ [ур. (1), (5)]

$$\sin.\ p' = \sin.\ h' \sin.\ x',$$
$$\tang.\ \omega = \cos.\ x' \tang.\ h',$$
$$\tang.\ \theta = \cos.\ y' \tang.\ p'.$$

съ помощію которыхъ уравненій и еще уравненія (86) получимъ

$$2\left(\frac{d\, P}{d\, \omega}\right) = \frac{y}{\sin.\ h' \sin.\ x'} - r \sin.\ \theta$$

Удерживая одни перемѣняющіяся x, y, должны сюда поставить [ур. (79)]

$$\cos.\ r' = \sqrt{1 - \sin.\ h'^2 \sin.\ x'^2 \sin.\ y'^2}$$

$$\sin.\ \theta = \frac{1}{\cos.\ r'} \sin.\ h' \sin.\ x' \cos.\ y'$$

$$d\,\omega = \frac{dx \sin.\ x' \sin.\ h' \cos.\ h'}{1 - \sin.\ h'^2 \sin.\ x'^2}.$$

Послѣ чего

$$dP = -\tfrac{1}{2}\cos.\ h' \frac{dx' \log.\cot.\tfrac{1}{2}y'}{1-\sin.h'^2\sin.x'^2} + \sin.h'^2\cos.h'\frac{2\,dx'.r\cos.y'\sin.x'^2}{\cos.r'\,(1-\sin.h'^2\sin.x'^2)}$$

Интегрируя отъ $x' = \frac{1}{2}\pi$ до того x', для котораго $y' = \frac{1}{2}\pi$, получимъ часть конуса, вырѣзанную двумя перпендикулярными другъ къ другу плоскостями, проведенными чрезъ высоту h. Значеніе такой части даетъ выраженіе (85), которое теперь будетъ

$$P = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(r\cos.\varphi - h)\,d\psi, \qquad (88)$$

гдѣ φ уголъ между c и h, ψ уголъ противъ y въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ катетовъ x, y. Взаимная зависимость перемѣнныхъ въ обоихъ выраженіяхъ (87), (88) для P опредѣляется уравненіями

$$\sin.r' = \sin.x'\sin.y'\sin.h',$$
$$\tang.\psi = \cos.y'\tang.x',$$
$$\cos.r'\cos.\varphi = \cos.h'.$$

Если основаніе конуса кругъ съ полупоперечникомъ ϱ, то ϱ, r, φ постоянныя, и тогда

$$\sin.\varrho' = \sin.x'\sin.y',$$
$$P = \tfrac{1}{2}\pi\,(r\cos.\varphi - h).$$

Другое значеніе для P, какое бы основан е конуса ни было, находимъ изъ уравненія (87)

$$P = \tfrac{1}{2}\cos.h'\int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx'\log.\cot.\frac{1}{2}y'}{1-\sin.h'^2\sin.x'^2} + \frac{r\sin.h'^2\cos.h'}{2\cos.r'}\int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx'\cos.y'\sin.x'^2}{1-\sin.h'^2\sin.x'} \qquad (90)$$

Для конуса съ кругомъ въ основаніи получимъ

$$\int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx'\cos.y'\sin.x'^2}{1-\sin.h'\sin.x'^2} = \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx'\sin.x'\sqrt{\cos.\varrho'^2-\cos.x'^2}}{1-\sin.h'^2\sin.x'^2}$$

$$= \cos.\varrho'^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\xi\sin.\xi^2}{\cos.h'^2+\sin.h'^2\cos.\varrho'^2\cos.\xi^2} = \frac{\pi\,(\cos.r'-\cos.h')}{2\cos.h'\sin.h'^2}.$$

Итакъ два значенія (89) и (90) будутъ теперь

$$P = \frac{\pi}{4}\left(r\,\frac{\cos.\,h'}{\cos.\,r'} - h\right),$$

$$'P = \frac{1}{2}\cos.\,h' \int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx'\,\log.\cot.\,\frac{1}{2}y'}{1-\sin.h'^2\sin.r'^2} + \frac{\pi\,r\,(\cos.h' - \cos.\,r')}{4\cos.\,r'},$$

которыхъ сравненіе даетъ

$$\int_{\varrho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,x'\log.\cot.\,\frac{1}{2}\,y'}{1-\sin.\,h'^2\sin.\,x'^2} = \frac{\pi}{2}(r-h),$$

Поставя сюда значеніе x' и отбросивъ для простоты всѣ ударенія надъ буквами, получимъ

$$\int_{\varrho}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin.\,y\cos.\,y\log.\cot.\,\frac{1}{2}\,y.\,d\,y}{(\sin.\,y^2 - \sin.\,r^2)\,\sqrt{\sin.\,y^2 - \sin.\,\varrho^2}} = \frac{\pi\log.\,(\cot.\,\frac{1}{2}\,h.\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{2}\,r)}{2\sin.\,\varrho\cos.\,h} \qquad (91)$$

гдѣ

$$\sin.\,r = \sin.\,h\sin.\,\varrho.$$

Интегралъ (91), сколько мнѣ извѣстно, не былъ еще замѣченъ въ такой обширности; нѣкоторые частные только случаи можно видѣть у Лежандра (Exercices de calcul intégral., T. 1, suppl.)

Если въ интегралѣ (91), кромѣ предположенія

$$\sin.\,r = \sin.\,h\sin.\,\varrho,$$

еще дѣлаемъ

$$\cos.\,y = \cos.\,\varrho\sin.\,\varphi, \qquad \cos.\,\varrho = \cos.\,r\cos.\,\lambda,$$

то находимъ

$$\sin.\,\lambda = \mathrm{tang.}\,r\cot.\,x,$$

$$(\cot.\frac{1}{2}h.\,\text{tang.}\frac{1}{2}r)^2 = \frac{1-\cos.\,r}{1+\cos.\,r}\cdot\frac{1+\cos.\,h}{1-\cos.\,h}$$

$$= \frac{\cos.\,\lambda-\cos.\,\varrho}{\cos.\,\lambda+\cos.\,\varrho}\cdot\frac{\sin.\,\varrho+\sin.\,r.\,\cot.\,h}{\sin.\,\varrho-\sin.\,r.\,\cot.\,h}$$

$$= \text{tang.}\frac{1}{2}(\varrho+\lambda)\,\text{tang.}\frac{1}{2}(\varrho-\lambda)\cdot\frac{\sin.\,\varrho+\sin.\,\lambda\cos.\,r}{\sin.\,\varrho-\sin.\,\lambda\cos.\,r}$$

$$= \text{tang.}\frac{1}{2}(\varrho+\lambda)\cdot\text{tang.}\frac{1}{2}(\varrho-\lambda)\cdot\frac{\sin.\,(\varrho+\lambda)}{\sin.\,(\varrho-\lambda)} = \left\{\frac{\sin.\,\frac{1}{2}(\varrho+\lambda)}{\cos.\,\frac{1}{2}(\varrho-\lambda)}\right\}^2.$$

Разсматривая теперь y и φ только перемѣнными, интегралу (91) даемъ новой видъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi\,\sin.\,\varphi}{1-\cos.\,\lambda^2\,\sin.\,\varphi^2}\cdot\;\log.\,\frac{1+\cos.\,\varrho\,\sin.\,\varphi}{1-\cos.\,\varrho\,\sin.\,\varphi}$$

$$= \frac{\pi}{\sin.\,\lambda\cos.\,\lambda}\,\log.\frac{\sin.\,\frac{1}{2}(\varrho+\lambda)}{\cos.\,\frac{1}{2}(\varrho-\lambda)}. \qquad (92)$$

Этотъ интегралъ вѣренъ для всѣхъ произвольныхъ угловъ ϱ, λ, хотя до сихъ поръ предлагались $\varrho > \lambda$ острые углы. Для доказательства довольно уже замѣтить, что значеніе интеграла можетъ быть представлено строкой, которая во всѣхъ случаяхъ изчезаетъ. Располагая ее по степенямъ cos. ϱ, находимъ множитель при степени cos. ϱ, съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ $2n+1$,

$$\frac{2}{(2n+1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi\,\sin.\,\varphi^{2n+2}}{1-\cos.\,\lambda^2\,\sin.\,\varphi^2} < \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi\,\sin.\,\varphi}{1-\cos.\,\lambda^2\,\sin.\,\varphi^2}$$

$$< \frac{\pi-2\lambda}{\sin.\,\lambda\,\cos.\,\lambda}.$$

Итакъ въ интегралѣ (91) вмѣсто cos. h, cos. r можемъ ставить $\frac{1}{\cos.\,h}$, $\frac{1}{\cos.\,r}$, которая перемѣна отвѣчаетъ предположенію $\varrho < \lambda$ и даетъ интегралу (91) такой видъ

$$\int_\varrho^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin.\,y\cos.\,y\,\log.\,\cot.\,\frac{1}{2}y\,dy}{1-\cos.\,r^2\,\cos.\,y^2)\sqrt{\sin.\,y^2-\sin.\,\varrho^2}} = \frac{\pi\,\sin.\,h}{\sin.\,2r}\log.\,(\cot.\frac{1}{2}h\,\text{tang.}\frac{1}{2}r) \qquad (93)$$

гдѣ

$$\sin.\,\varrho\,\text{tang.}\,h = \text{tang.}\,r.$$

Къ интегралу (92) приходимъ еще другимъ путемъ, разсматривая двойной интегралъ

$$u = \int\int \frac{dx\,d\varphi \sin.\varphi^2}{(1 - a \sin.\varphi^2)(1 - x^2 \sin.\varphi^2)}$$

отъ $x = o$ и гдѣ a постоянное. Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ пусть $u = U$. Интегрированіе въ отношеніи къ x даетъ

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi \sin.\varphi}{1 - a \sin.\varphi^2} \log.\left(\frac{1 + x \sin.\varphi}{1 - x \sin.\varphi}\right).$$

Дефференцируя u въ отношеніи къ x, получимъ

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{x^2 - a}\left\{\int \frac{d\varphi}{1 - x^2 \sin.\varphi^2} - \int \frac{d\varphi}{1 - a \sin.\varphi^2}\right\};$$

а послѣ интегрированія въ отношеніи къ φ отъ $\varphi = o$,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{x^2 - a}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \text{arc. tang.}\,(\text{tang.}\,\varphi \sqrt{1 - x^2}) - \frac{1}{\sqrt{1 - a}} \text{arc. tang.}\,(\text{tang.}\,\varphi \sqrt{1 - a})\right\}$$

Если $\sqrt{1 - x^2}$ дѣйствительное число, то для $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\text{arc. tang.}\,(\text{tang.}\,\varphi \sqrt{1 - x^2}) = \frac{\pi}{2}$$

Если $\sqrt{1 - x^2}$ воображаемое число, то пусть

$$\sqrt{1 - x^2} = \lambda + \mu\sqrt{-1}$$

съ дѣйствительными числами λ, μ. Находимъ

$$\text{arc. tang.}\,(\text{tang.}\,\varphi \sqrt{1 - x^2}) = \frac{1}{2}\text{arc. tang.}\left(\frac{2\lambda \text{tang.}\,\varphi}{1 - (\lambda^2 + \mu^2)\,\text{tang.}\,\varphi^2}\right) + \sqrt{-1}\log.\left\{\frac{1 + 2\mu\,\text{tang.}\,\varphi + (\lambda^2 + \mu^2)\,\text{tang.}\,\varphi^2}{1 - 2\mu\,\text{tang.}\,\varphi + (\lambda^2 + \mu^2)\,\text{tang.}\,\varphi^2}\right\}.$$

Здѣсь

$$\text{arc. tang.}\left(\frac{2\lambda \text{tang.}\,\varphi}{1 - (\lambda^2 + \mu^2)\,\text{tang.}\,\varphi^2}\right) = 2\lambda \int_0 \frac{d\varphi\,\{\cos.\varphi^2 + (\lambda^2 + \mu^2)\sin.\varphi^2\}}{\{\cos.\varphi^2 - (\lambda^2 + \mu^2)\sin.\varphi^2\}^2 + 4\lambda^2 \sin.\varphi^2 \cos.{}^2\varphi^2}.$$

Въ этомъ уравненіи интегралъ съ положительными элементами требуетъ, чтобы его значеніе возрастало непрестанно съ φ, и слѣдовательно для $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$\text{arc. tang.} \left\{ \frac{2\lambda \text{ tang. } \varphi}{1 - (\lambda^2 + \mu^2) \text{ tang. } \varphi^2} \right\} = \pi.$$

Далѣе замѣтимъ что уравненіе

$$1 \pm 2\ \mu \text{ tang. } \varphi + (\lambda^2 + \mu^2) \text{ tang. } \varphi^2 = o \quad .$$

для tang. φ даетъ одни воображаемыя значенія. Послѣ этого въ правѣ заключить, что для $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ и для всѣхъ, какъ дѣйствительныхъ такъ и воображаемыхъ чиселъ x,

$$\text{arc. tang. } (\text{tang. } \varphi . \sqrt{1 - x^2}) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = \frac{\pi}{x^2 - a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - a}} \right\};$$

или въ другомъ видѣ

$$dU = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - a}} \cdot \frac{dx}{(\sqrt{1 - a} + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пусть

$$x = \frac{2r}{1 + r^2}, \qquad \kappa^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{1 + \sqrt{1 + a}};$$

Находимъ

$$dU = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a}\ (1 + \sqrt{1 - a})} \cdot \frac{dr}{1 - \kappa^2 r^2}.$$

Интегрируя отъ $r = o$,

$$U = \frac{\pi}{2\sqrt{a}\sqrt{1 - a}} \log. \left(\frac{1 + \kappa r}{1 - \kappa r}\right).$$

Сравнивая это значеніе U съ прежнимъ и вводя снова x, получимъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi \sin. \varphi}{1 - a \sin. \varphi^2} \log. \left(\frac{1 + x \sin. \varphi}{1 - x \sin. \varphi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{1 - a}} \log. \left\{ \frac{x\sqrt{a} + (1 - \sqrt{1 - a})\ (1 - \sqrt{1 - x^2})}{x\sqrt{a} - (1 - \sqrt{1 - a})\ (1 - \sqrt{1 - x^2})} \right\}$$

или, ставя x вмѣсто sin. φ, b вмѣсто x,

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1-ax^2)\sqrt{1-x^2}} \log.\left(\frac{1+bx}{1-bx}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{1-a}} \log.\left\{\frac{b\sqrt{a}+(1-\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-b^2})}{b\sqrt{a}-(1-\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-b^2})}\right\}, \qquad (94)$$

гдѣ a, b произвольныя дѣйствительныя или воображаемыя числа, кромѣ тѣхъ, которыя дѣлаютъ элементъ интеграла безконечно великимъ.

Интегралъ (94) даетъ прежній (92), когда полагаемъ $a = \sin.\beta^2$, $b = \sin.\alpha$, $x = \sin.\varphi$.

Если въ уравненіи (94) ставимъ.

$$b = \sqrt{\frac{B+1}{B-1}},$$

$$a = \frac{B+1}{B-1}\cdot\frac{A-1}{A+1},$$

$$e^u = \frac{\sqrt{B-1}+x\sqrt{B+1}}{\sqrt{B-1}-x\sqrt{B+1}}$$

и распространяемъ интегрированіе отъ $u = o$ для всѣхъ значеній, которыя отвѣчаютъ значеніямъ x, отъ $x = o$ до $x = 1$, то получимъ

$$\int \frac{u\,du\,(e^u - e^{-u})}{(e^{2u}+e^{-2u}+2A)\sqrt{e^u+e^{2u}+2B}} =$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{B-1}{(A-1)(B+1)(B-A)}} \times \log.\left\{\frac{\frac{(B+1)\sqrt{A-1}}{\sqrt{B-1}+\sqrt{-1}}+\sqrt{(B-1)(A+1)-\sqrt{2B-2A}}}{\frac{(B+1)\sqrt{A-1}}{\sqrt{B-1}+\sqrt{-1}}-\sqrt{(B-1)(A+1)+\sqrt{2B-2A}}}\right\} \qquad (95)$$

Умножая на $\sqrt{2B}$ и полагая послѣ $B = \infty$, находимъ

$$\int_0^\infty \frac{u\,du\,(e^u - e^{-u})}{e^{2u}+e^{-2u}+2A} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\sqrt{A-1}}} \log.\left(\frac{\sqrt{A-1}+\sqrt{A+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{A-1}-\sqrt{A+1}+\sqrt{2}}\right).$$

Если дѣлаемъ

$$2A = e^{2a} + e^{-2a},$$

то

$$\int_0^\infty \frac{u du\ (e^u - e^{-u})}{e^{2u} + e^{-2u} + e^{2a} + e^{-2a}} = \frac{\pi a}{2\ (e^a - e^{-a})}. \qquad (96)$$

Еслижъ $A = \cos.\ 2\alpha$, то

$$\int_0^\infty \frac{u du\ (e^u - e^{-u})}{e^{2u} + e^{-2u} + 2\cos.\ 2\alpha} = \frac{\pi \alpha}{4\ \sin.\ \alpha}. \qquad (97)$$

Два послѣдніе интеграла въ моемъ сочиненіи *о Началахъ Геометріи* были выведены по другому способу.

Интегралъ (94) можетъ сдѣлать болѣе общимъ. Означаемъ $f(x)$ какую нибудь функцію отъ x и предположимъ, что въ уравненіи

$$f\ (x) = o$$

съ неизвѣстнымъ x, дѣйствительные корни не заключаются въ границахъ $x = +a$, $x = -a$; за тѣмъ всѣ корни, какъ дѣйствительные такъ и воображаемые, будутъ

$$a_1, \qquad a_2, \qquad a_3, \ldots.$$

и слѣдовательно

$$f\ (x) = (-a_1 + x)\ (-a_2 + x)\ (-a_3 + x).....$$

Если теперь $x = a.\ y$, то по примѣру интеграла (94) пишемъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{y\, dy}{(1 - \kappa\, y^2)\sqrt{1 - y^2}} \log.\ (-a_1 + a\, y)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}\sqrt{1-\kappa}} \log. \frac{a\sqrt{\kappa} - (1 - \sqrt{1-\kappa})(a_1^2 + \sqrt{a_1^2 - a^2})}{a\sqrt{\kappa} + (1 - \sqrt{1-\kappa})(a_1 + \sqrt{a_1^2 - a^2})}.$$

Вводя снова x, получимъ

$$\int_{-a}^{+a} \frac{x\,dx}{(a^2 - \kappa x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} \log.\ (x - \alpha_1)$$

$$= \frac{\pi a}{\sqrt{\kappa}\sqrt{1-\kappa}} \log. \left\{ \frac{a\sqrt{\kappa} - (1 - \sqrt{1-\kappa})(\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - a^2})}{a\sqrt{\kappa} + (1 - \sqrt{1-\kappa})(\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - a^2})} \right\}.$$

Складывая подобные интегралы для всѣхъ корней уравненія

$$f(x) = o$$

и означая для краткости

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1-\kappa}}{\sqrt{\kappa}}$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - a^2}}{a}$$

$$A_2 = \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - a^2}}{a}$$

и т. д.

заключаемъ, что для всякой функціи $f(x)$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{x\,dx}{(a^2 - \kappa x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} \log.\ f(x)$$

$$= \frac{\pi a}{\sqrt{\kappa}\sqrt{1-\kappa}} \cdot \log. \left(\frac{1 - \lambda A_1}{1 + \lambda A_1} \cdot \frac{1 - \lambda A_2}{1 + \lambda A_2} \cdots \right), \qquad (98$$

не забывая однакожъ, что значенія x во всемъ пространствѣ интегрированія не должны дѣлать $a^2 - \kappa x^2 = o$, $f(x) = o$. Впрочемъ можно полагать $\kappa = o$ и $\kappa = \infty$, чтобы найти границы, къ которымъ приближаются значенія интеграла, съ уменьшеніемъ всякаго κ и съ возрастаніемъ дѣйствительнаго отрицательнаго числа κ. Такъ интегралъ (98) переходитъ въ два новые

$$\int_{-a}^{+a} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \log.\ f(x)$$

$$= -\pi a^2 \left\{ \alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - a^2} + \alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - a^2} + \cdots \right\}, \qquad (99$$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} \log. f(x) = 2\pi a \left\{ \text{arc. tang.} \left(\frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - a^2}}{a} \right) \right.$$

$$\left. + \text{arc. tang.} \left(\frac{-\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - a^2}}{a} + \cdots \right) \right. \qquad (100)$$

Напримѣръ въ послѣднемъ интегралѣ полагая $a = 1$, $f(x) = 1 + x \sin. \omega$, гдѣ ω постоянное, находимъ

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \log. \frac{1 + x \sin. \omega}{1 - x \sin. \omega} = \pi\omega. \qquad (101)$$

Если α постоянный уголъ, n цѣлое число нечотное и m числа отъ единицы до $\frac{1}{2}(n-1)$, то означая

$$M = \cos. \frac{(2m+1)\pi}{n} + \cos. \left(\tfrac{1}{4}\pi + \frac{2m+1}{2n}\pi\right) \sqrt{2 \sin. \frac{(m+1)\pi}{n}},$$

$$N = 1 + 2 \sin. \frac{(2m+1)\pi}{n} + 2 \sin. \left(\tfrac{1}{4}\pi + \frac{2m+1}{n}\pi\right) \sqrt{2 \sin. \left(\frac{2m+1}{n}\pi\right)},$$

помощію интеграла (98) находимъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x\,dx}{(1 - x^2 \sin. \alpha^2)\sqrt{1-x^2}} \log. \left(\frac{1-x^n}{1-x} \right)$$

$$= \frac{\pi}{\sin. \alpha \cos. \alpha} \Sigma \log. \left(\frac{1 - 2 \text{ tang. } \frac{1}{2}\alpha . M + \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha^2 . N}{1 + 2 \text{ tang. } \frac{1}{2}\alpha . M + \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha^2 . N} \right), \qquad (102)$$

гдѣ знакъ суммы относится къ числамъ m отъ $m = 1$ до $m = \frac{1}{2}(n-1)$.

Полагая здѣсь $\alpha = o$, получимъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \log. \left(\frac{1-x^n}{1-x} \right)$$

$$= \pi - 2\pi \Sigma \cos. \left(\tfrac{1}{4}\pi - \frac{2m+1}{n}\pi\right) \sqrt{2 \sin. \left(\frac{2m+1}{n}\pi\right)}. \qquad (103)$$

Изъ общаго выраженія (98) можно найти интегралъ

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1 - \kappa x^2)\sqrt{1-x^2}} \log. \left(\frac{\sin. a + \sin. b x}{\sin. a - \sin. b x} \right) =$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1 - \kappa x^2)\sqrt{1-x^2}} \log. \left\{ \text{tang. } \tfrac{1}{2}(a + bx) . \text{ cot. } \tfrac{1}{2}(a - bx) \right\}$$

для дѣйствительныхъ чиселъ $a^2 > b^2$.

Вообще замѣтимъ, что если α_1 корень уравненія

$$f\,(x) = o$$

для какой нибудь функціи $f\,(x)$; то

$$\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - a^2} \qquad\qquad \alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - a^2}$$

будутъ корнями уравненія

$$f\,\{\tfrac{1}{2}\,a\,(x + \tfrac{1}{x})\} = o.$$

Итакъ, ежели $\mathfrak{G}\,(x)$ такая функція отъ x, что

$$f\,\{\tfrac{1}{2}\,a\,(x + \tfrac{1}{x})\} = \mathfrak{G}\,(x).\ \mathfrak{G}\,(\tfrac{1}{x}),$$

то интегралу (98) можно дать видъ

$$\int_{-a}^{+a} \frac{x\,d\,x}{(a^2 - \varkappa\,x^2)\,\sqrt{a^2 - x^2}}\ \log.\ f\,(x)$$

$$= \frac{\pi\,a}{\sqrt{\varkappa}\,\sqrt{1 - \varkappa}} \cdot \mathrm{Log.}\left\{\frac{\mathfrak{G}\,(\sqrt{\tfrac{1}{\varkappa}} + \sqrt{\tfrac{1}{\varkappa} - 1})}{\mathfrak{G}\,(-\sqrt{\tfrac{1}{\varkappa}} - \sqrt{\tfrac{1}{\varkappa} - 1}).\ \mathfrak{G}\,(-1)}\right\} \qquad (104)$$

Здѣсь однакожъ $f\,(x)$ подразумѣвается алгебраическая фупкція отъ x или безконечная строка, которая можетъ разлагаться на производители.

Объ интегралѣ (98) еще замѣтимъ , что хотя въ $\sqrt{\ }\ \varkappa$ знакъ произвольный; но $\sqrt{1 - \varkappa}$, $\sqrt{\alpha_1^2 - a^2}$ должны быть или положительныя числа, если дѣйствительныя, или съ тѣмъ знакомъ, который принятъ въ дѣйствительной части, когда бы корень былъ воображаемый.

Интегралъ (92), если ставимъ сюда

$$\cos.\ r\ \sin.\ \gamma = \cos.\ \varrho,$$

$$\mathrm{tang.}\,\varphi = \frac{\sqrt{\sin.\ \gamma^2 - \sin.\ \varrho^2}}{\sin.\ \varrho\ \cos.\ h}$$

и интегрируемъ по частямъ, дѣлается

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi\,d\,\varphi\ \sin.\ \varphi}{(1 - \sin.\ h^2\ \sin.\ \varphi^2)\,\sqrt{\sin.\ \gamma^2 - \sin.\ \varphi^2}}$$

$$= \frac{\pi\ \log.\left(\dfrac{\cos.\ h + \sqrt{1 - \sin.\ \gamma^2\ \sin.\ h^2}}{2\ \cos.\ \gamma\ \sin.\ \frac{1}{2}\ h^2}\right)}{2\ \cos.\ h\,(1 - \sin.\ \gamma^2\ \sin.\ h^2)} \qquad (105)$$

Значеніе этого интеграла можетъ быть представлено строкой, гдѣ множитель при sin. h^{2n} съ цѣлымъ показателемъ n будетъ

$$\int_0^\gamma \frac{\varphi\, d\varphi \sin.\ \varphi^{2n+1}}{\sqrt{\sin.\ \gamma^2 - \sin.\ \varphi^2}} < \sin.\ \gamma^{2n+2} \int_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sqrt{\cos\varphi^2 - \cos.\ \gamma^2}}$$

$$< \tfrac{1}{2}\pi \sin.\ \gamma^{2n+1} \text{ tang. } \gamma.$$

Итакъ строка для интеграла (105) и въ томъ случаѣ исчезаетъ, когда вмѣсто sin. h ставимъ $\frac{1}{\sin.\ h}$, лишь бы къ тому sin. $h >$ sin. γ. Въ такомъ случаѣ интегралъ (105) дѣлается

$$\int_0^\gamma \frac{\varphi\, d\varphi \sin.\ \varphi}{(\sin.\ h^2 - \sin.\ \varphi^2)\sqrt{\sin.\ \gamma^2 - \sin.\ \varphi^2}}$$

$$= \frac{\pi\left(h - \text{arc. cos. } \frac{\cos.\ h}{\cos.\ \gamma}\right)}{2 \cos.\ h \sqrt{\sin.\ h^2 - \sin.\ \gamma^2}}. \qquad (106)$$

Для $h = \frac{1}{2}\pi$ оба интеграла даютъ одинаково

$$\int_0^\gamma \frac{\varphi\, d\varphi \sin.\ \varphi}{\cos.\ \varphi^2 \sqrt{\sin.\ \gamma^2 - \sin.\ \varphi^2}} = \frac{\pi \sin.^2 \frac{1}{2}\gamma^2}{\cos.\ \gamma^2}. \qquad (107)$$

Беремъ снова выраженіе (89) для прямого конуса, съ кругомъ въ основаніи,

$$P = \tfrac{1}{4}\pi\,(r \cos.\ \varphi - h).$$

Если вводимъ сюда ϱ полупоперечникъ круга, α уголъ ϱ съ ребромъ r, то согласно съ уравненіями (4), (5) должны принимать

$$\cos.\ r' \cos.\ \alpha = \cos.\ \varrho', \qquad \text{tang. } \alpha = \cos.\ h \text{ tang. } \varrho'.$$

Послѣ чего объемъ всего конуса дѣлается

$$P = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ \varrho'} \log. \frac{\text{coc. } \alpha + \cos.\ \varrho'}{\cos.\ \alpha - \cos.\ \varrho'} - \log. \frac{\text{tang. } \varrho' + \text{tang. } \alpha}{\text{tang. } \varrho' - \text{tang. } \alpha} \right\}$$

или

$$\frac{2}{\pi} P = \frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ \varrho'} \log. \left\{ \cot.\ \tfrac{1}{2}(\varrho' + \alpha).\ \cot.\ \tfrac{1}{2}(\varrho' - \alpha) \right\} - \log. \frac{\sin.\ (\varrho' + \alpha)}{\sin.\ (\varrho' - \alpha)}.$$

Уголъ α увеличивается съ h и приближается къ ϱ' до того, что наконецъ безъ чувствительной погрѣшности можно принимать

$$P = \tfrac{1}{2}\pi \frac{\varrho' - \alpha}{\text{sin. } \alpha} \text{ log. } (\varrho' - \alpha) - \pi \text{ log. sin. } \alpha;$$

слѣдовательно съ $h = \infty$ объемъ конуса съ параллельными ребрами въ высотѣ будетъ

$$P = -\pi \text{ log. sin. } \alpha$$

или, все равно,

$$P = -\pi \text{ log. sin. } \varrho'.$$

Для всякаго другого конуса съ произвольнымъ основаніемъ и котораго ребра параллельны высотѣ

$$P = -\tfrac{1}{2} \int d\omega \text{ log. sin. } \varrho', \qquad (108$$

гдѣ ω уголъ, который описываетъ плоскость, проходя чрезъ ось конуса, ϱ разстояніе отъ конца высоты внизу до окружности основанія.

Между тѣмъ уравненіе (90) для $h = \infty$ и слѣдовательно для $h' = o$, дѣлается

$$P = \tfrac{1}{2} \int d\, x' \text{ log. cot. } \tfrac{1}{2}\, y'.$$

Послѣ чего

$$-\int d\, \omega \text{ log. sin. } \varrho' = \int d\, x' \text{ log. cot. } \tfrac{1}{2}\, y' \qquad (109)$$

гдѣ x берется отъ конца оси на линіи, отъ которой считается уголъ ω, если же первый интегралъ начинается съ $\omega = o$ и оканчивается съ $\omega = \frac{1}{2}\pi$, то второй берется отъ $x' = \frac{1}{2}\pi$ до $y' = \frac{1}{2}\pi$. Здѣсь зависимость перемѣнныхъ опредѣляется уравненіями

$$\text{sin. } \varrho' = \text{sin. } x' \text{ sin. } y', \qquad \text{tang. } \omega = \text{cos. } y' \text{ tang. } x'.$$

Такъ что произвольная функція y' отъ x' ограничивается только тѣмъ условіемъ, чтобы x' былъ дѣйствительный уголъ для $y' = \frac{1}{2}\pi$.

Для примѣра беремъ

$$\text{sin. } \alpha^2 = \text{sin. } x'^2 \text{ sin. } y'^2 + \text{sin. } \beta^2 \text{ cos. } x'^2$$

съ постоянными α, β. Находимъ

$$\text{sin. } \varrho'^2 = \frac{\text{sin } \alpha^2 - \text{sin. } \beta^2 \text{ cos. } \omega^2}{1 - \text{sin. } \beta^2 \text{ cos. } \omega^2}.$$

Уравненіе (109) теперь дѣлается

$$\frac{1}{2\sqrt{\text{sin. }\alpha^2 - \text{sin. }\beta^4}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \text{ log. }\left(\frac{\text{sin. }\alpha^2 - \text{sin. }\beta^2 \text{ cos. }\omega^2}{1 - \text{sin. }\beta \text{ cos. }\omega}\right)$$

$$= \int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy \text{ cos. } y \text{ sin. } y \text{ log. cot. } \frac{1}{2} y}{(\text{sin. } y^2 - \text{sin. } \beta^2)\sqrt{\text{sin. } y^2 - \text{sin, } \alpha}}$$

Ставя сюда значеніе второго интеграла [см. урав. (91)], получимъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \text{ log. }\left(\frac{\text{sin. }\alpha^2 - \text{sin. }\beta^2 \text{ cos. }\omega^2}{1 - \text{sin. }\beta^2 \text{ cos. }\omega^2}\right) = \pi \text{ log. (cot. } \tfrac{1}{2}\beta \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\gamma),$$

гдѣ $\text{sin. } \beta = \text{sin. } \alpha \text{ sin. } \gamma$. Отсюда не трудно заключить, что для произвольныхъ угловъ α, β

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \text{ log. }\left(\frac{1 - \text{sin. }\alpha^2 \text{ cos. }\omega}{1 - \text{sin. }\beta^2 \text{ cos. }\omega^2}\right) = 2\pi \text{ log. }\left(\frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\alpha}{\text{cos. } \frac{1}{2}\beta}\right) \qquad (110)$$

или полагая, $\beta = o$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \text{ log. } (1 - \text{sin. } \alpha^2 \text{ cos. } \omega^2) = 2\pi \text{ log. } (\text{cos. } \tfrac{1}{2}\alpha). \qquad (111)$$

Когда сюда ставимъ

$$\text{cos. } \alpha = \frac{1-a}{1+a}$$

и $\frac{1}{2}\omega$ вмѣсто ω, то получимъ для $a < 1$

$$\int_0^{\pi} d\omega \text{ log. } (1 + a^2 - 2a \text{ cos. } \omega) = o.$$

Для $a > 1$ и полагая

$$\text{cos. } \alpha = \frac{a-1}{a+1}$$

напротивъ

$$\int_0^{\pi} d\omega \text{ log. } (1 + a^2 - 2a \text{ cos. } \omega) = 2\pi \text{ log. } a$$

какъ нашелъ и Пуассонъ [Journal de l' Ecole polyt. Cah. 17 (*)]

Интегрированіе по частямъ въ уравненіи (110) даетъ для всякихъ угловъ $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, $\beta < \frac{1}{2}\pi$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\omega\, d\,\omega \sin.\ \omega \cos.\ \omega}{(1 - \sin..\ \alpha^2 \cos.\ \omega^2)\ (1 - \sin.\ \beta^2 \cos.\ \omega)}$$

$$= \frac{\pi}{\cos.\ \alpha^2 - \cos.\ \beta^2} \log. \left(\frac{\cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha}{\cos.\ \frac{1}{2}\ \beta}\right).$$

Отсюда не трудно видѣть, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega\, d\,\omega \sin.\ \omega}{(1 - \cos.\ \alpha \cos.\ \omega)\,(1 - \cos.\ \beta \cos.\ \omega)}$$

$$= \frac{\pi}{\sin.\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin.\ \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \log. \left(\frac{1 + \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ \alpha}{1 + \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ \beta}\right). \qquad (113)$$

Для $\alpha = \beta$ это уравненіе дѣлается

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega\, d\,\omega \sin.\ \omega}{(1 - \cos.\ \alpha \cos.\ \omega)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2.\ \sin.\ \alpha \cos.\ \frac{1}{2}\alpha \sin.\ (\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\ \alpha)}} \qquad (114)$$

Интегралъ (111) находимъ помощію двойнаго интегрированія, полагая

$$u = \int\int \frac{d\,\omega\, d\,a \cos.\ \omega^2}{1 + a \cos.\ \omega^2}$$

отъ $\omega = o$, $a = o$ до $\omega = \frac{1}{2}\pi$ и до a неопредѣленнаго. Интегрированіе въ отношеніи къ α даетъ

(*) Другіе примѣры, какимъ образомъ одному интегралу могутъ принадлежать различныя значенія, находимъ тоже у Пуассона (Mémoires sur le calcul num. des intégr. définis. Mémoires de l' Acad. d. scien. de l' Inst. de France, 1823, p. 601). Тутъ можно видѣть интегралъ, который бываетъ вмѣстѣ 0 и 2. Если что нибудь подобное изъ моихъ интеграловъ вывелъ и тотъ, кто написалъ въ № 41 Сына Отечества 1834 года критику на мое сочиненіе *о началахъ Геометріи*, то или долженъ быть онъ несвѣдущъ, или по крайней мѣрѣ слишкомъ поспѣшенъ въ своемъ сужденіи, неразличая тѣхъ случаевъ, когда интегралу принадлежатъ различныя значенія, и называя ихъ *нелѣпыми*.

$$u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log.\ (1 + a \cos.\ \omega^2)$$

Интегрированіе сперва въ отношеніи къ ω, потомъ въ отношеніи къ a будетъ такое:

$$u = \tfrac{1}{2}\pi \log.\ a - \int\int \frac{d\,a\,d\,\omega}{a\,(1 + a \cos.\ \omega^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \log.\ a - \tfrac{1}{2}\pi \int \frac{d\,a}{a\sqrt{1+a}}$$

$$= \pi \log.\ \tfrac{1}{2}\,(1 + \sqrt{1+a}).$$

Итакъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,\omega \log.\,(1 + a \cos.\ \omega^2) = \pi \log,\left(\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}\right) \qquad (115)$$

Само по себѣ разумѣется, что сюда не принадлежатъ тѣ случаи, когда элементъ подъ знакомъ интеграла дѣлается нулемъ для какого нибудь значенія ω. Можно слѣдовательно полагать $a = -\sin.\ \alpha^2$ и тогда получимъ интегралъ (111). Можемъ еще принимать $a = \text{tang.}\ \alpha^2$ для всякаго угла α и такимъ образомъ находимъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,\omega \log.\ (1 + \text{tang.}\ \alpha^2 \cos.\ \omega^2) = \pi \,\text{long.}\left(\frac{\cos.\ \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos.\ \alpha}\right) \qquad (119)$$

Для конуса, котораго P объемъ, h высота, c ребро, φ уголъ между h и c, ω уголъ плоскостей проведенныхъ чрезъ h, найдено было [урав. (88)]

$$d\,P = \tfrac{1}{2}\,d\,\omega\,(c \cos.\ \varphi - h).$$

Такой конусъ дѣлается пирамидой, когда основаніе треугольникъ, гдѣ пусть x, y катеты, изъ которыхъ y лежитъ противъ ω (чер. 8) и можетъ быть принятъ за высоту той же пирамиды съ треугольнымъ основаніемъ изъ перпендикурныхъ другъ къ другу линій x, h. Называемъ здѣсь q гипотенузу θ уголъ противъ h, ψ уголъ между c и y. Объемъ пирамиды можетъ слѣдовательно быть выраженъ еще такъ

$$P = \tfrac{1}{2}\int d\,\theta\,(c \cos.\ \psi - y).$$

Сравненіе двухъ значеній P даетъ

$$\int d\,\omega\,(c \cos.\ \varphi - h) = \int d\,\theta\,(c \cos.\ \psi - y) \qquad (117)$$

Первый интегралъ начинается съ $\omega = o$ и предполагаетъ h постояннымъ, второй начинается съ $\theta = o$ и предполагаетъ y постояннымъ. Если означаемъ p гипотенузу въ треугольникѣ изъ катетовъ x, h, то зависимость всѣхъ чиселъ въ обоихъ интегралахъ будетъ выражена уравненіями:

$$\begin{aligned}
&\cos.\ c'\ \cos.\ \varphi = \cos.\ h' && \cos.\ c'\ \cos.\ \psi = \cos.\ y'\\
&\sin.\ c' = \sin.\ h'\ \sin.\ p' && \sin.\ c' = \sin.\ y'\ \sin.\ q'\\
&\tang.\ p' = \sin.\ y'\ \sin.\ \omega && \tang.\ c' = \tang.\ q'\ \sin.\ \psi\\
&\cos.\ p'\ \cos.\ \omega = \cos.\ x' && \cos.\ q'\ \cos.\ \theta = \cos.\ x'\\
&\tang.\ \omega = \cos.\ y'\ \taug.\ x' && \tang.\ \theta = \cos.\ h'\ \tang.\ x'
\end{aligned}$$

Если $y = \infty$, то какъ видѣли выше [урав. (108)]

$$P = -\tfrac{1}{2}\int d\ \theta\ \log.\ \sin.\ q' \qquad (118)$$

или

$$P = \tfrac{1}{4}\int d\,\theta\ \log.\ \frac{\cos.\ \theta^2}{\sin.\ (x' - \theta)\ \sin.\ (x' + \theta)}, \qquad (119)$$

гдѣ x' постоянное. Дифференцируя уравненіе (118) сперва въ отношеніи къ θ, потомъ въ отношеніи къ q, получимъ

$$d^2\ P = -\tfrac{1}{2}\, d\,\theta\, d\, q'\ \cot.\ q'.$$

Еслижъ съ такимъ измѣненіемъ q перемѣняемъ въ зависимости съ нимъ x', то находимъ

$$d\ q'\ \cot.q' = \frac{d\,x'\ \sin.\ x'\ \cos.\ x'}{\cos.\ \theta^2 - \cos.\ x'^2}$$

Послѣ чего

$$d\ P = -\tfrac{1}{2}\cdot\ \frac{d\,\theta\, d\,x'\ \sin.\ x'\ \cos.\ x'}{\cos.\ \theta^2 - \cos.\ x'^2}.$$

Интегрированіе въ отношеніи къ θ даетъ

$$d\,P = -\tfrac{1}{4}\, d\,x'\ \log.\ \left(\frac{1 + \cot.\ x'\ \tang.\ \theta}{1 - \cot.\ x'\ \tang.\ \theta}\right) \qquad (120)$$

или

$$d\ P = -\tfrac{1}{2}\ h.\ d\ x'.$$

Вставляя сюда значеніе x', получимъ

$$P = \text{sin. } 2\,\theta \int \frac{h\,d\,h}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\,\text{cos. } 2\,\theta}, \tag{122}$$

гдѣ θ разсматривается постояннымъ. Сравненіе интегралovъ (119), (120) и (122) приводитъ къ уравненіямъ

$$\int_0^{\theta} d\,\theta\,\text{log. } \left\{\frac{\text{cos. } \theta^2}{\text{cos. } (x-\theta)\,\text{cos. } (x+\theta)}\right\}$$

$$= \int_0^{x} d\,x\,\text{ log. } \left\{\frac{\text{cos. } (x+\theta)}{\text{cos. } (x'-\theta)}\right\} \tag{123}$$

$$\int_x^{\frac{1}{2}\pi} d\,x\,\text{log. } \left\{\frac{\text{sin. } (x'+\theta)}{\text{sin. } (x'-\theta)}\right\},$$

$$= \text{sin. } 2\,\theta \int_0^{h} \frac{h\,d\,h}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\,\text{cos. } 2\,\theta} \tag{124}$$

Первое изъ этихъ уравненій повѣряется диференцированіемъ въ отношеніи къ x и θ; втое значеніемъ

$$h = \tfrac{1}{2}\,\text{log. } \left\{\frac{\text{sin. } (x'+\theta)}{\text{sin. } (x'-\theta)}\right\}.$$

Пусть основаніе конуса будетъ четыреугольникъ, котораго бока y, x, ξ, η (черт. 3) перпендикулярны другъ къ другу; а высота конуса, поставленная въ точкѣ соединенія x съ ξ, пусть простирается безконечно. Объемъ такого конуса будетъ [урав. (121)]

$$P = -\tfrac{1}{2} \int y\,d\,x'$$

и составляется изъ двухъ пирамидъ, которымъ основаніями служатъ прямоугольные треугольники съ катетами x, y и ξ, η, гдѣ углы при высотѣ β, $\frac{1}{2}\pi - \beta$ противъ y, η. Итакъ

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} y\,d\,x' = 2\,\text{sin. } 2\,\theta \int \frac{y\,d\,y}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\,\text{cos. } 2\,\beta}$$

$$+ 2\,\text{sin. } 2\,\beta \int \frac{\eta\,d\,\eta}{e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2\,\text{cos. } 2\,\beta}$$

Здѣсь перемѣнныя β, y, x, η, опредѣляются взаимно уравненіями

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \beta &= \cos. y' \text{ tang. } x' \\ \cos. \xi' &= \cos. y' \sin. x' \\ \text{tang. } \eta' &= \sin. y' \text{ tang. } x' \end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

Разсматривая ξ' постояннымъ, находимъ

$$\int y\, d\, x' = \tfrac{1}{2} \int d\, x' \log. \left(\frac{\sin. x' + \cos. \xi'}{\sin. x' - \cos. \xi'} \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \int d\, x' \log. \frac{\text{tang. } (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x' - \frac{1}{2} \xi')}{\text{tang. } (\frac{1}{2} x' + \frac{1}{2} \xi' - \frac{1}{4}\pi)}.$$

Послѣдній интегралъ представляетъ значеніе

$$\int d\, u \log. \text{ tang. } u - \int d\, v \log. \text{ tang. } v$$

конгда интегрированіе распространяется

$$\text{отъ } u = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} x' - \tfrac{1}{2} \xi' \qquad \text{до } u = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2} \xi'$$

$$v = \tfrac{1}{2} x' + \tfrac{1}{2} \xi' - \tfrac{1}{4}\pi \qquad v = \tfrac{1}{2} \xi'$$

Но къ такимъ интегралам можно приложить

$$\int d\, u \log. \text{ tang. } u = o \qquad \begin{cases} u = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2} \xi' \\ u = \tfrac{1}{2} \xi' \end{cases}$$

Послѣ чего всѣ три интеграла соединятся въ одинъ:

$$\int d\, u \log. \text{ tang. } u \qquad \begin{cases} u = \tfrac{1}{2} x' + \tfrac{1}{2} \xi' - \tfrac{1}{4}\pi \\ u = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} x_{,} - \tfrac{1}{2} \xi' \end{cases}$$

или, все равно, въ такой

$$\int \frac{z\, d\, z}{e^z + e^{-z}} \qquad \begin{cases} z = \text{log. tang. } (\frac{1}{2} x' + \frac{1}{2} \xi' - \frac{1}{4}\pi) \\ z = \text{log. tang. } (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x' - \frac{1}{2} \xi') \end{cases}$$

Такъ находимъ

$$\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} = 2 \text{ sin. } 2\beta \int_0 \frac{y\,dy}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \text{ cos. } 2\beta}$$

$$+ 2 \text{ sin. } 2\beta \int_0 \frac{\eta\,d\eta}{e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2 \text{ cos. } 2\beta}$$

Для $y = \infty$ также $\eta = \infty$; слѣдовательно

$$\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} = 4 \text{ sin. } 2\beta \int_0^\infty \frac{y\,dy\,(e^{2y} + e^{-2y})}{(e^{2y} + e^{-2y})^2 - 4 \text{ cos. } 2\beta^2} \qquad (126)$$

Между тѣмъ первыя два изъ уравненій (125) для $y' = o$ показываютъ, что $x' = \beta$, $\xi' = \frac{1}{2}\pi - \beta$. Послѣ чего уравненіе (126), когда поставимъ сюда $\frac{1}{2}y$ вмѣсто y и $\frac{1}{4}\beta$ вмѣсто β, дѣлается для всякаго произвольнаго угла β:

$$\int_0^\infty \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} = \text{sin. } \tfrac{1}{2}\beta \int_0^\infty \frac{y\,dy\,(e^y + e^{-y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \text{ cos. } \beta} \qquad (127)$$

гдѣ первый интегралъ начинается съ $z = \text{log. tang. } \frac{1}{2}\beta$ (*)

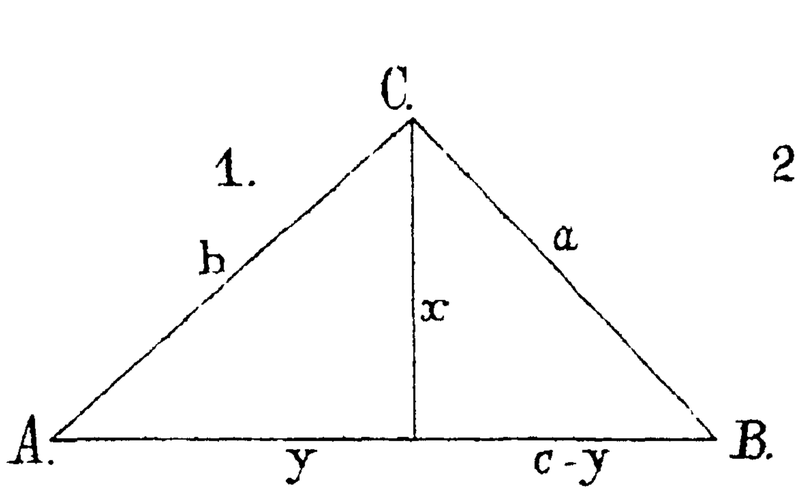
Вотъ нѣсколько примѣровъ, которые придумалъ я на этотъ разъ для примѣненія Воображаемой Геометріи къ Аналитикѣ. Особенно заслуживаетъ примѣчанія, и съ трудомъ могло бы иначе быть сдѣлано, приведеніе неопредѣленныхъ интеграловъ

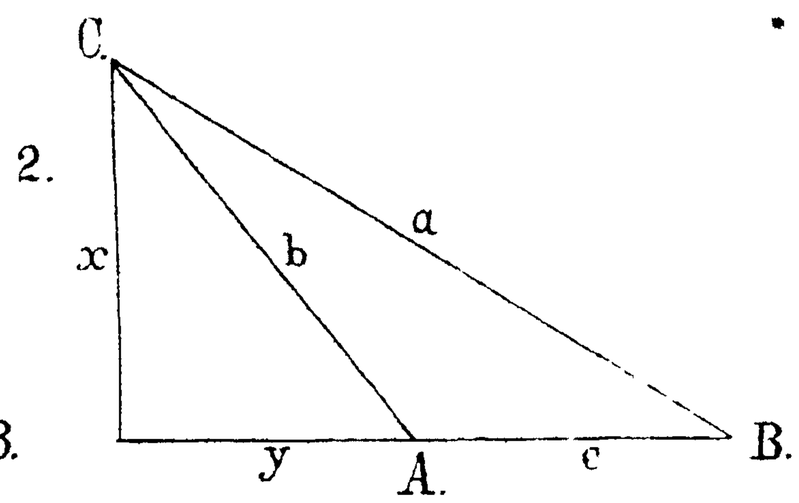
$$\int \frac{dx \text{ sin. } x \text{ log. cot. } \frac{1}{2}x}{(a - \text{sin. } x^2)\sqrt{b - \text{sin. } x^2}}, \qquad \int \frac{x\,dx \text{ sin. } x}{(a - \text{sin. } x^2)\sqrt{b - \text{sin. } x^2}}$$

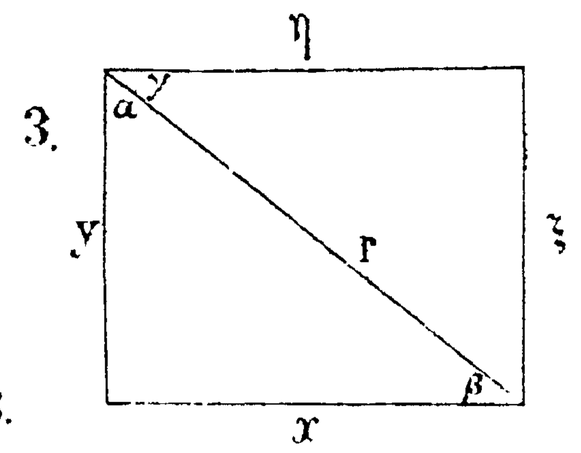
къ одному интегралу $\int dx \text{ log. cos. } x$. Такое приведеніе показано въ моемъ сочиненіи *о началахъ Геометріи*, когда составлялъ я всякую трехсторонюю пирамиду изъ другихъ, которыхъ ребра параллельны съ безконечною высотою.

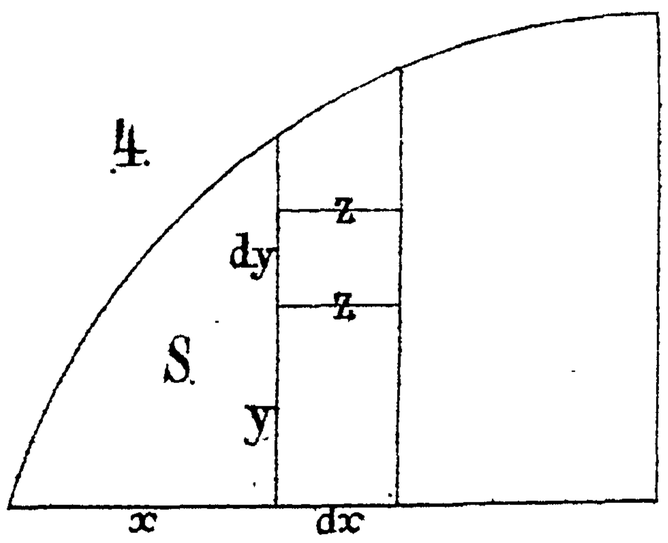
(*) Интегралъ (127) вычисленъ здѣсь вѣрно, какъ и въ моемъ сочиненіи *о началахъ Геометріи*; но въ статьѣ, подъ названіемъ Géometrie imaginaire, которую послалъ я въ Берлинъ къ Г. Креллю для помѣщенія въ Журналѣ, прибавленъ лишній множитель 2; другую ошибку тамъ я сдѣлалъ, опустивши изъ вниманія, что уголъ β въ одной только части уравненія надобно было принимать постояннымъ.

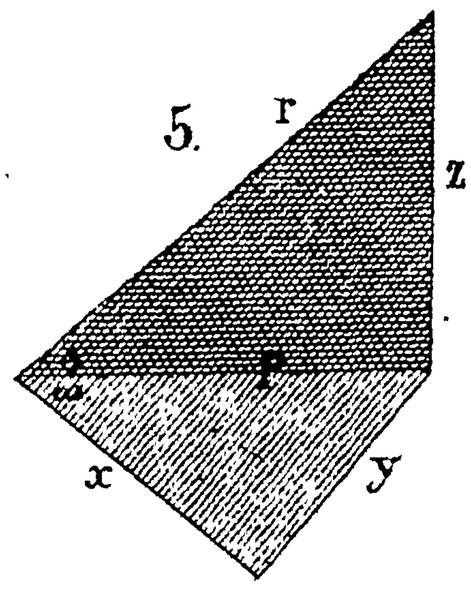
Покуда въ воображаемой Геометріи дѣло идетъ о линіяхъ одной кривизны и площадяхъ, такими линіями ограниченныхъ, еще вычисленіе можетъ быть понимаемо, какъ повтореніе тогоже, какое должно выходить для линій на сферѣ съ прибавленіемъ къ величинѣ дугъ множителя $\sqrt{-1}$. Эту перемѣну дозволяетъ Аналитика во всякомъ родѣ уравненій и приводитъ всегда къ новымъ и несомнительно вѣрнымъ заключеніямъ. Въ измѣреніи же линій двойной кривизны, поверхностей и объема тѣлъ, нельзя болѣе довольствоваться однимъ аналитическимъ измѣненіемъ вида; напротивъ еще требуется, чтобы представленіе въ пространствѣ было возможнымъ для нашего воображенія. Кажется мнѣ, что изложенное здѣсь новое Геометрическое ученіе ни въ какомъ отношеніи не противно попятію о тѣлахъ, и переходя въ аналитику, можетъ обѣщать подобную пользу той, какую въ примѣненіи оказываетъ употребительная Геометрія.

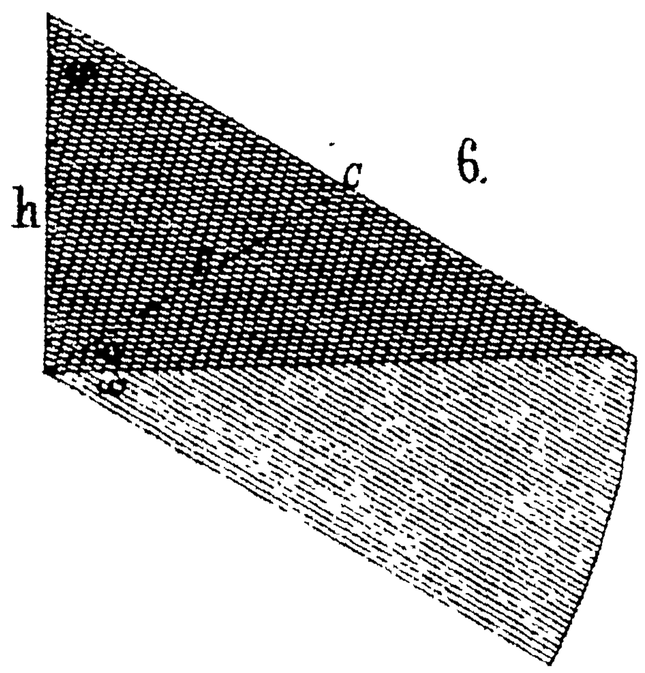

1.
C.
h
x
a
A.
y
c - y
B.

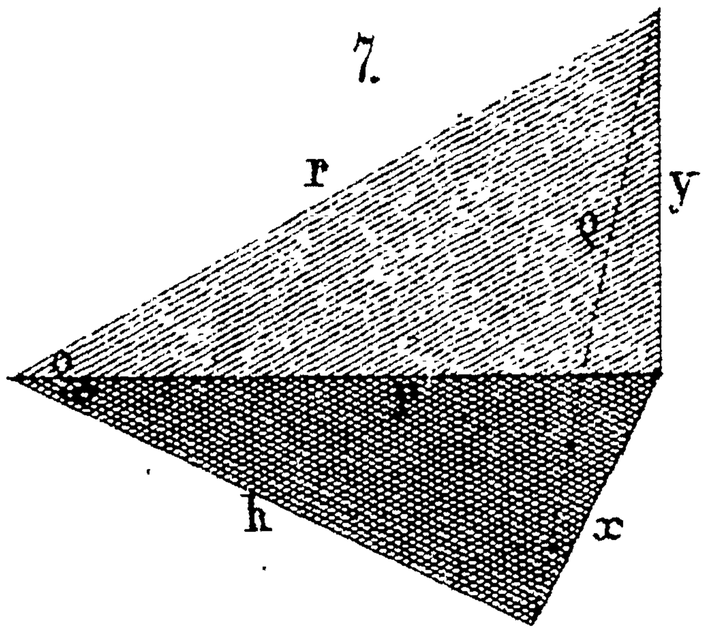

2.
C.
x
b
a
y
A.
c
B.

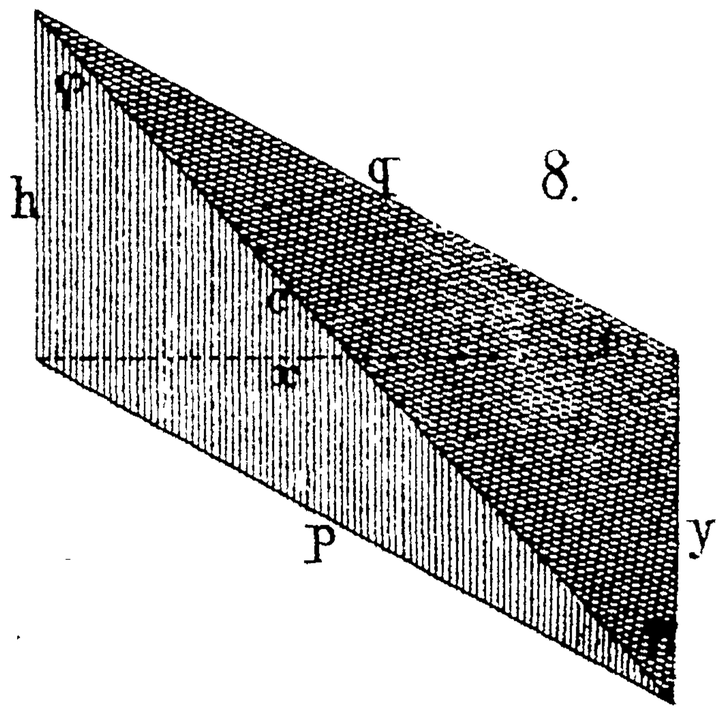

3.
η
α
γ
y
r
β
x
ξ


4.
z
dy
z
S.
y
x
dx


5.
r
z
x
y


6.
h
c


7.
r
y
q
o
p
h
x


8.
φ
q
h
c
x
P
y

1. ПРИМѢНЕНІЕ ВООБРАЖАЕМОЙ ГЕОМЕТРІИ КЪ НѢКОТОРЫМЪ ИНТЕГРАЛАМЪ.

Хотя въ Аналитикѣ всегда можемъ довольствоваться способомъ, ей исключительно свойственнымъ; однакожъ надобно въ томъ признаться, что многое до сихъ поръ оставалось бы для насъ еще неизвѣстнымъ если бы не пользовались тѣмъ пособіемъ, которое само собой является въ примѣненіи взаимномъ различныхъ отраслей математики. Если числа достаточно выражаютъ намъ всѣ величины, если въ уравненіяхъ уже заключается всякая зависимость ихъ между собою, то выводы поодиначкѣ съ искуственностію часто весьма затруднительной и нерѣдко слишкомъ удаленной отъ существенности, будутъ оставлять на сторонѣ синтеза тѣ выгоды, которыя въ немъ проистекаютъ изъ полноты представленій и тѣсной, естественной связи частей въ цѣломъ. Вотъ почему геометрическія построенія ведутъ иногда къ открытіямъ прямѣе, нежели вычисленія въ аналитикѣ, хотя здѣсь будутъ они всегда казаться посторонниимъ предметомъ, и для преподаванія мотутъ быть одобрены какъ пояснительные только примѣры. Употребительная Геометрія послужила первымъ основаніемъ, и даже теперь не перестаетъ насъ руководить, въ вычисленіи безконечно малыхъ. Она во многихъ случаяхъ указала способъ интегрированія, который потомъ перейдя въ аналитику, принялъ уже другой видъ во всей обширности. Общая Геометрія, которой далъ я названіе *Воображаемой*, подобнымъ образомъ представляетъ намъ различныя примѣненія къ интеграламъ. Она въ измѣреніи площадей тригонометрическія функціи замѣняетъ логарифмическими во всѣхъ тѣхъ выраженіяхъ, къ которымъ приводитъ Сферическая Тригонометрія. Напротивъ въ измѣреніи тѣлъ по способу Воображаемой Геометріи встрѣчаются совсѣмъ уже новые случаи, гдѣ въ свою очередь анализъ долженъ сдѣлать пополненіе введеніемъ тригонометрическихъ функцій вмѣсто логаримфмическихъ. Намѣреваясь особенно въ этотъ разъ заняться такимъ примѣненіемъ къ интеграламъ, я напередъ долженъ сослаться на тѣ поло-

женія съ ихъ главными выводами, которыя служатъ основаніемъ Воображаемой Геометріи.

Пусть всякая прямая выражается числомъ, которое собственно должно быть содержаніемъ этой линіи къ какой нибудь другой, взятой разъ навсегда произвольно.

Прямая AB (чер. 1) паралельна съ другой CD, какъ скоро перпендикулъ $AC=p$ къ этой послѣдней, дѣлаетъ съ первой острый уголъ p' такъ, что

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\, p' = e^p, \tag{1}$$

гдѣ e основаніе Неперовыхъ логарифмовъ. Въ этомъ случаѣ p' будемъ называть *угломъ паралельности къ линіи* p, разумѣя подъ линіями паралельными такія, которыя въ продолженіи своемъ не встрѣчаются, но тотчасъ должны пересѣкаться съ малѣйшимъ наклоненіемъ другъ къ другу.

По примѣру съ p, p', будемъ и всегда различать уголъ паралельности, поставивъ удареніе надъ тойже буквой, которая должна представлять здѣсь линію. Даже надъ цѣлымъ аналитическимъ выраженіемъ, заключивъ его въ скобки, будемъ на верху вправо ставить удареніе, чтобъ означить тѣмъ уголъ паралельности къ той линіи, которую выраженіе, какъ число, намъ представляетъ. Такъ для всякаго положительнаго p:

$$\text{sin. } p' = \frac{2\, e^p}{e^{2p} + 1}, \tag{2}$$

$$\text{cos. } p' = \frac{e^2 - 1}{e^{2p} + 1}, \tag{3}$$

$$\text{tang. } p' = \frac{2^{2p}\, e^p}{e^{2p} - 1}, \tag{4}$$

$$\text{cot. } p' = \tfrac{1}{2}\, (e^p - e^{-p}). \tag{5}$$

Для положительныхъ чиселъ p, q:

$$\text{sin. } (p+q)' = \frac{\text{sin. } p' \text{ sin. } q'}{1 + \text{cos. } p' \text{ cos. } q'} \tag{6}$$

$$\text{cos. } (p+q)' = \frac{\text{cos. } p' + \text{cos. } q'}{1 + \text{cos. } p' \text{ cos. } q'} \tag{7}$$

$$\text{tang.}\,(p+q)' = \frac{\sin.\,p'\sin.\,q'}{\cos.\,p' + \cos.\,q'}. \qquad (8)$$

Во всѣхъ этихъ уравненіяхъ, также какъ и въ первомъ (1), могутъ p, q быть всѣ вообще дѣйствительныя числа, когда разумѣя π два прямыхъ угла, принимаемъ въ дополненіе для всякаго положительнаго p

$$(-p)' = \pi - p',$$

и слѣдовательно $p' = \frac{1}{2}\pi$ для $p = o$.

Легко видѣть, что сюда вошли хотя въ другомъ видѣ, тѣ самыя функціи, которыя Г. Гудерманъ называетъ *циклогипербольными* (Potenzial—oder cyklisch-hyperbolische Functionen, v. H. Gudermann. Crelle's jour. f. d. reine u. ang. Math. B. VI, 1830), но которыя замѣнилъ я введеніемъ одной только новой функціи подъ названіемъ *уголъ параллельности*, довольствуясь къ тому принятыми давно знаками въ Тригонометріи. Такимъ образомъ достигнута двоякая цѣль: съ сокращеніемъ означенія, къ аналитической функціи присоединено геометрическое представленіе.

Дифференціалъ отъ уравненія (1) въ отношеніи къ p, даетъ

$$d\,p' = -\,d\,p\,\sin.\,p'. \qquad (6)$$

Еще прибавимъ одну функцію съ новымъ знакомъ; для всякаго перемѣннаго x, отъ $x = o$ до $x \leqq \frac{1}{2}\pi$ будемъ писать

$$L(x) = -\int_o d\,x \log.\,\cos.\,x$$

Это весьма примѣчательный интегралъ, къ которому способъ Воображаемой Геометріи приводитъ много другихъ, болѣе сложныхъ.

Фунцію $L(x)$ можно представить строкой, и съ этой цѣлію сперва разсматриваемъ безконечную строку

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{i} e^{2ix\sqrt{-1}},$$

для которой избираемъ означеніе

$$F(1 + e^{2ix\sqrt{-1}})$$

относя суммованіе къ цѣлымъ числамъ i, взятымъ по порядку. Изчезаніе безконечной строки, которая должна давать значеніе послѣдней фунціи, доказывается для всякаго x (Способъ увѣрятся въ изчезаніи безконечныхъ строкъ и проч. стр. 82); а между тѣмъ самой фунціи принадлежитъ свойство (Алгебра, стр. 322):

$$F(x) + F(y) = F(xy)$$

какія числа x, y ни будутъ. Послѣ чего

$$F(1 + e^{2x\sqrt{-1}}) + F(1 + e^{-2x\sqrt{-1}}) = F(2 + 2\cos.\ 2x)$$

$$= F(4\cos.\ x^2) = 2F(2) + F(1 - \sin.\ x^2) = 2\log.\ 2 + 2\log.\cos.\ x;$$

а слѣдовательно

$$\frac{dL(x)}{dx} = \log.\ 2 - \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \cos.\ 2ix;$$

Отсюда находимъ интегрированіемъ

$$L(x) = x\log.\ 2 - \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2}\sin.\ 2ix \qquad (11)$$

разумѣя $L(o) = o$. Далѣе

$$L(\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi\log.\ 2 \qquad (12)$$

и для всякаго $x < \frac{1}{2}\pi$

$$L(-x) = -L(x).$$

Если же къ тому $x \leqq \frac{1}{4}\pi$, то

$$L(x) - L(\tfrac{1}{2}\pi - x) = (x - \tfrac{1}{4}\pi)\ \log.\ 2 - \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - 2x). \qquad (14)$$

Наконецъ снова для всѣхъ $x \leqq \frac{1}{2}\pi$

$$-\int_{o}^{x} dx\log.\sin.\ x = L(\tfrac{1}{2}\pi) - L(\tfrac{1}{2}\pi - x), \qquad (15)$$

$$\int_{o}^{x} dx\log.\tang.\ x = L(x) + L(\tfrac{1}{2}\pi - x) - L(\tfrac{1}{2}\pi) \qquad (16)$$

Вообще между границами a, b

$$\int_a^b d\,x \log.\sin.\, x = L\left(\tfrac{1}{2}\pi - b\right) - L\left(\tfrac{1}{2}\pi - a\right), \tag{17}$$

$$\int_a^b d\,x \log.\cos.\, x = L\,(a) - L\,(b), \tag{18}$$

$$\int_a^b d\,x \log.\,\mathrm{tang}.\, x = L\left(\tfrac{1}{2}\pi - b\right) + L\,(b) - L\left(\tfrac{1}{2}\pi - a\right) - L\,(a) \tag{19}$$

Для $a < \frac{1}{2}\pi$ находимъ опредѣленный интегралъ

$$\int_0^a d\,x \log.\left(\frac{\cos.\, x + \cos.\, a}{\cos.\, x - \cos.\, a}\right)$$

$$= \int_0^a d\,x\, \log.\left(\cot.\,\frac{x+a}{2}.\,\cot.\,\frac{x-a}{2}\right)$$

$$= -\int_{-a}^{+a} d\,x \log.\,\mathrm{tang}.\,\tfrac{1}{2}(x+a) = -2\int^{a} d\,a\, \log.\,\mathrm{tang}.\, a$$

Итакъ [ур. (12), (19),]

$$\int_0^a d\,x \log.\left(\frac{\cos.\, x + \cos.\, a}{\cos.\, x - \cos.\, a}\right)$$

$$= \pi \log.\, 2 - 2\,L\,(a) - 2\,L\left(\tfrac{1}{2}\pi - a\right) \tag{20}$$

Обратимся снова къ положеніямъ Воображаемой Геометріи. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго гипотенуза c, катеты a, b съ противоположными углами A, B, зависимость угловъ и сторонъ заключается въ уравненіяхъ

$$\sin.\, c' = \sin.\, a'\, \sin.\, b', \tag{21}$$

$$\cos.\, c' \cos.\, A = \cos.\, b', \tag{22}$$

$$\sin.\, c' = \mathrm{tang}.\, A\, \mathrm{tang}.\, B, \tag{23}$$

$$\mathrm{tang}.\, c' = \mathrm{tang}.\, a'\, \sin.\, A, \tag{24}$$

$$\text{tang. } A = \cos. a' \text{ tang. } b', \tag{25}$$

$$\sin. A = \sin. b' \cos. B. \tag{26}$$

Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ, котораго стороны a, b, c, противъ нихъ углы A, B, C

$$\text{tang. } a' \sin. A = \text{tang. } b' \sin. B, \tag{27}$$

$$\cos. A \cos. b' \cos. c' + \frac{\sin. b' \sin. c'}{\sin. a'} = 1, \tag{28}$$

$$\cot. A \sin. B \sin. c' + \cos. B = \frac{\cos. c'}{\cos. a'}, \tag{29}$$

$$\cos. \mathrm{A} + \cos. B \cos. C = \frac{\sin. B \sin. C}{\sin. a'}. \tag{30}$$

Если x, y перпендикулярныя координаты точекъ на кривой линіи (чер. 3), проведеной чрезъ вершины y, то площадь S, ограниченная дугой и двумя координатами x, y, опредѣляется дифференціальнымъ уравненіемъ

$$d^2 S = \frac{d x \, d y}{\sin. y'}. \tag{31}$$

Еслижъ S заключается между кривою линіей, постоянной осью и разстояніемъ r, (чер. 5) проведеннымъ изъ одной точки подъ угломъ ω къ оси, то

$$d^2 S = d \omega \, d r \cot. r'. \tag{32}$$

Если x, y, z координаты перпендикулярныя по порядку другъ къ другу, при томъ x выходитъ изъ общаго начала (чер. 5), то элементъ тѣла P будетъ

$$d^3 P = \frac{d x \, d y \, d z}{\sin. y' \sin. z'^2} \tag{33}$$

Еслижъ r разстояніе элемента въ тѣлѣ P до начала координатъ (чер. 6), θ уголъ наклоненія r къ постоянной плоскости, гдѣ проекція r дѣлаетъ уголъ ω съ неподвижной осью, то

$$d^3 P = d r \, d \omega \, d \theta \cos. \theta \cot. r^{1/2} \tag{34}$$

Означаемъ теперь $F(x)$ какую нибудь функцію; потомъ

$$F'(x) = \frac{d F(x)}{d x}$$

и полагаемъ $F(x)=0$ съ $x=\infty$. Послѣ чего для произвольнаго постояннаго λ получимъ, основываясь на выраженіи (32),

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} d B \, d c \cot. c' \, F'\left(\frac{\lambda}{\sin. c'}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda} F(\lambda). \tag{35}$$

Здѣсь $dBdc$ cot. c' представляетъ элементъ плоскости, когда разстояніе c отъ начала координатъ дѣлаетъ уголъ B съ постоянной осью (чер. 7). А такъ какъ интегрированіе распространяется на безконечную плоскость, то начало координатъ можемъ замѣнить другимъ, гдѣ нибудь на тойже плоскости. Если беремъ его на тойже постоянной оси въ разстояніи a отъ прежняго, называя къ тому b разстояніе каждаго элемента до новаго начала, C уголъ наклоненія b къ a, то

$$d B \, d c \cot. c' = d C \, d b \cot. b' \tag{36}$$

съ тѣмиже границами въ интегралахъ (35). Между тѣмъ зависимость прежнихъ координатъ c, B отъ новыхъ b, C опредѣляется въ треугольникѣ съ боками a, b, c и съ углами B, C противъ b, c. Итакъ [ур. (28)]

$$\frac{1}{\sin. c'} = \frac{1 - \cos. C \cos. a' \cos. b'}{\sin. a' \sin. b'};$$

а полагая

$$p = \frac{\lambda}{\sin. a'}, \qquad q = \lambda \cot. a',$$

съ пособіемъ уравненій (35), (36), получимъ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} d C \, d b \cot. b' \, F'\left(\frac{p - q \cos. b' \cos. C}{\sin. b'}\right) =$$

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}} F\left(\sqrt{p^2 - q^2}\right), \tag{37}$$

гдѣ p, q произвольныя постоянныя, но всегда дѣйствительныя числа подъ условіемъ

$$p^2 > q^2$$

Чтобы справедливость уравненія (37) доказать аналитически, безъ всякаго посредства Воображаемой Геометріи, разсматриваемъ сначала значенія C отъ нуля до $C=\pi$ и полагаемъ

$$q = p \cos. \alpha$$

гдѣ $\alpha \leqq \frac{1}{2}\pi$. Замѣтивъ къ тому, что значеніямъ b отъ $b=o$ до $b=\infty$ отвѣчаютъ углы b' въ границахъ $b'=o$, $b'=\frac{1}{2}\pi$ и что слѣдовательно

$$1 + 2 \sin. \tfrac{1}{2} C^2 \cos. \alpha \cos. b' > \cos. (\alpha - b')$$

потомъ отсюда

$$1 - \cos. \alpha \cos. b' \cos. C > \sin. \alpha \sin. b',$$

мы въ правѣ полагать

$$\sin. c' = \frac{\sin. \alpha \sin. b'}{1 - \cos. \alpha \cos. b' \cos. C},$$

такъ что

$$c' \leqq \tfrac{1}{2}\pi$$

для всѣхъ значеній b и C. Послѣ чего находимъ

$$\frac{1}{\sin. b'} = \frac{\sin. \alpha - \cos. \alpha \cos. C \sin. c' L}{\sin. c' (1 - \cos. \alpha^2 \cos. C^2)},$$

гдѣ

$$L = \sqrt{\sin. \alpha^2 \cot. c'^2 - \cos. \alpha^2 \sin. C^2}$$

Разсматривая b, c' какъ перемѣнныя въ зависимости другъ съ другомъ, получимъ

$$d b \cot. b' = \frac{\cos. \alpha \sin. \alpha^2 \cos. C \cos. c' d c'}{\sin. c'^2 (1 - \cos. \alpha^2 \cos. C^2) L}$$

$$- \frac{\sin. \alpha \cos. c' d c'}{\sin. c'^2 (1 - \cos. \alpha^2 \cos. C^2)}$$

а слѣдовательно

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} d\,C\,d\,b\cot.\,b'\,F'\left(\frac{p-q\cos.\,b'\cos.\,C}{\sin.\,b'}\right)$$

$$=\int\int\left\{\frac{\cos.\,\alpha\sin.\,\alpha^2\cos.\,C\cos.\,c'\,d\,c'\,d\,C}{\sin.\,c'^3\,(1-\cos.\,\alpha^2\cos.\,C^2)\,L}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin.\,\alpha\cos.\,c'\,d\,c'\,d\,C}{\sin.\,c'^2\,(1-\cos.\,\alpha^2\cos.\,C^2)}\right\}F'\left(\frac{p\sin.\,\alpha}{\sin.\,c'}\right).$$

Чтобы назначить границы для c' и C въ послѣднемъ двойномъ интегралѣ, должно вопервыхъ обратить вниманіе на выраженіе

$$\cot.\,b'=\frac{\sin.\,\alpha\cos.\,\alpha\cos.\,C-L\sin.\,c'}{\sin.\,c'\,(1-\cos.\,\alpha^2\cos.\,C^2)},$$

которое находимъ изъ данныхъ выше значеній $\sin.\,c'$, $\sin.\,b'$. Отсюда видно, что L можетъ быть какъ положительнымъ, такъ отрицательнымъ, покуда $C<\frac{1}{2}\pi$ и при томъ когда

$$\sin.\,\alpha^2\cos.\,\alpha^2\cos.\,C^2>\sin.\,\alpha^2\cos.\,c'^2-\cos.\,\alpha^2\sin.\,C^2\sin.\,c'^2;$$

слѣдовательно въ такомъ только случаѣ, когда $c'>\alpha$. Итакъ въ промежуткѣ $C=o$, $C=\frac{1}{2}\pi$ значеніямъ b' будутъ отвѣчать значенія c': одно съ положительнымъ, другое съ отрицательнымъ L Для положительнаго L интегралъ начинается съ $c'=\alpha$, оканчиваясь

$$\sin.\,C\,\text{tang.}\,c'=\text{tang.}\,\alpha,$$

тогда какъ для L отрицательнаго будетъ обратно. Такимъ образомъ въ интегралѣ произойдетъ часть

$$-2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dC\int\frac{\cos.\,\alpha^2\sin.\,\alpha^2\cos.\,C\cos.\,c'\,dc'\,F'\left(\frac{p\sin.\,\alpha}{\sin.\,c}\right)}{\sin.\,c'^3\,(1-\cos.\,\alpha^2\cos.\,C^2)\sqrt{\sin.\,\alpha^2\cot.\,c'^2-\cos.\,\alpha^2\sin.\,C^2}}$$

для c' между границъ $c'=\alpha$, $\cot.\,c'=\sin.\,C\cot.\,\alpha$, или съ перемѣной порядка въ интегрованіи

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dc'\int\frac{\cos.\,\alpha^2\sin.\,\alpha^2\cos.\,c'\cos.\,C\,dC\,F'\left(\frac{p\sin.\,\alpha}{\sin.\,c'}\right)}{\sin.\,c'^3\,(1-\cos.\,\alpha^2\cos.\,C^2)\sqrt{\sin.\,\alpha^2\cot.\,c'^2-\cos.\,\alpha^2\sin.\,C^2}}$$

отъ $C=o$ до $\sin\,C=\text{tang.}\,\alpha\cot c'$; слѣдовательно часть въ интегралѣ, которую

разсматриваемъ, будетъ

$$\frac{\pi}{p \sin. \alpha}\left\{ F(p) - F(p \sin. \alpha) \right\}.$$

Остальная теперь часть въ интегралѣ снова берется между границъ $C = o$, $C = \pi$, но съ условіемъ $c' < \alpha$ тогда какъ L должно принимать отрицательнымъ числомъ. Такъ находимъ эту послѣднюю часть интеграла

$$\int_o^{\alpha} dc' \int_o^{\pi} \frac{\sin. \alpha \cos. c'\, dC}{\sin. c'^2(1 - \cos. \alpha^2 \cos. C^2)} F'\left(\frac{p \sin. \alpha}{\sin. c'}\right) = -\frac{\pi F(p)}{\sin. \alpha};$$

а въ соединеніи съ первой получимъ

$$\int_o^{\pi} \int_o^{\infty} dC\, db \cot. b' F'\left(\frac{p - q \cos. b' \cos. C}{\sin. c'}\right) = -\frac{\pi F(\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}}$$

Такъ какъ элементъ въ этомъ двойномъ интегралѣ не перемѣняется, когда ставимъ сюда $\pi + C$; $\pi - \alpha$ вмѣсто C, α, тогда какъ границы въ отношеніи къ C дѣлаются $C = \pi$, $C = , 2\pi$, то легко видѣть, что значеніе интеграла удваивается съ распространеніемъ интегрованія отъ $C = o$ до $C = 2\pi$.

Вообще скажемъ, что ко всѣмъ заключеніямъ, къ которымъ приводитъ способъ Воображаемой Геометріи всегда можно прійти посредствомъ анализа, основываясь на самыхъ уравненіяхъ между перемѣнными. Если въ настоящемъ случаѣ для краткости не шелъ я прямо такою дорогой, то вмѣстѣ служитъ это примѣромъ, какое преимущество принадлежитъ Геометрическому способу не только въ отношеніи къ простотѣ вычисленія, но даже для самой очевидности, съ которой представляется здѣсь всякая зависимость между числами. Вотъ почему болѣе говорить объ аналитическихъ доказательствахъ уже не буду, предоставляя всякому сдѣлать это по способамъ извѣстнымъ или придумать особенные пріемы для сокращенія вычисленій.

Въ уравненіи (37) ставя $C + \alpha$ вмѣсто C съ произвольнымъ постояннымъ α и перемѣняя $q \cos. \alpha$, $q \sin. \alpha$, на q, r получимъ

$$\int_o^{\pi} \int_o^{\infty} dC db \cot. b' F'\left(\frac{p}{\sin. b'} - q \cot. b' \cos. C + r \cot. b' \sin. C\right) =$$

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}} F(\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}) \qquad (38)$$

Здѣсь p, q, r могутъ быть какъ положительныя, такъ отрицательныя числа.

Означаемъ теперь x, y, z, t независимыя постоянныя, потомъ въ уравненіи (38) ставимъ pt, qt, rt вмѣсто p, q, r и полагаемъ

$$F\left\{\left(\frac{p}{\sin.\ b'} - q\cot.\ b'\cos.\ C + r\cot.\ b'\sin.\ C\right)t\right\} =$$

$$f\left\{\left(\frac{p}{\sin.\ b'} - q\cot.\ b'\cos.\ C + r\cot.\ b'\sin.\ C\right)t + px + qy + rz\right\}$$

гдѣ f знакъ новой функціи. Если къ тому разумѣемъ

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

для всякаго x, то съ пособіемъ уравненія (38) получимъ

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} dCdb\cot.\ b'tf'\left\{\left(\frac{p}{\sin.\ b'} - q\cot.\ b'\sin.\ C + r\cot.\ b'\sin.\ C\right)t + px + qy + rz\right\}$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}} f\left\{t\sqrt{p^2 - q^2 - r^2} + px + qy + rz\right\} \qquad (39)$$

Итакъ интегралъ

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} tdCdb\cot.\ b'f'\left\{\left(x + \frac{t}{\sin.\ b'}\right)p + (y - t\cot.\ b'\tang.\ C)q + (z + t\cot.\ b'\sin.\ C)r\right\}$$

долженъ удовлетворять уравненію съ частными дифференціалами

$$\left(\frac{d^2\ V}{d\ x^2}\right) = \left(\frac{d^2\ V}{d\ t^2}\right) + \left(\frac{d^2\ V}{d\ y^2}\right) + \left(\frac{d^2\ V}{d\ z^2}\right) \qquad (40)$$

какія бы числа p, q, r ни были; а слѣдовательно въ этомъ уравненіи можно принимать также

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} t\,d\,C\,d\,b\cot.\ b'\,f'\left\{x + \frac{t}{\sin.\ b'}, y + t\cot.\ b'\cos.\ C, z + t\cot.\ b'\sin.\ C\right\} \qquad (41)$$

Еслиже почитаемъ V независимымъ отъ x, то уравненію

$$o = \left(\frac{d^2\ V}{d\ t^2}\right) + \left(\frac{d^2\ V}{d\ y^2}\right) + \left(\frac{d^2\ V}{d\ z^2}\right) \qquad (42)$$

удовлетворяемъ, полагая

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} td\,C db \cot.\, b' f(y + t \cot.\, b' \cos.\, C, \quad z + t \cot.\, b' \sin.\, C)$$

$$+ \frac{d}{dt} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} t\,d\,C\,d\,b \cot.\, b'\ F(y + t \cot.\, b' \cos.\, C, z + t \cot.\, b' \sin.\, C) \qquad (43)$$

гдѣ f, F знаки двухъ произвольныхъ функцій, которыя могутъ быть даже прерывными а потому должно распространять интегралы, покуда функціи не сдѣлаются нулями. Такое предложеніе заслуживаетъ особой аналитической повѣрки какъ я намѣренъ этимъ заняться въ теоріи волненія жидкихъ тѣлъ.

Пусть x, y катеты прямоугольнаго треугольника, b гипотенуза, C уголъ противъ y. Находимъ [ур. (21), (22), (25)]

$$\sin.\, b' = \sin.\, x' \sin.\, y'$$

$$\cos.\, b' \cos.\, C = \cos.\, x'$$

$$\tang.\, C = \cos.\, y' \tang.\, x'$$

Между тѣмъ выраженія (31), (32) даютъ

$$\frac{d\,x\,d\,y}{\sin.\ y'} = d\,C\,d\,b \cot.\, b'$$

что вставляя въ уравненіе (38), получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x\,d\,y}{\sin.\, y'} F'\left(\frac{p - q \cos.\, x'}{\sin.\, x' \sin.\, y'} + r \cot.\, y'\right) =$$

$$-\frac{2\,\pi}{\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}} F(\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}) \qquad (44)$$

или, все равно, [ур. (9)]

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\,x\ d\,y}{\sin.\, x \sin.\, y^2} F'\left(\frac{p - q \cos.\, x}{\sin.\, x \sin.\, y} + r \cot.\, y\right) =$$

$$-\frac{2\,\pi}{\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}} F(\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}). \qquad (45)$$

для $r = o$ это будетъ

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,x\,d\,y}{\text{sin.}\,x\,\text{sin.}\,y^2} F'\left(\frac{p - q\,\text{cos.}\,x}{\text{sin.}\,x\,\text{sin.}\,y}\right) =$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}} F(\sqrt{p^2 - q^2}). \qquad (46)$$

Напримѣръ когда

$$n > o, \qquad F(x) = x^{-n},$$

то уравненіе (46) сдѣлается

$$\int_0^{\pi} \frac{d\,x\,\text{sin.}\,x^n}{(p - q\,\text{cos.}\,x)^{n+1}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,y\,\text{sin.}\,y^{n-1} = \pi\,(p^2 - q^2)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Отсюда { Способъ увѣряются въ изчез. безк. стр. и проч. стр. 64 }

$$\int_0^{\pi} \frac{d\,x\,\text{sin.}\,x^n}{(p + q\,\text{cos.}\,x)^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{(p^2 - q^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{2}n}} \qquad (47)$$

всегда подъ условіемъ $p^2 > q^2$. Чтобы повѣрить интегралъ (48) аналитически, разсматриваемъ вообще

$$V = \int_0^{\pi} \frac{d\,x\,\text{sin.}\,x^n}{(p + q\,\text{cos.}\,x)^m}$$

также какъ и выше съ n положительнымъ, но съ m уже произвольнымъ. Разложеніе въ строку по степенямъ q даетъ

$$V = p^{-m} \sum_0^{\infty} (-m)^{2i} \left(\frac{q}{p}\right)^{2i} \int_0^{\pi} d\,x\,\text{sin.}\,x^n\,\text{cos.}\,x^{2i},$$

гдѣ знакъ суммы относиться къ цѣлымъ положительнымъ числамъ i по порядку. Здѣсь { тамъ же стр. 63 и 57 }

$$\int_0^{\pi} d\,x\,\text{sin.}\,x^n\,\text{cos.}\,x^{2i} = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(i - \frac{1}{2}\right)^{i - \frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}n + i\right)^{\frac{1}{2}n + i}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(i - \frac{1}{2}\right)^{i} \sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{2}ni} \left(\frac{1}{2}n + i\right)^{i}}$$

Послѣ чего

$$V = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\backsim\frac{n-1}{2}} \sqrt{\pi}}{p^m \left(\frac{1}{2}n\right)^{\backsim\frac{1}{2}n}} \sum_0^\infty (-m)^{\backsim 2i} \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{\backsim i}}{\left(\frac{1}{2}n+i\right)^{\backsim i}} \left(\frac{q}{p}\right)^{2i}$$

и наконецъ, нѣсколько въ другомъ видѣ,

$$\int_0^\pi \frac{d\,x \sin.\, x^n}{(p+q\cos.\,x)^m}$$

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\backsim\frac{n-1}{2}} \sqrt{\pi}}{p^m \left(\frac{1}{2}n\right)^{\backsim\frac{1}{2}n}} \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{m}{2}-1+i\right)^{\backsim i} \left(\frac{m}{2}+i-1\right)^{\backsim i}}{i^{\backsim i} \left(\frac{1}{2}n+i\right)^{\backsim i}} \left(\frac{q}{p}\right)^{2i} \tag{48}$$

Для $m = n+1$

$$\sum_0^\infty \frac{\left(\frac{n-1}{2}+i\right)^{2i}}{i^{\backsim i}} \left(\frac{q}{p}\right)^{2i} = \left(1-\frac{q^2}{p^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

отчего выраженіе (48) переходитъ въ прежнее (47).

Двѣ точки въ пространствѣ, другъ отъ друга на разстояніи α, разсматриваемъ какъ начала координатъ, называя r, q (чер. 8) растоянія всякой третьй отъ первой и второй; α, θ углы наклоненія линій r, q къ постоянной плоскости, проведенной чрезъ α; наконецъ считаемъ β, ω углы отъ α до проекцій r, q на постоянную плоскость. Такъ составится треугольникъ изъ α, q, r гдѣ противъ r уголъ, котораго косинусъ равенъ $\cos.\,\theta \cos.\,\omega$, слѣдовательно [ур. (28)]

$$\cos.\,\theta \cos.\,\omega \cos.\,\alpha' \cos.\,q' + \frac{\sin.\,\alpha' \sin.\,q'}{\sin.\,r'} = 1$$

Между тѣмъ элементъ пространства выражается въ тѣхъ и другихъ полярныхъ координатахъ [ур. (34)]

$$d\,r\,d\,\alpha\,d\,\beta \cos.\,\alpha \cot.\,r'^2 = d\,q\,d\,\omega\,d\,\theta \cos.\,\theta \cot.\,q'^2$$

Итакъ если F знакъ функціи, которая дѣлается нулемъ для безконечно великаго перемѣннаго. то

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}\tau} d\,q\,d\,\omega\,d\,\theta \cos.\,\theta \cot.\,q'^2\, F\left(\frac{\lambda}{\sin.\,\alpha_{,} \sin.\,q'} - \lambda \cos.\,\theta \cot.\,\alpha' \cos.\,\omega' \cot.\,q'\right)$$

$$= \pi \int_0^\infty d\,r \cot.\,r'\, F\left(\frac{\lambda}{\sin.\,r'}\right) \tag{49}$$

гдѣ λ произвольное постоянное.

Если въ уравненіи (49) интегрированіе въ отношеніи къ ω распространяемъ отъ $\omega = o$ до $\omega = 2\pi$, то значеніе интеграла удвоится. Еслиже поставимъ затѣмъ $\frac{1}{2}\pi - \theta$, вмѣсто θ то границы въ интегралѣ можемъ назначить отъ $\omega = o$ до $\omega = \pi$, отъ $\theta = o$ до $\theta = \pi$. Послѣ чего къ ω присоединивъ постоянное, легко заключить, что

$$\int_o^\infty \int_o^\pi \int_o^\pi dq\,d\omega\,d\theta \text{ sin. } \theta \text{ cot. } q'^2 F\left(\frac{A}{\text{sin. } q'} + B \text{ cot. } q' \text{ cos. } \omega \text{ sin. } \theta + C \text{cot. } q' \text{sin. } \omega \text{ sin. } \theta\right)$$

$$= 2\pi \int_o^\infty dr \text{ cot. } r'^2 \; F\left(\frac{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}}{\text{sin. } r'}\right) \qquad (50)$$

съ произвольными постоянными A, B, C, подъ условіемъ однакожъ

$$A^2 > B^2 + C^2$$

Съ распространеніемъ интегрированія до $\omega = 2\pi$ надобно значеніе интеграла удвоить на другой сторонѣ въ уравненіи (50). Сдѣлавъ это, перемѣняемъ координаты ω, θ на подобныя φ, ψ, считая φ отъ одной линіи съ ω на плоскости, наклонной къ прежней постоянной подъ угломъ γ (чер. 9). Называемъ теперь ϱ общую гипотенузу въ сферическихъ треугольникахъ, которыхъ катеты ω съ $\frac{1}{2}\pi - \theta$ и φ съ $\frac{1}{2}\pi - \psi$. Пусть въ послѣднемъ изъ двухъ треугольниковъ ξ уголъ противъ катета $\frac{1}{2}\pi - \psi$. Находимъ

$$\text{cos. } \omega \text{ sin. } \theta = \text{cos. } \varphi \text{ sin. } \psi$$

$$\text{sin. } \omega \text{ tang. } (\xi + \gamma) = \text{cot. } \theta$$

$$\text{sin. } \varphi \text{ tang. } \xi = \text{cot. } \psi$$

Далѣе

$$\text{sin. } \omega \text{ sin. } \theta = \text{cos. } \theta \text{ cot. } (\xi + \gamma) = \text{sin. } \varrho \text{ cos. } (\xi + \gamma)$$

$$= \text{sin. } \varrho \text{ cos. } \xi \text{ cos. } \gamma - \text{sin. } \varrho \text{ sin. } \xi \text{ sin. } \gamma$$

$$= \text{cos. } \gamma \text{ sin. } \varrho \text{ sin. } \varphi \text{ tang. } \psi \text{ sin. } \xi - \text{sin. } \varrho \text{ sin. } \gamma \text{ sin. } \xi$$

$$\text{sin. } \psi \text{ sin. } \varphi \text{ cos. } \gamma - \text{cos. } \psi \text{ sin. } \gamma$$

Итакъ ставя въ уравненіе (50) значенія cos. ω sin. θ, sin. ω sin. θ подъ знакомъ F

функціи, а также замѣняя $d\omega\, d\theta \sin.\theta$ элементомъ $d\varphi\, d\psi \sin.\psi$, получимъ

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi dq\, d\varphi\, d\psi \sin.\psi \cot.q'^2 F\Big(\frac{A}{\sin.q} - B\cot.q'\cos.\varphi\sin.\psi$$

$$+C\cot.q'\sin.\varphi\sin.\psi - D\cot.q'\cos.\psi\Big) = 4\pi\int_0^\infty dr\cot.r'^2 F\left(\frac{\sqrt{A^2-B^2-C^2-D^2}}{\sin.r'}\right) \quad (51)$$

для A, B, C, D, произвольныя постоянныя, лишь бы

$$A^2 > B^2 + C^2 + D^2$$

Для $B = o$, $C = o$ уравненіе (51) даетъ

$$\int_0^\infty \int_0^\pi dq\, d\psi \sin.\psi \cot.q' F\Big(\frac{A}{\sin.q'} - D\cot.q'\cos.\psi\Big)$$

$$= 2\int_0^\infty dr\cot.r'^2 F\left(\frac{\sqrt{A^2-D^2}}{\sin.r'}\right) \quad (52)$$

Итакъ если для всякаго x

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

то поставя F' вмѣсто F, уравненіе (52) перемѣняемъ въ такое

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\cot.q' F\Big(\frac{A}{\sin.q'} + D\cot.q'\Big) = 2D\int_0^\infty dr\cot.r'^2 F'\left(\frac{\sqrt{A^2-D^2}}{\sin.r'}\right)$$

или замѣнивъ $\cot.q'$ буквой x,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} F\left(Dx + A\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= 2D\int_0^\infty dr\cot.r'^2 F'\left(\frac{\sqrt{A^2-D^2}}{\sin.r'}\right) \quad (53)$$

Чтобъ это повѣрить аналитически, называемъ V первый интегралъ въ уравненіи (53); W его значеніе, когда вмѣсто F поставимъ F', разумѣя для всякаго x

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = F''(x)$$

и подобнымъ образомъ

$$\frac{d^3F(x)}{dx^3} = F'''(x)$$

къ тому для $x = o$ принимая

$$\cot. x^3 F''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. x}\right) = o.$$

Послѣ чего находимъ

$$\left(\frac{d^2 V}{d A^2}\right) - \left(\frac{d^2 V}{d D^2}\right) = W$$

на другой сторонѣ въ уравненіи (53)

$$\left(\frac{d^2 V}{d A^2}\right) = -\frac{2 D^3}{(A^2 - D^2)^{\frac{3}{2}}} \int_o^\infty \frac{d r \cos. r'^2}{\sin. r'^4} F''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right)$$

$$+ \frac{2 A D}{A^2 - D^2} \int_o^\infty \frac{d r \cos. r'^2}{\sin. r'^4} F'''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 V}{d D^2}\right) = -\frac{2D(3A^2 - 2D^2)}{(A^2 - D^2)^{\frac{3}{2}}} \int_o^\infty \frac{d r \cos. r'^2}{\sin. r'^4} F''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right)$$

$$+ \frac{2 D^3}{A^2 - D^2} \int_o^\infty \frac{d r \cos. r'^2}{\sin. r'^4} F'''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right).$$

Отсюда

$$\left(\frac{d^2 V}{d A^2}\right) - \left(\frac{d^2 V}{d D^2}\right) = \frac{6 D}{\sqrt{A^2 - D^2}} \int_o^\infty \frac{d r \cos. r'^2}{\sin. r'^4} F''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right)$$

$$+ 2 D \int_o^\infty \frac{d r \cos. r'^2}{\sin. r'^4} F'''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right).$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\frac{6 D}{\sqrt{A^2 - D^2}} \int \frac{d r \cos. r'^2}{\sin. r'^3} F''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right) = \frac{2 D \cot. r'^3}{\sqrt{A^2 - D^2}} F'\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right)$$

$$- 2D \int d r \cot. r'^4 F'''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right)$$

Распространивъ интегралы между границъ $r = o, r = \infty$ и внеся въ уравненіе выше, получимъ

$$\left(\frac{d^2 V}{d A^2}\right) - \left(\frac{d^2 V}{d D^2}\right) = 2 D \int_o^\infty d r \cot. r'^3 F'''\left(\frac{\sqrt{A^2 - D^2}}{\sin. r'}\right) = W,$$

какъ и хотѣли доказать. Если теперь функція подъ знакомъ интеграла раскла-

дывается по степенямъ D въ изчезающую строку, то въ уравненіи (53) можно поставить $D\sqrt{-1}$ вмѣсто D. Такъ приходимъ къ интегралamъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} F(A\sqrt{1+x^2} + D\,x\sqrt{-1})$$

$$= 2\,D\sqrt{-1}\int_0^{\infty} dr\,\text{cot.}\,r'^2\,F'\left(\frac{\sqrt{A^2+D^2}}{\text{sin.}\,r'}\right). \qquad (54)$$

Напримѣръ для

$$F(x) = e^{-x}$$

уравненіе (54) даетъ съ постоянными положительными $n \geqq m$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} e^{-n\sqrt{1+x^2}}\,\text{sin.}\,m\,x = m\int_0^{\infty} dr\,\text{cot.}\,r'^2\,e^{-\frac{\sqrt{n^2+m^2}}{\text{sin.}\,r'}}$$

или съ перемѣной $\text{cot.}\,r'$ на x

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} e^{-n\sqrt{1+x^2}}\,\text{sin.}\,m\,x = m\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{n^2+m^2}.\sqrt{1+x^2}}$$

Интегрируя по частямъ на той и другой сторонѣ, находимъ

$$\int_0^{\infty} dx\,\text{cos.}\,mx\,e^{-n\sqrt{1+x^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}}\int_0^{\infty} dx\,e^{-\sqrt{n^2+m^2}.\sqrt{1+x^2}} \qquad (55)$$

а поставя сюда $\alpha\,n, \frac{x}{n}$ вмѣсто m, x, для всякаго n и для $\alpha < 1$ получимъ

$$\int_0^{\infty} dx\,\text{cos.}\,\alpha x\,e^{-\sqrt{n^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int_0^{\infty} dx\,e^{-\sqrt{1+\alpha^2}.\sqrt{n^2+x^2}} \qquad (56)$$

Переходимъ теперь къ случаямъ съ ограниченными тѣлами. Пусть требуется вычислить объемъ P конуса, котораго высота $ED = h$ (чер. 10) и которому служитъ основаніемъ плоскость, ограниченная кривой ABC. Точку D пересѣченія высоты h съ основаніемъ принимаемъ за начало координатъ и называемъ r разстояніе до какой нибудь точки F на ребрѣ $AE = q$ конуса; θ уголъ между r и h. Линію $AD = a$ ведемъ отъ конца ребра по плоскости основанія къ началу координатъ.

Интегралъ уравненія (34) въ отношеніи къ r, отъ $r = o$, для такого конуса будетъ

$$2\,d^2\,P = \text{sin.}\,\theta\left(\frac{\text{cos.}\,r'}{\text{sin.}\,r'^2} - \text{log.}\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,r'\right) d\,\omega\,d\,\theta \qquad (57)$$

Если φ уголъ при вершинѣ конуса между h и ребромъ q, то [ур. (28)]

$$\cos.\, r' = \frac{\cos.\, h'}{\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta},$$

что поставя въ уравненіе (57), полу̀чимъ

$$2\left(\frac{d^2\, P}{d\, \omega\, d\, \theta}\right) = \frac{\cos.\, h' \sin.\, \theta\, (\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta)}{(\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta)^2 - \cos.\, h'^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} \sin.\, \theta \log. \left(\frac{\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta + \cos.\, h'}{\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta - \cos.\, h'}\right)$$

умноживъ на $d\, \theta$, потомъ интегрируя отъ $\theta = o$,

$$2\left(\frac{d\, P}{d\, \omega}\right) = -h + \int_o \frac{\cos.\, h' \sin.\, h' \cot.\, \varphi\, d\, \theta}{(\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta)^2 - \cos.\, h'^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \cos.\, \theta \log. \left(\frac{\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta + \cos.\, h'}{\cot.\, \varphi \sin.\, \theta \sin.\, h' + \cos.\, \theta - \cos.\, h'}\right);$$

а положивъ

$$\cot.\, \varphi \sin.\, h' = \cot.\, \lambda$$

и распространивъ интегралъ до $\theta = \frac{1}{2}\, \pi$, находимъ

$$2\left(\frac{d\, P}{d\, \omega}\right) = \sin.\, h' \cos.\, h' \int_o^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\, \theta \sin.\, \lambda^2 \cot.\, \varphi}{\sin.\, (\theta + \lambda)^2 - \sin.\, \lambda^2 \cos.\, h'^2} - h$$

$$= -h + \frac{\cos.\, \lambda}{2\sqrt{1 - \sin.\, \lambda^2 \cos.\, h'^2}} \times \log. \left(\frac{\cos.\, \lambda + \cos.\, h' \sqrt{1 - \sin.\, \lambda^2 \cos.\, h'^2}}{\cos.\, \lambda - \cos.\, h' \sqrt{1 - \sin.\, \lambda^2 \cos.\, h'^2}}\right)$$

или

$$2\left(\frac{d\, P}{d\, \omega}\right) = -h + \tfrac{1}{2} \cos.\, \varphi \log. \left(\frac{\cos.\, \varphi + \cos.\, h'}{\cos.\, \varphi - \cos.\, h'}\right).$$

Между тѣмъ въ треугольникѣ, котораго стороны q, h заключаютъ уголъ φ [ур. (22)]

$$\cos.\, h' = \cos.\, q' \cos.\, \varphi;$$

слѣдовательно

$$2\left(\frac{d\, P}{d\, \omega}\right) = q \cos.\, \varphi - h \qquad (58)$$

Въ томъ же конусѣ пусть опять ребро $A\, E = q$ дѣлаетъ уголъ φ съ высотой $D\, E = h$ при вершинѣ E (чер. 11). Линія $A\, D = a$ соединяетъ другіе концы q и h, отклоняясь на уголъ $A\, D\, B = \omega$ отъ постоянной оси $D\, B$ въ основаніи $A\, B\, C$ конуса. Воображаемъ, что двѣ плоскости $A\, D\, E$ и $B\, D\, E$, проходя чрезъ

высоту h, затѣмъ одна чрезъ a, другая чрезъ неподвижную ось, пересѣкаются третьей $F\,D\,G$, проведенной черезъ конецъ D перпендикулярно къ этой послѣдней $B\,D\,E$ въ линіи $D\,G$ и наклонно подъ какимъ нибудь угломъ къ первой $A\,D\,E$ въ линіи $D\,F$. Пусть $D\,G$ составляетъ уголъ μ съ высотой h; другая линія пересѣченія $D\,F = r$ доходитъ до ребра $A\,E$, дѣлая съ высотой h уголъ θ. Означаемъ ψ уголъ $F\,D\,G$, такъ что дуги θ, μ, ψ будутъ сторонами прямоугольнаго сферическаго треугольника, котораго θ гипотенуза, ω уголъ между θ и μ, а слѣдовательно

$$\begin{aligned} \cos.\,\theta &= \cos.\,\psi \cos.\,\mu, \\ \text{tang.}\,\psi &= \text{tang.}\,\omega \sin.\,\mu. \end{aligned} \tag{59}$$

Откуда для перемѣнныхъ ω, ψ, когда μ постоянное,

$$d\,\omega = \frac{d\,\psi \cos.\,\mu}{1 - \cos.\,\psi^2 \cos.\,\mu^2}. \tag{60}$$

Въ треугольникѣ $A\,D\,E$ опускаемъ изъ D перпендикулъ $D\,J = p$ на сторону q, называя α уголъ между p и h. Уравненіе (22) въ треугольникѣ, гдѣ между сторонъ p, r уголъ $\alpha - \theta$, даетъ

$$\cos.\,r' \cos.\,(\alpha - \theta) = \cos.\,p'$$

Отсюда поставя значеніе $\cos.\,r'$ въ выраженіе (57), которому можно дать такой видъ

$$2\,d^2\,P = d\,\theta\,d\,\omega \left\{ \frac{d\,(r \cos.\,\theta)}{d\,\theta} - \frac{d\,(\cos.\,r' \cos.\,\theta)}{\sin.\,r'^2\,d\,\theta} \right\},$$

получимъ

$$2\,d^2\,P = d\,\theta\,d\,\omega \left\{ \frac{d\,(r \cos.\,\theta)}{d\,\theta} - \frac{\sin.\,\alpha \cos.\,p'\,d.\,\text{tang.}\,(r - \theta)}{d\,\theta\,[\sin.\,p'^2 - \cos.\,p'^2\,\text{tang.}\,(\alpha - \theta)^2]} \right\}$$

интегрируя потомъ въ отношеніи къ θ отъ $\theta = o$,

$$2\left(\frac{d\,P}{d\,\omega}\right) = r \cos.\,\theta - h$$

$$-\frac{\sin.\,\alpha}{2 \sin.\,p'} \log. \left\{ \frac{1 + \cot.\,p' \text{tang.}\,(\alpha - \theta)}{1 - \cot.\,p' \text{tang.}\,(\alpha - \theta)} \cdot \frac{1 - \cot.\,p' \text{tang.}\,\alpha}{1 + \cot.\,p' \text{tang.}\,\alpha} \right\} \tag{61}$$

Пусть теперь въ прямоугольникахъ $J\,D\,E$, $F\,J\,D$ два катета, кромѣ общаго p, будутъ $E\,J = y$, $J\,F = x$, разность ихъ $y - x = z$. Примѣняя сюда уравненіе (25), находимъ

$$\begin{aligned} \text{tang.}\,\alpha &= \cos.\,y' \,\text{tang.}\,p', \\ \text{tang.}\,(\alpha - \theta) &= \cos.\,x' \,\text{tang.}\,p'; \end{aligned}$$

послѣ чего

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = z\frac{\sin.\alpha}{\sin.p'} + r\cos.\theta - h,$$

а какъ уравненіе (26) для треугольника $J\ D\ E$ даетъ

$$\sin.\alpha = \sin.p'\cos.\varphi,$$

то

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = z\cos.\varphi + r\cos.\theta - h. \qquad (62)$$

Легко видѣть, что въ случаѣ $\theta > \frac{1}{2}\pi$ или вообще, когда точка J падаетъ между F и E, въ выраженіи (61) надобно ставить $\theta - \alpha$ вмѣсто $\alpha - \theta$ и полагать $z = y + x$, отчего уравненіе (62) будетъ оставаться вѣрнымъ для всѣхъ угловъ θ, μ отъ нуля до π. Если $\theta = \frac{1}{2}\pi$, то переходитъ оно въ прежнее (58).

Къ уравненію (62) можно придти, пользуясь уже выраженіемъ (58). Разсматриваемъ три точки въ основаніи конуса P: одну, въ которую падаетъ высота g конуса (чер. 12), другую на разстояніи a отъ первой и на разстояніи h отъ вершины, третью на окружности въ разстояніяхъ z, ϱ, r отъ вершины, отъ первой и второй точекъ. Называемъ μ, ψ, φ, θ углы между h и a, между r и a; между h и z; между r и h. Отъ общей точки r съ z опускаемъ перпендикуль p на h, котораго конецъ будетъ такимъ образомъ на разстояніи $h - x$ отъ вершины конуса съ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ x. Воображаемъ два прямыхъ конуса P', P'', которыхъ основаніемъ будетъ общій кругъ съ полупоперечникомъ p, высота перваго $h - x$, втораго x, ребро перваго z, втораго r. Пусть ω уголъ плоскостей проведенныхъ чрезъ g, z и линію пересѣченія h. Ясно, что

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \left(\frac{dP'}{d\omega}\right) + \left(\frac{dP''}{d\omega}\right).$$

Согласно съ уравненіемъ (58) два послѣдніе дифференціала должны быть

$$\left(\frac{dP'}{d\omega}\right) = z\cos.\varphi - h + x,$$

$$\left(\frac{dP''}{d\omega}\right) = r\cos.\theta - x;$$

слѣдовательно какъ и выше [ур. (62)]

$$\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = z\cos.\varphi + r\cos.\theta - h$$

Вставляя сюда значенія cos. θ и $d\omega$ изъ уравненій (59), (60), получимъ

$$2\left(\frac{dP}{d\psi}\right) = \frac{(z \cos.\varphi + r \cos.\mu \cos.\psi - h) \sin.\mu}{1 - \cos.\mu^2 \cos.\psi^2}. \qquad (63)$$

Для прямого конуса, которому служитъ основаніемъ кругъ съ полупоперечникомъ r, въ уравненіи (59) перемѣнное будетъ ω, постоянныя φ, q, h, слѣдовательно величина всего конуса

$$P = \pi (q \cos.\varphi - h), \qquad (64)$$

гдѣ [ур. (21)]

$$\sin. q' = \sin. h' \sin. r'$$

или [ур. (2)]

$$\sin. r' = \frac{e^h + e^{-h}}{e^q + e^{-q}}.$$

Для конуса, котораго высота паралельна съ ребрами, будутъ $\varphi = o$, $h = \infty$ $q = \infty$. Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе даетъ

$$q - h = - \log. \sin. r';$$

уравненіе же (64) величину самаго конуса

$$P = - \pi \log. \sin. r'. \qquad (65)$$

Послѣ чего величина всякаго конуса P съ паралельными ребрами къ высотѣ

$$P = - \tfrac{1}{2} \int d\omega \log. \sin. r' \qquad (66)$$

гдѣ r разстояніе точки на окружности основанія до той, изъ которой перпендикулъ къ основанію паралеленъ ребрамъ; ω уголъ двухъ плоскостей: постоянной и подвижной, проведенныхъ чрезъ этотъ перпендикулъ. Границы интеграла отвѣчаютъ двумъ точкамъ, гдѣ начинается и оканчивается окружность основанія.

Пусть напримѣръ основаніе конуса кругъ съ полупоперечникомъ r (чер. 13), а высота паралельно ребрамъ выходитъ изъ точки основанія на разстояніи a отъ центра. Называемъ ϱ линію, которая съ r и a дополняетъ треугольникъ, гдѣ ψ λ, ω, углы противъ ϱ, a, r. Раздѣляя такой треугольникъ на два прямоугольные перпендикуломъ изъ острея угла ψ на сторону ϱ, легко находимъ [ур. (25), (3)]

$$e^{2\varrho} = \frac{1 + \cos. a' \cos. \omega}{1 - \cos. a' \cos. \omega} \cdot \frac{1 + \cos. r' \cos. \lambda}{1 - \cos. r' \cos. \lambda}$$

Въ томъ же треугольникѣ [ур. (27)]

$$\text{tang. } a' \text{ sin. } \lambda = \text{tang. } r' \text{ sin. } \omega.$$

Отсюда

$$\cos. \lambda = \sqrt{1 - \text{cot. } a'^2 \text{ tang. } r'^2 \text{ sin. } \omega^2},$$

$$\frac{1 - \cos. r'^2 \cos. \lambda^2}{1 - \cos. a'^2 \cos. \omega^2} = \frac{\sin. r'^2}{\sin. a'^2},$$

и слѣдовательно

$$e^{\varrho} = \frac{\sin. a'}{\sin. r'} \cdot \frac{1 + \cos. r' \cos. \lambda}{1 - \cos. a' \cos. \omega},$$

$$e^{-\varrho} = \frac{\sin. a'}{\sin. r'} \cdot \frac{1 - \cos. r' \cos. \lambda}{1 + \cos. a' \cos. \omega},$$

потомъ [ур. (2)]

$$\frac{1}{\sin. \varrho'} = \frac{\sin. a'}{\sin. r'} \cdot \frac{1 + \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \cos. \lambda}{1 - \cos. a'^2 \cos. \omega^2}$$

и наконецъ [ур. (66)]

$$2\left(\frac{d\,P}{d\,\omega}\right) = \log. \frac{\sin. a'}{\sin. r'} - \log. (1 - \cos. a'^2 \cos. \omega^2)$$

$$+ \log. \left\{ 1 + \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \sqrt{1 - \text{cot. } a'^2 \text{ tang. } r'^2 \text{ sin. } \omega^2} \right\};$$

знакъ передъ квадратнымъ корнемъ должно принимать положительный, покуда $\lambda < \frac{1}{2}\pi$ и ставить отрицательный, для $\lambda > \frac{1}{2}\pi$. Послѣдній случай можетъ быть только для $a > r$ и слѣдовательно когда высота падаетъ внѣ конуса.

Интегрированіемъ и замѣтя къ тому, что (Вообр. Геом.)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,\omega \log. (1 - \cos. a'^2 \cos. \omega^2) = \pi \log. \left(\frac{1 + \sin. a'}{2}\right)$$

находимъ объемъ P всего конуса:

Для $a < r$, принимая границы $\omega = -\pi, \omega = +\pi$,

$$P = \pi \log. \frac{\sin. a'}{\sin. r'} - 2\pi \log. \left(\frac{1 + \sin. a'}{2}\right) +$$

$$\int d\,\omega \log. \left\{ \frac{1 + \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \sqrt{1 - \text{cot. } a'^2 \text{ tang. } r'^2 \text{ sin. } \omega^2}}{1 - \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \sqrt{1 - \text{cot. } a'^2 \text{ tang. } r'^2 \text{ sin. } \omega^2}} \right\} \qquad (67)$$

Для $a = r$, принимая границы $\omega = -\frac{1}{2}\pi, \omega = \frac{1}{2}\pi$,

$$P = -\pi \log. \left(\frac{1 + \sin. a'}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,\omega \log. (1 + \cos. a'^2 \cos. \omega^2) \qquad (68)$$

Для $a > r$ между границъ $\omega = o$ и $\sin.\,\omega = \text{tang.}\,a'\,\cot.\,r'$,

$$P = \int d\,\omega \log.\left\{\frac{1 + \cos.\,a'\cos.\,r'\cos.\,\omega\sqrt{1 - \cot.\,a'^2\,\text{tang.}\,r'^2\sin.\,\omega^2}}{1 - \cos.\,a'\cos.\,r'\cos.\,\omega\sqrt{1 - \cot.\,a'^2\,\text{tang.}\,r'^2\sin.\,\omega^2}}\right\}. \qquad (69)$$

Объемъ всѣхъ трехъ конусовъ еще даетъ уравненіе (63), когда здѣсь полагаемъ $\varphi = o$ и слѣдовательно $\mu = a'$, $z = \infty$, $h = \infty$. Такъ получимъ

$$2\left(\frac{d\,P}{d\,\psi}\right) = \frac{(z - h + r\cos.\,a'.\cos.\,\psi)\sin.\,a'}{1 - \cos.\,\psi^2\cos.\,a'^2}.$$

Разность $z - h = u$ находимъ разсматривая треугольникъ изъ сторонъ z, h, r съ углами, какъ означали выше, θ, φ противъ z, r (чер. 14). Отъ острея угла φ на бокахъ беремъ равныя линіи h, которыхъ концы соединяемъ линіей $2\,\alpha$, называя противъ h углы α'; затѣмъ произойдетъ другой треугольникъ изъ сторонъ $2\,\alpha, u, r$ съ углами $\pi - \alpha', \theta - \alpha'$ противъ r, u. Въ немъ будетъ [ур. (29)]

$$\cos.\,(\theta - \alpha') - \cot.\,\alpha'\sin.\,(\theta - \alpha')\sin.\,(2\,\alpha)' = \frac{\cos.\,(2\,\alpha)'}{\cos.\,r'},$$

куда поставя {ур. (6), (7)}

$$\sin.\,(2\,\alpha)' = \frac{\sin.\,\alpha'^2}{1 + \cos.\,\alpha'^2}$$

$$\cos.\,(2\,\alpha)' = \frac{2\cos.\,\alpha'}{1 + \cos.\,\alpha'^2},$$

получимъ

$$\text{tang.}\,\alpha'\sin.\,\theta = \frac{2}{\cos.\,r'} - 2\cos.\,\theta.$$

Въ томъ же треугольникѣ {ур. (27)}

$$\text{tang.}\,r'\sin.\,\alpha' = \text{tang.}\,u'\sin.\,(\theta - \alpha').$$

Послѣ чего

$$e^u = \frac{1}{\sin.\,r'} - \cot.\,r'\cos.\,\theta;$$

а въ соединеніи съ уравненіемъ (59) и съ послѣднимъ выраженіемъ для P

$$2\left(\frac{d\,P}{d\,\psi}\right) = \sin.\,\mu\,\frac{\log.(1 - \cos.\,r'\cos.\,\mu\cos.\,\psi) - \log.\sin.\,r' + r\cos.\,\mu\cos.\,\psi}{1 - \cos.\,\psi^2\cos.\,\mu^2} \qquad (70)$$

Умноживъ на $d\,\psi$, потомъ интегрируя отъ $\psi = o$, получимъ

$$2\,P = \sin.\,\mu\int_o \frac{d\,\psi}{1 - \cos.\,\mu^2\cos.\,\psi^2}\log.\,(1 - \cos.\,r'\cos.\,\mu\cos.\,\psi)$$

$$+ r\,\text{arc. tang.}\,(\sin.\,\psi\cot.\,\mu) - \log.\sin.\,r'\,\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{tang.}\,\psi}{\sin.\,\mu}\right)$$

Полагая на время

$$R = \int_0 \frac{d\,\psi}{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,\psi^2} \log.\,(1 - \cos.\,r' \cos.\,\mu \cos.\,\psi)\,,$$

находимъ

$$\left(\frac{d\,R}{d\,r'}\right) = \sin.\,r' \cos.\,\mu \int_0 \frac{d\,\psi \cos.\,\psi}{(1 - \cos.\,r' \cos.\,\mu \cos.\,\psi)(1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,\psi^2)}$$

$$= -\cot.\,r' \int_0 \frac{d\,\psi}{1 - \cos.\,r' \cos.\,\mu \cos.\,\psi} + \cot.\,r' \int_0 \frac{d\,\psi}{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,\psi^2}$$

$$+ \frac{\cos.\,\mu}{\sin.\,r'} \int \frac{d\,\psi \cos.\,\psi}{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,\psi^2} =$$

$$\frac{\cot.\,r'}{\sin.\,\mu} \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\,\psi}{\sin.\,\mu}\right) + \frac{1}{\sin.\,\mu \cos.\,r'} \text{arc. tang.}\,(\sin.\,\psi \cot.\,\mu)$$

$$- \frac{\cot.\,r'}{\sqrt{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,r'^2}} \text{arc. cos.} \left(\frac{\cos.\,\psi + \cos.\,\mu \cos.\,r'}{1 + \cos.\,\psi \cos.\,\mu \cos.\,r'}\right).$$

Здѣсь

$$\text{arc. cos.}\left(\frac{\cos.\,\psi + \cos.\,\mu \cos.\,r'}{1 + \cos.\,\psi \cos.\,\mu \cos.\,r'}\right)$$

$$= 2 \text{ arc. tang.} \left(\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\psi \sqrt{\frac{1 - \cos.\,\mu \cos.\,r'}{1 + \cos.\,\mu \cos.\,r'}}\right).$$

Итакъ для $\psi = \pi$ получимъ

$$\left(\frac{d\,R}{d\,r'}\right) = -\frac{\pi \cot.\,r'}{\sqrt{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,r'^2}} + \frac{\pi \cot.\,r'}{\sin.\,\mu}$$

Умноживъ на $d\,r'$ и взявъ такъ интегралъ, чтобъ $R = 0$ для $r' = \frac{1}{2}\pi$, находимъ

$$R = \frac{\pi}{\sin.\,\mu} \log. \left(\frac{\sin.\,\mu + \sqrt{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,r'^2}}{1 + \sin.\,\mu}\right)$$

Это значитъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,\psi}{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,\psi^2} \log. \left(\frac{1 + \cos.\,\mu \cos.\,r' \cos.\,\varphi}{1 - \cos.\,\mu \cos.\,r' \cos.\,\varphi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sin.\,\mu} \log. \left(\frac{1 + \sin.\,\mu}{\sin.\,\mu + \sqrt{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,r'^2}}\right), \qquad (71)$$

что вставляя въ выраженіе для P и полагая здѣсь $\psi = 2\pi$, находимъ объемъ всего наклоненнаго конуса съ безконечной высотой

$$P = -\pi \log \sin.\,r' - \pi \log. \left(\frac{1 + \sin.\,a'}{\sin.\,a' + \sqrt{1 - \cos.\,a'^2 \cos.\,r'^2}}\right)$$

гдѣ r полупоперечникъ круга, который служитъ основаніемъ конусу, $a' = \mu$ уголъ наклоненія оси къ основанію, a разстояніе отъ центра точки, откуда высота выходитъ параллельно ребрамъ.

Для $a' > r'$ сравнивая выраженія (72), (67), заключаемъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log. \left\{ \frac{1 - \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \sqrt{1 - \cot. a' \ \text{tang.}\, r'^2 \sin. \omega^2}}{1 + \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \sqrt{1 - \cot. a'^2 \, \text{tang.}\, r'^2 \sin. \omega^2}} \right\}$$

$$= \pi \log. \left\{ \frac{4 \sin. a'}{(1 + \sin. a')(\sin. a' + \sqrt{1 - \cos. a'^2 \cos. r'^2})} \right\} \qquad (73)$$

Для $a' = r'$ уравненія (72), (67) даютъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log (1 + \cos a'^2 \cos. \omega^2)$$

$$= \pi \log. \tfrac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + \cos. a'^2}) \qquad (74)$$

Для $a' < r'$ изъ уравненій (72), (69) выводимъ

$$\int d\omega \log. \left\{ \frac{1 - \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \sqrt{1 - \cot. a'^2 \, \text{tang.}\, r'^2 \sin. \omega^2}}{1 + \cos. a' \cos. r' \cos. \omega \sqrt{1 - \cot. a'^2 \, \text{tang.}\, r'^2 \sin. \omega^2}} \right\}$$

$$= \pi \log. \left\{ \frac{\sin. r' (1 + \sin. a')}{\sin. a' + \sqrt{1 - \cos. a'^2 \cos. r'^2}} \right\}, \qquad (75)$$

гдѣ интегралъ берется отъ $\omega = 0$ до $\sin. \omega = \text{tang.}\, a' \cot. r'$.

Въ уравненіи (63) разсматриваемъ z постояннымъ, а слѣдовательно принимаемъ основаніе конуса за кругъ съ полупоперечникомъ ϱ, тогда какъ высота g падаетъ въ центръ на разстояніи a отъ начала координатъ r, φ. Въ такомъ случаѣ

$$2P = z \sin. \mu \int \frac{\cos. \varphi \, d\psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2} + \sin. \mu \cos. \mu \int \frac{r \cos \psi \, d\psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2}$$

$$- h \, \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\, \psi}{\sin. \mu} \right). \qquad (75)$$

Опускаемъ изъ острея угла φ перпендикулъ p на сторону r и называемъ α уголъ между p и h (чер. 15) въ треугольникѣ, гдѣ противъ p долженъ быть уголъ $\pi - \theta$. Находимъ [ур. (22), (23), (24)]

$$\cos. (\varphi + \alpha) = \frac{\cos. p'}{\cos. z'},$$

$$\sin.\, h' = -\operatorname{tang}.\, \alpha \operatorname{tang}.\, \theta,$$

$$\operatorname{tang}.\, h' = \operatorname{tang}.\, p' \sin.\, \theta.$$

Отсюда

$$\cos.\, \alpha = \frac{\sin.\, \theta}{\sqrt{1 - \cos.\, h'^2 \cos.\, \theta^2}},$$

$$\cos.\, p' = \frac{\sin.\, \theta \cos h'}{\sqrt{1 - \cos.\, h'^2 \cos.\, \theta^2}}.$$

Далѣе

$$\cos.\, \varphi = \cos.\, (\varphi + \alpha) \cos.\, \alpha + \sin.\, (\varphi + \alpha) \sin.\, \alpha$$

$$= \cos.\, \alpha \cos.\, p' \left\{ \frac{1}{\cos.\, z'} + \operatorname{tang}.\, \alpha \sqrt{\operatorname{tang}.\, p'^2 - \operatorname{tang}.\, z'^2} \right.$$

$$= \cos.\, \alpha \cos.\, p' \left\{ \frac{1}{\cos.\, z'} - \frac{\sin.\, h' \cos.\, \theta}{\sin.\, \theta^2} \sqrt{\operatorname{tang}.\, h'^2 - \operatorname{tang}.\, z'^2 \sin.\, \theta^2} \right\},$$

$$= \frac{\sin.\, \theta^2 \cos.\, h' - \sin.\, h' \cos\ \theta \sqrt{\sin.\, h'^2 \cos.\, z'^2 - \sin.\, z'^2 \cos.\, h'^2 \sin.\, \theta^2}}{\cos.\, z' (1 - \cos.\, h'^2 \cos,\, \theta^2)},$$

а въ соединеніи съ уравненіемъ (59)

$$\frac{\cos.\, \varphi}{1 - \cos.\, \mu^2 \cos.\, \psi^2} = \frac{\cos.\, h'}{\cos.\, z' (1 - \cos.\, \mu^2 \cos.\, h'^2 \cos.\, \psi^2)}$$

$$- \frac{\sin.h' \cos.\mu}{\cos.\, z'} \times \frac{\cos.\, \psi \sqrt{\sin.\, h'^2 \cos.\, z'^2 - \sin.\, z'^2 \cos.\, h'^2 + \sin.\, z'^2 \cos.\, h'^2 \cos.\, \mu^2 \cos.\, \psi^2}}{(1 - \cos.\, \mu^2 \cos.\, \psi^2)(1 - \cos.\, \mu^2 \cos.\, h'^2 \cos.\, \psi^2)}$$

Здѣсь [ур. (22)]

$$\cos.\, \mu \cos.\, h' = \cos.\, a'.$$

Если къ тому $a < \varrho$, то положивъ

$$\mathrm{L} = \operatorname{tang}.\, z'^2 \cot.\, h'^2,$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{L} \sin.\, \mu^2 \quad ,$$

$$\operatorname{tang}.\, \xi = \operatorname{tang}.\, \psi \sqrt{\frac{1 - L}{1 - M}},$$

получимъ

$$\int_0 \frac{\cdot \cos.\varphi\, d\psi}{1 - \cos.\mu^2 \cos.\psi^2} = \frac{\cos. h'}{\sin. a' \cos. z'} \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\,\psi}{\sin. a'} \right)$$

$$- \int_0 \frac{\sin. h'^2 (1 - M)(1 - L)^{\frac{3}{2}} \cos.\mu \cos.\xi\, d\xi}{[\sin.\mu^2 (1 - L) + \cos.\mu^2 \sin.\xi^2][\sin. a'^2 (1 - L) + \frac{\cos. a'^2}{\cos. z'^2} \sin.\xi^2]}$$

$$= \frac{\cos. h'}{\sin. a' \cos. z'} \cdot \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\,\psi}{\sin. a'} \right)$$

$$- \frac{\sin h'^2 \cos.\mu (\cos. z'^2 - \sin.\mu^2 \sin. z'^2 \cot. h'^2)}{\cos.\mu^2 \sin. a'^2 \cos. z'^2 - \cos. a'^2 \sin.\mu^2} \left\{ \cot.\mu \text{ arc. tang.} \left(\frac{\cot.\mu \sin.\xi}{\sqrt{1 - L}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\cot. a'}{\cos. z'} \text{arc. tang.} \left(\frac{\cot. a' \sin.\xi}{\cos. z' \sqrt{1 - L}} \right) \right\}$$

Чтобы выразить r помощію ψ, называя λ уголъ между ϱ и r въ треугольникѣ съ боками ϱ, r, a (чер. 12), беремъ уравненіе [ур. (27)]

$$\text{tang.}\, a' \sin.\lambda = \text{tang.}\, \varrho' \sin.\psi$$

Откуда

$$\cos.\lambda = \sqrt{1 - \text{tang.}\,\varrho'^2 \cot. a'^2 \sin.\psi^2}$$

$$\frac{1 - \cos.\varrho'^2 \cos.\lambda^2}{1 - \cos. a'^2 \cos.\psi^2} = \frac{\sin.\varrho'^2}{\sin. a'^2}$$

Далѣе въ томъ же треугольникѣ, какъ видѣли выше (стр. 42)

$$e^{2r} = \frac{1 + \cos. a' \cos.\psi}{1 - \cos. a' \cos.\psi} \cdot \frac{1 + \cos.\varrho' \cos.\lambda}{1 - \cos.\varrho' \cos.\lambda}$$

и слѣдовательно

$$r = \log. \frac{\sin. a'}{\sin.\varrho'} + \log. \left(\frac{1 + \cos.\varrho' \cos.\lambda}{1 - \cos. a' \cos.\lambda} \right)$$

Итакъ

$$2P = \frac{z \sin.\mu \cos. h'}{\sin. a' \cos. z'} \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\,\psi}{\sin. a'} \right) - h \text{ arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\,\psi}{\sin.\mu} \right)$$

$$- \frac{z \sin.\mu \cos.\mu \sin. h'^2 (\cos. z'^2 - \sin.\mu^2 \sin. z'^2 \cot. h'^2)}{\cos.\mu^2 \sin. a'^2 \cos. z'^2 - \cos. a'^2 \sin.\mu^2} \times \left\{ \cot.\mu \text{ arc. tang.} \left(\frac{\cot.\mu \sin.\xi}{\sqrt{1 - L}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\cot. a'}{\cot. z'} \text{arc. tang.} \left(\frac{\cot. a' \sin.\xi}{\cos. z' \sqrt{1 - L}} \right) \right\}$$

$$+ \log. \frac{\sin. a'}{\sin.\varrho'} \text{arc. tang.} (\sin.\psi \cot.\mu)$$

$$+ \sin.\mu \cos.\mu \int_0 \frac{d\psi \cos.\psi}{1 - \cos.\mu^2 \cos.\psi^2} \log. \left(\frac{1 + \cos.\varrho' \cos.\lambda}{1 - \cos. a' \cos.\psi} \right) \qquad (77)$$

Для $\psi = 2\pi$ получимъ объемъ всего прямого конуса, которому кругъ съ полупоперечникомъ ϱ служитъ основаніемъ,

$$P = \frac{\pi z \sin. \mu \cos. h'}{\sin. a' \cos. z'} - \pi h$$

$$+ \sin. \mu \cos. \mu . \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2} \log. \left(\frac{1 + \cos. a' \cos, \psi}{1 - \cos. a' \cos. \psi} \right).$$

Здѣсь [ур. (21), (24)]

$$\frac{\sin. \mu \cos. h'}{\sin. a'} = \sin. \mu \cot. h' \sin. g' = \cos. g';$$

слѣдовательно

$$P = \frac{\pi z \cos. g'}{\cos. z'} - \pi h$$

$$+ \sin. \mu \cos. \mu \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2} \log. \left(\frac{1 + \cos. a' \cos. \psi}{1 - \cos. a' \cos. \psi} \right).$$

Такъ какъ a произвольная линія, то полагая $a = o$ должны почитать $a' = \frac{1}{2}\pi$ $h = g$, $\mu = \frac{1}{2}\pi$, послѣ чего

$$P = \frac{\pi z \cos. g'}{\cos. z'} - \pi g.$$

Сличая два значенія P, выводимъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2} \log. \left(\frac{1 + \cos. a' \cos. \psi}{1 - \cos. a' \cos. \psi} \right) = \frac{\pi (h - g)}{\sin. \mu \cos. \mu}$$

Сюда можемъ ввести [ур. (22), (24)]

$$\cos. h' \cos. \mu = \cos. a',$$

$$\tang. \mu = \cos. g' \tang. a'.$$

Далѣе

$$h - g = \log (\cot. \tfrac{1}{2} h' \tang. \tfrac{1}{2} g')$$

$$= \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{1 + \cos. h'}{1 - \cos. h'} \cdot \frac{1 - \cos. g'}{1 + \cos. g'} \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{\cos. \mu + \cos. a'}{\cos. \mu - \cos. a'} \cdot \frac{\tang. a' - \tang. \mu}{\tang. a' + \tang. \mu} \right) = \log. \frac{\cos. \frac{1}{2} (\mu - a')}{\sin. \frac{1}{2} (\mu + a')}$$

слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos.\psi}{1 - \cos.\mu^2 \cos.\psi^2} \log.\left(\frac{1 + \cos.a' \cos.\psi}{1 - \cos.a' \cos.\psi}\right)$$
$$= \frac{\pi}{\sin.\mu \cos.\mu} \log.\left(\frac{\cos.\frac{1}{2}(\mu - a')}{\sin.\frac{1}{2}(\mu - a')}\right) \qquad (78)$$

Тотъ же интегралъ, который нашелъ я другимъ образомъ и доказывалъ аналитически въ моемъ сочиненіи, Воображаемая Геометрія. Отъ него можно легко перейти къ другимъ, интегрируя по частямъ и распространяя на всѣ значенія постоянныхъ. Такъ получимъ (Вооб. Геом.) съ постоянными a, b

$$\int_0^a \frac{\psi\, d\psi \sin.\psi}{(1 - \sin.b^2 \sin.\psi^2)\sqrt{\sin.a^2 - \sin.\psi^2}}$$
$$= \frac{\pi \log.\left(\frac{\cos.b + \sqrt{1 - \sin.a^2 \sin.b^2}}{2 \cos.a \sin.\frac{1}{2}b^2}\right)}{2 \cos.b\,(1 - \sin.a^2 \sin.b^2)} \qquad (78)$$

съ однимъ постояннымъ a

$$\int_0^a \frac{\psi\, d\psi \sin.\psi}{\cos.\psi^2 \sqrt{\sin.a^2 - \sin.\psi^2}} = \frac{\pi \sin.\frac{1}{2}a^2}{\cos.a} \qquad (80)$$

съ постоянными $a < b$ положительными

$$\int_0^a \frac{\psi\, d\psi \sin.\psi}{(\sin.b^2 - \sin.\psi^2)\sqrt{\sin.a^2 - \sin.\psi^2}}$$
$$= \frac{\pi\left(b - \text{arc.}\cos.\frac{\cos.b}{\cos.a}\right)}{2 \cos.b \sqrt{\sin.b^2 - \sin.a^2}} \qquad (81)$$

Опять обращаясь къ уравненію (63) и къ чертежу 12, предполагаемъ $g = \infty$, а слѣдовательно $z = \infty$, $h = \infty$, $a' = \mu$, $\varphi = o$. Въ такомъ случаѣ

$$z \cos.\varphi - h = z - g - (h - g);$$

но мы видѣли что

$$z - g = -\log.\sin.\varrho',$$
$$h - g = -\log.\sin.\mu,$$

слѣдовательно

$$2\left(\frac{dP}{d\psi}\right) = \frac{\log.\sin.\mu - \log.\sin.\varrho' + r \cos.\mu \cos.\psi}{1 - \cos.\mu^2 \cos.\psi^2} \sin.\mu \qquad (82)$$

Значеніе r съ перемѣной a' на μ будетъ

$$r = \log. \frac{\sin. \mu}{\sin. \varrho'} + \log. \left(\frac{1 + \cos. \varrho' \cos. \lambda}{1 - \cos. \mu \cos. \psi} \right)$$

гдѣ

$$\cos. \lambda = \sqrt{1 - \tang.\, \varrho'^2 \cot.\, \mu^2 \sin.\, \psi^2}$$

потомъ интегрируя выраженіе (82), находимъ

$$P = \tfrac{1}{2} \log. \frac{\sin. \mu}{\sin. \varrho'} \cdot \arc.\, \tang. \left(\frac{\sin. \psi \sin. \mu}{\cos. \psi - \cos. \mu} \right)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sin. \mu \cos. \mu \int_0 \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2} \log. \left(\frac{1 + \cos. \varrho' \cos. \lambda}{1 - \cos. \mu \cos. \psi} \right) \qquad (83)$$

вырѣзокъ изъ прямого конуса двумя плоскостями, которыхъ общая линія параллельна безконечной высотѣ, тогда какъ основаніе конуса, кругъ съ полупоперечникомъ ϱ (чер. 13), пересѣкается плоскостями въ двухъ линіяхъ, наклоненныхъ подъ угломъ ψ и проведенныхъ одна черезъ центръ, другая на разстояніи a отъ центра.

Полагая $a = o$ должны почитать $\mu = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \pi - \omega$ и слѣдовательно

$$P = -\tfrac{1}{2} (\pi - \omega) \log. \sin. \varrho' \qquad (84)$$

вырѣзокъ изъ прямого безконечнаго конуса двумя плоскостями, которыя проходя чрезъ высоту, пересѣкаются подъ угломъ $\pi - \omega$. Уравненіе (66) ведетъ уже прямо къ выраженію (84), разность котораго съ значеніемъ (83) для P даетъ

$$P = \tfrac{1}{2} (\pi - \omega) \log. \sin. \varrho' + \tfrac{1}{2} \log. \frac{\sin. \mu}{\sin. \psi} \cdot \arc.\, \tang. \left(\frac{\sin. \psi \sin. \mu}{\cos. \psi - \cos. \mu} \right)$$

$$- \tfrac{1}{2} \sin. \mu \cos. \mu \int_0 \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2} \log. \left(\frac{1 - \cos. \mu \cos. \psi}{1 + \cos. \varrho' \cos. \lambda} \right) \qquad (85)$$

объемъ безконечной пирамиды, которой основаніе треугольникъ съ боками a, r, ϱ, тогда какъ два ребра паралельны третьему, поставленному перпендикулярно къ основанію въ общей точкѣ a съ ϱ. Противъ сторонъ a, r, ϱ, треугольника находятся углы λ, ω, ψ. Наконецъ въ уравненіи (85) разсматривается ψ только перемѣннымъ и съ нимъ въ зависимости λ.

Подобнымъ образомъ уравненіе (77) въ предположеніи $a = o$ и слѣдовательно съ $a' = \frac{1}{2}\pi$ $\mu = \frac{1}{2}\pi$, дѣлается

$$P = \tfrac{1}{2} (\pi - \omega) \left| z \frac{\cos. h'}{\cos. z'} - h \right|$$

Разность этого значенія P съ значеніемъ въ уравненіи (77) даетъ

$$P = \frac{z \sin. \mu \cos. h'}{2 \sin. a' \cos. z'} \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\, \psi}{\sin. a'} \right) - \tfrac{1}{2} h \text{ arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\, \psi}{\sin. \mu} \right)$$

$$- \tfrac{1}{2} (\pi - \omega) \left\{ z \frac{\cos. h'}{\cos. z'} - h \right\} + \tfrac{1}{2} \text{arc. tang.} (\sin. \psi \cot. \mu) \log. \frac{\sin. a'}{\sin. \varrho'}$$

$$- \tfrac{1}{2} \frac{2 \sin \mu \cos \mu \sin h'^2 (\cos z'^2 - \sin \mu^2 \sin z'^2 \cot h'^2)}{\cos. \mu^2 \sin. a'^2 \cos. z'^2 - \cos. a'^2 \sin. \mu^2} \times \left\{ \cot \mu \operatorname{arctang} \left(\frac{\cot. \mu \sin. \xi}{\sqrt{1 - \text{tang.}\, z'^2 \cot. h'^2}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\cot. a'}{\cos. z'} \text{arc. tang.} \left(\frac{\cot. a' \sin. \xi}{\cos. z' \sqrt{1 - \text{tang.}\, z'^2 \cot. h'^2}} \right) \right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sin. \mu \cos. \mu \int_0 \frac{d \psi \cos. \psi}{1 - \cos. \mu^2 \cos. \psi^2} \log. \left(\frac{1 + \cos. \varrho' \cos. \lambda}{1 - \cos. a' \cos. \psi} \right);$$

гдѣ

$$\text{tang.}\, \xi = \text{tang.}\, \psi \sqrt{\frac{1 - \text{tang.}\, z'^2 \cot. h'^2}{1 - \sin. \mu^2 \text{ tang.}\, z'^2 \cot. h'^2}},$$

$$\cos. \lambda = \sqrt{1 - \text{tang.}\, \varrho'^2 \cot. a'^2 \sin. \psi^2},$$

а подъ знакомъ интеграла разсматривается перемѣннымъ только ψ и съ нимъ въ зависимости λ.

Въ уравненіи (86) значеніе P представляетъ объемъ пирамиды, которой основаніе треугольникъ съ боками a, ϱ, r и съ углами противъ нихъ λ, ω, ψ. Высота h стоитъ перпендикулярно къ основанію въ острѣ угла ω, ребро z соединяетъ вершину пирамиды съ остреемъ угла λ.

Займемся теперь особенно вычисленіемъ пирамидъ. Начиная съ самаго простого случая, полагаемъ основаніе прямоугольный треугольникъ съ катетами a, b и гипотенузой c (чер. 16). Называемъ A, B углы противъ a, b и пусть два ребра AA', CC' отъ угловъ A и прямого C паралельны къ третьему BB', которое перпендикулярно къ основанію выходитъ изъ угла B. Объемъ пирамиды будетъ [ур. (65)]

$$P = - \tfrac{1}{2} \int_0 d B \log. \sin. c'$$

Вставляя сюда [ур. (22)]

$$\cos. c' \cos. B = \cos. a'.$$

получимъ

$$P = \tfrac{1}{4} \int d\,B \log. \frac{\cos. B^2}{\sin. (a' + B) \sin. (a' - B)}$$

гдѣ a' поѣтоянное, слѣдовательно [ур. (10)]

$$P = \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) - \tfrac{1}{2} L(B) \qquad (89)$$

Дифференцируя уравненія (87), (88), первое въ отношеніи къ c' и къ B, второе къ a', потомъ къ c', находимъ

$$d^2 P = - \tfrac{1}{2} d\,B\,d\,c' \cot. c'$$

$$d\,c' \sin. c' \cos. B = \sin. a'\,d\,a'$$

отсюда

$$d^2 P = - \tfrac{1}{2} \frac{d\,B\,d\,a' \sin. a' \cos. a'}{\cos. B^2 - \cos. a'^2}$$

Потомъ интегрируя въ отношеніи къ B отъ $B = o$,

$$d\,P = - \tfrac{1}{4} d\,a' \log. \left(\frac{1 + \cot. a' \tang. B}{1 - \cot. a' \tang. B} \right); \qquad (90)$$

наконецъ въ отношеніи къ a' отъ $a = o$ или $a' = \tfrac{1}{2}\pi$,

$$P = \tfrac{1}{4} \int^{\frac{1}{2}\pi} d\,a' \log. \frac{\sin. (a' + B)}{\sin. (a' - B)}. \qquad (91)$$

Сравненіе двухъ значеній (89), (91) даетъ

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} d\,a' \log. \frac{\sin. (a' + B)}{\sin. (a' - B)}$$

$$= L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) + 2\,L(B)$$

какъ это слѣдуетъ уже прямо изъ уравненія (10). Поставя сюда $\frac{\pi}{2} - x$ вмѣсто a' и a вмѣсто B, потомъ интегрируя по частямъ, находимъ для постояннаго a

$$\sin. 2a \int_o \frac{x\,d\,x}{\cos. (a - x) \cos. (a + x)}$$

$$= x \log. \frac{\cos. (a - x)}{\cos. (a + x)} - L(a + x) - L(a - x) - 2\,L(a) \qquad (92)$$

или въ другомъ видѣ

$$\sin. 2a \int_o \frac{x\,d\,x}{\cos. a^2 - \sin. x^2}$$

$$= x \log. \frac{\cos. (x - a)}{\cos. (x + a)} + 2\,L(a) + L(x - a) - L(x + a)$$

*B*ъ треугольникѣ *A B C* (чер. 16)

$$\text{tang. } B = \cos. b' \text{ tang. } a',$$

послѣ чего перемѣняемъ уравненіе (90) въ такое

$$d P = -\tfrac{1}{2} b\, d\, a',$$

а когда поставимъ сюда значеніе a' изъ уравненія (94), то принимая *B* постояннымъ, находимъ

$$d P = \sin. 2 B. \frac{b\, d\, b}{e^{2b} + e^{-2b} - 2 \cos. 2 B} \qquad (96)$$

Интегрируя отъ $b = o$ и сравнивая такое значеніе *P* съ прежнимъ (89), заключаемъ

$$\int \frac{b\, d\, b}{e^{2b} + e^{-2b} - 2 \cos. 2 B}$$

$$= \frac{1}{4 \sin. 2 B} \left\{ L\left(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B\right) - L\left(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B\right) - 2 L\left(B\right) \right\} \qquad (97)$$

гдѣ

$$\text{tang. } a' = \frac{e^{2b} + 1}{e^{2b} - 1} \text{ tang. } B.$$

Для $b = \infty$ уравненіе (98) даетъ $a' = B$, а принимая къ этому въ помощь уравненіе (14), получимъ

$$\int_o^\infty \frac{b\, d\, b}{e^{2b} + e^{-2b} - 2 \cos. 2 B}$$

$$= \frac{1}{2 \sin. 2 B} \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\pi - B\right) \log. 2 - L\left(\tfrac{1}{2}\pi - B\right) \right\} \qquad (99)$$

Для $B = \frac{1}{2}\pi$ вторая часть въ этомъ уравненіи дѣлается частнымъ нуля на нуль и даетъ по способу всѣмъ извѣстному

$$\int_o^\infty \frac{b\, d\, b}{\left(e^b + e^{-b}\right)^2} = \tfrac{1}{4} \log. 2. \qquad (100)$$

Если въ интегралѣ (97) ставимъ $\frac{1}{2} x$ вмѣсто *b*, потомъ въ первый разъ $\frac{1}{2}\omega$ а во второй $\frac{1}{2}\pi - \omega$ вмѣсто *B*, наконецъ два уравненія складываемъ и вычитаемъ, то получимъ

$$2 \sin. \omega \int_o^\infty \frac{x\, d\, x \left(e^x + e^{-x}\right)}{e^{2x} + e^{-2x} - 2 \cos 2\omega} = \left.\begin{aligned} & L\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha + \tfrac{1}{2}\omega\right) - L\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - \tfrac{1}{2}\omega\right) \\ & + L\left(\tfrac{1}{2}\pi + \beta - \tfrac{1}{2}\omega\right) + L\left(\tfrac{1}{2}\pi - \beta - \tfrac{1}{2}\omega\right) \\ & - 2 L\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\omega\right) - 2 L\left(\tfrac{1}{2}\omega\right) \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

$$2\sin.2\omega\int_0\frac{x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}-2\cos 2\omega}=L(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha+\tfrac{1}{2}\omega)-L(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha-\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$-L(\tfrac{1}{2}\pi-\beta-\tfrac{1}{2}\omega)-L(\tfrac{1}{2}\pi-\beta-\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$+2L(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\omega)-2L(\tfrac{1}{2}\omega) \qquad (102)$$

гдѣ

$$\text{tang.}\,\alpha=\frac{e^x+1}{e^x-1}\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega$$

$$\text{tang.}\,\beta=\frac{e^x-1}{e^x+1}\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega$$

Для $x=\infty$ уравненіе (101) въ соединеніи съ уравненіемъ (14) дѣлается

$$\sin.\,\omega\int_0^\infty\frac{'x\,dx\,(e^x+e^{-x})}{e^{2x}+e^{-2x}-2\cos.2\omega}$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi\log.2-L\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\omega)-L(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\omega) \qquad (103)$$

потомъ для $\omega=\frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^\infty\frac{x\,dx}{e^x+e^{-x}}=\tfrac{1}{2}\pi\log.2-2L(\tfrac{1}{4}\pi).$$

Значеніе интеграла (102) даетъ еще выраженіе (97) и такимъ образомъ съ пособіемъ уравненія (14) приводитъ къ заключенію:

$$L(\tfrac{1}{2}\pi-\omega)+L(\omega)+L(\alpha+\tfrac{1}{2}\omega)-L(\alpha-\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$-L(\pi-\beta-\tfrac{1}{2}\omega)-L(\beta-\tfrac{1}{2}\omega)=$$
$$\tfrac{1}{2}L(\gamma+\omega)-\tfrac{1}{2}L(\gamma-\omega)-(\tfrac{1}{2}\pi-\omega)\log.2 \qquad (104)$$

гдѣ α, ω произвольныя дуги, значенія же β, γ будутъ

$$\text{tang}\,\beta=\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\tfrac{1}{2}\omega^2$$

$$\text{tang.}\,\gamma=\frac{\sqrt{\sin.2\alpha\sin.2\beta}}{\cos.(\alpha-\beta)}\text{cot.}\,\omega$$

подъ условіемъ

$$\alpha\leqq\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\omega \qquad \beta\geqq\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\omega$$

Въ интегралѣ (97) положивъ

$$a'=\tfrac{1}{2}\pi-\varphi, \qquad e^b=\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}x,$$

находимъ

$$\text{sin. } 2\,B\int_{x}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\,x\,\text{sin. }x\,\text{log. cot. }\frac{1}{2}\,x}{1-\text{sin. }x^2\,\text{cos. }B^2}$$
$$=L(\varphi+B)-L(\varphi-B)-2\,L(B)$$

гдѣ

$$\text{tang. }\varphi=\text{cot. }B\,\text{cos. }x,$$

уголъ B разсматривается постояннымъ. Для $x=o$ получимъ

$$\text{sin. } 2\,B\int_{o}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\,x\,\text{sin. }x\,\text{log. cot. }\frac{1}{2}\,x}{1-\text{cos. }B^2\,\text{sin. }x^2}=L(\tfrac{1}{2}\pi)-L(\tfrac{1}{2}\pi-2\,B)-2\,L(B)$$

или, принимая въ разсужденіе уравненія (12) и (14),

$$\text{sin. } 2\,B\int_{o}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\,x\,\text{sin. }x\,\text{log. cot. }\frac{1}{2}\,x}{1-\text{cos. }B^2\,\text{sin. }x^2}$$
$$=(\pi-2\,B)\,\text{log. }2-2\,L(\tfrac{1}{2}\pi-B)\qquad(106)$$

Отсюда для $B=\frac{1}{2}\pi$

$$\int_{o}^{\frac{1}{2}\pi}d\,x\,\text{sin. }x\,\text{log. cot. }\tfrac{1}{2}\,x=\text{log. }2,\qquad(107)$$

какъ это можно повѣрить интегрированіемъ по частямъ. Соединеніе двухъ уравненій (105) и (106) даетъ

$$\left.\begin{aligned}\text{sin. } 2\,B\int_{o}\frac{d\,x\,\text{sin. }x\,\text{log. cot. }\frac{1}{2}\,x}{1-\text{cos. }B^2\,\text{sin. }x^2}&=\tfrac{1}{2}\pi\,\text{log. }2+L(\varphi-B)\\&\quad-L(\varphi+B)-L(\tfrac{1}{2}\pi-2\,B)\end{aligned}\right\}\qquad(108)$$

гдѣ

$$\text{tang. }\varphi=\text{cot. }B\,\text{cos. }x.$$

Пусть теперь основаніе пирамиды четыреугольникъ, котораго бока b, a, x, y (чер. 17) перпендикулярны по порядку другъ къ другу, такъ что b съ y составляютъ наконецъ острый уголъ. Ребра пирамиды пусть всѣ паралельны между собою, тогда какъ одинъ изъ нихъ перпендикуляренъ къ основанію въ общей точкѣ боковъ a, x. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго стороны a, b, называемъ B уголъ противъ b. Здѣсь будетъ [ур. (25) (21)]

$$\left.\begin{aligned}&\text{tang. }B=\text{cos. }b'\,\text{tang. }a'\\&\text{cot. }B=\text{cos. }y'\,\text{iang. }x'\\&\text{sin. }a'\,\text{sin. }b'=\text{sin. }x'\,\text{sin. }y'\end{aligned}\right\}\qquad(109)$$

Исключивъ отсюда B и b', получимъ

$$\cos.\, a' = \cos.\, y' \sin.\, x' \qquad (110)$$

а величину пирамиды P, которую разсмтриваемъ [ур. (95)].

$$P = \tfrac{1}{4} \int_{x'}^{\frac{1}{2}\pi} d\,x' \log. \left(\frac{\sin.\, x' + \cos.\, a'}{\sin.\, x' - \cos.\, x'} \right)$$

$$= -\tfrac{1}{4} \int d\,x' \log. \frac{\operatorname{tang.} \left(\frac{x' + a'}{2} + \tfrac{1}{4}\pi \right)}{\operatorname{tang.} \left(\frac{x' + a'}{2} - \tfrac{1}{4}\pi \right)}$$

Это значитъ [ур. (19)]

$$2\,P = L\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}a' - \tfrac{1}{4}\pi\right) + L\left(\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a' - \tfrac{1}{2}x'\right)$$
$$- L\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x' - \tfrac{1}{2}a'\right) - L\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}a'\right) \qquad (111)$$

Тоже бы нашли, представя напередъ P въ другомъ видѣ:

$$4\,P = \int d\,z \log. \operatorname{tang.} z$$

отъ $z = \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}a' - \tfrac{1}{4}\pi$

до $z = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x' - \tfrac{1}{2}a'$

или, что все равно,

$$4\,P = \int \frac{z\,d\,z}{e^z + e^{-z}}$$

отъ $z = \log. \operatorname{tang.} \left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}a' - \tfrac{1}{4}\pi\right)$

до $z = \log. \operatorname{tang.} \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x' - \tfrac{1}{2}a'\right)$

и потомъ примѣняя сюда уравненіе (97).

Пирамиду P также составляемъ изъ двухъ съ прямоугольными треугольниками въ основаніи. Такъ находимъ [ур. (96)]

$$P = \sin.\, 2\,B \left\{ \int_0 \frac{b\,d\,b}{e^{2b} + e^{-2b} - 2\cos.\, 2\,B} + \int_0 \frac{y\,d\,y}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos.\, 2\,B} \right\} \qquad (112)$$

и слѣдовательно [ур. (97), (98)]

$$4\,P = L\left(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B\right) + L\left(\pi - x' - B\right) - L\left(B - x'\right)$$
$$- L\left(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B\right) - 2\,L\left(B\right) - 2\,L\left(\tfrac{1}{2}\pi - B\right);$$

сличая съ этимъ значеніемъ P другое (111), заключаемъ

$$L(B)+L(\tfrac{1}{2}\pi-B)+\tfrac{1}{2}L(B-x')-\tfrac{1}{2}L(\pi-B-x')+\tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi-a'-B)$$
$$-\tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi-a'-B)=L(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x'-\tfrac{1}{2}a')+L(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}x'+\tfrac{1}{2}a')$$
$$+L(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}x'-\tfrac{1}{2}a')-L(\tfrac{3}{4}\pi-\tfrac{1}{2}x'-\tfrac{1}{2}a')$$

гдѣ a', x', B углы, которыхъ выборъ ограниченъ только тѣмъ условіемъ, какое требуютъ уравненія (109); слѣдовательно

$$\text{tang. } B=\frac{\cos. x'}{\cos. a'}.$$

Итакъ для произвольныхъ угловъ x, y

$$\left.\begin{aligned}&L(x)+L(\tfrac{1}{2}\pi-x)+L(y)+L(\tfrac{1}{2}\pi-y)-L(z)-L(\tfrac{1}{2}\pi-z)\\&=\tfrac{1}{2}L(\pi-x-y-z)+\tfrac{1}{2}L(z-x+y)+\tfrac{1}{2}L(x+z-y)\\&\qquad+\tfrac{1}{2}L(y+x-z)\end{aligned}\right\}\qquad(113)$$

гдѣ

$$\text{tang. } z=\frac{\cos.(x-y)}{\sin.(x+y)}.$$

Значеніе (89) пирамиды можетъ еще дать, примѣняя сюда уравненіе (85), которое теперь сдѣлается

$$P=\tfrac{1}{2}(\pi-B)\log.\sin. c'+\tfrac{1}{2}(\pi-a')\log.\frac{\sin. a'}{\sin. c'}$$

$$+\tfrac{1}{2}\sin a'\cos a'\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi\cos\psi}{1-\cos a'^2\cos\psi^2}\times\log.\left(\frac{1+\sqrt{\cos c'^2-\sin c'^2\cot a'^2\sin\psi^2}}{1-\cos a'\cos\psi}\right)$$

и ведетъ къ заключенію

$$\sin. a'\cos. a'\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi\cos.\psi}{1-\cos. a'^2\cos.\psi^2}\times\log.\left\{\frac{1+\sqrt{\cos. c'^2-\sin. c'^2\cot. a'^2\sin.\psi^2}}{1-\cos. a'\cos.\psi}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi-a'+B)-\tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi-a'-B)-L(B)-(a'-B)\log.\sin. c'$$
$$-(\pi-a')\log.\sin. a'\qquad(114)$$

гдѣ $c'<a'$ и дуга B опредѣляется уравненіемъ [ур. (22)]

$$\cos. B=\frac{\cos. a'}{\cos. c'}.\qquad(115)$$

Положивъ

$$\text{tang.}\,\xi = \sin.\,\psi\,\cot.\,a',$$

интегралу (114) даемъ еще другой видъ:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi - a'} d\xi \log. \left\{ \frac{\cos.\,\xi + \sqrt{\cos.\,\xi^2 - \sin.\,c'^2}}{\cos.\,\xi - \sqrt{\cos.\,\xi^2 - \sin.\,a'^2}} \right\} =$$

$$(B - a')\log.\sin.c' - (\pi - a')\log.\sin.a' + \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) - L(B)$$

Отсюда

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi - a'} d\xi \log.(\cos.\,\xi + \sqrt{\cos.\,\xi^2 - \sin.\,a'^2})$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\xi \log.(\cos.\,\xi + \sqrt{\cos.\,\xi^2 - \sin.\,c'^2})$$

$$= (B - a')\log.\sin.c' - a'\log.\sin.a' + \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - LB) \qquad (116)$$

Между тѣмъ изъ уравнеія (115) находимъ

$$(B - a')\log.\sin.c' = (a' - B)\log.\cos.B - \tfrac{1}{2}(a' - B)\log.(\cos.B^2 - \cos.a'^2)$$
$$= (a' - B)\log.\cos.B - \tfrac{1}{2}(a' - B)\log.\sin.(a' + B)$$
$$- \tfrac{1}{2}(a' - B)\log.\sin.(a' - B)$$

Для $c = \infty$ должны слѣдовательно почитать $a' = B$ и

$$(B - a')\log.\sin.c' = 0$$

Послѣ чего уравненіе (116) съ пособіемъ уравненій (12) и (24) даетъ для $c' = o$ и для всякой произвольной дуги $a' < \frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi - a'} d\xi \log.(\cos.\,\xi + \sqrt{\cos.\,\xi^2 - \sin.\,a'^2}) = -a'\log.\sin.a' \qquad (117)$$

Тоже уравненіе для произвольныхъ дугъ $a' < \frac{1}{2}\pi$, $c' < a'$ перемѣняется въ такое:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi - a'} d\xi \log.(\cos.\,\xi + \sqrt{\cos.\,\xi^2 - \sin.\,c'^2}) =$$

$$-(a' - B)\log.\sin.c' + \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) - L(B) \qquad (118)$$

гдѣ, какъ и выше,

$$\cos. B = \frac{\cos. a'}{\cos. c'}$$

Въ уравненіе (117) поставя снова

$$\text{tang.}\, \xi = \sin. \psi \cot. a'$$

послѣ всѣхъ приведеній находимъ

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. a'^2 \cos. \psi^2} \log. \frac{1 + \cos. a' \cos. \psi}{1 - \cos. a' \cos. \psi} = -\frac{\pi \log. \sin. a'}{\sin. a' \cos. a'} \qquad (119)$$

Тоже дѣлая въ уравненіи (118),

$$\sin. a' \cos. a' \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. a'^2 \cos. \psi^2} \times \log. \left(\frac{1 + \sqrt{\cos. c'^2 - \sin. c'^2 \cot. a'^2 \sin. \psi^2}}{\sqrt{1 + \sin. \psi^2 \cot. a'^2}} \right)$$

$$= -(a' - B) \log. \sin. c' + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B)$$

$$- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) - L(B) \qquad (120)$$

Полагая здѣсь $c' = o$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. a'^2 \cos. \psi^2} \log. (1 + \cot. a'^2 \sin. \psi^2) = \frac{2 L(\frac{1}{2}\pi - a')}{\sin. a' \cos. a'} \qquad (121)$$

Отсюда

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. a'^2 \cos. \psi^2} \log. (1 - \cos. a'^2 \cos. \psi^2) \cdot$$

$$= \frac{(\pi - 2a') \log. \sin. a' + 2 L(\frac{1}{2}\pi - a')}{\sin. a' \cos. a'}, \qquad (122)$$

а въ соединеніи съ уравненіемъ (120)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. a'^2 \cos. \psi^2} \log. (1 + \cos. a' \cos. \psi) = \frac{L(\frac{1}{2}\pi - a') - a' \log. \sin. a'}{\sin. a' \cos. a'} \qquad (123)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos. \psi}{1 - \cos. a'^2 \cos. \psi^2} \log. (1 - \cos. a' \cos. \psi)$$

$$= \frac{L(\frac{1}{2}\pi - a') + (\pi - a') \log. \sin. a'}{\sin. a' \cos. a'} \qquad (124)$$

Уравненіе (121) въ соединеніи съ уравненіемъ (122) даетъ

$$\sin.\, a' \cos.\, a' \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos.\, \psi}{1 - \cos.\, a'^2 \cos.\, \psi^2} \times \log.\,(1 + \sqrt{\cos.\, c'^2 - \sin.\, c'^2 \cot.\, a'^2 \sin.\, \psi^2})$$
$$= -(a' - B) \log.\sin.\, c' + L(\tfrac{1}{2}\pi - a') - L(B)$$
$$+ \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B), \qquad (125)$$

гдѣ, какъ выше,

$$\cos.\, B = \frac{\cos.\, a'}{\cos.\, c'}.$$

Поставя сюда

$$\sin.\, \lambda = \tang.\, c' \cot.\, a' \sin.\, \psi,$$

находимъ

$$\sin.\, c' \cos.\, c' \int_0 \frac{d\lambda \cos.\, \lambda}{1 - \cos.\, c'^2 \cos.\, \lambda^2} \log.\,(1 + \cos.\, c' \cos.\, \lambda)$$
$$= -(a' - B) \log.\sin.\, c' + L(\tfrac{1}{2}\pi - a')$$
$$- L(B) + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) \qquad (126)$$

гдѣ дуги a', B опредѣляются уравненіями

$$\cot.\, a' = \cot.\, c' \sin.\, \lambda,$$

$$\tang.\, B = \sin.\, c' \cot.\, \lambda.$$

Изъ двухъ интегралovъ (121), (125) еще слѣдуетъ

$$\sin.\, a' \cos.\, a' \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi \cos.\, \psi}{1 - \cos.\, a'^2 \cos.\, \psi^2} \log.\,(1 - \sqrt{\cos.\, c'^2 - \sin.\, c'^2 \cot.\, a'^2 \sin.\, \psi^2})$$
$$= (\pi - a' - B) \log.\sin.\, c' + L(\tfrac{1}{2}\pi - a') + L(B)$$
$$- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) \qquad (127)$$

Отсюда переходимъ, какъ выше, къ неопредѣленному интегралу

$$\sin.\, c' \cos.\, c' \int_0 \frac{d\lambda \cos.\, \lambda}{1 - \cos.\, c'^2 \cos.\, \lambda^2} \log.\,(1 - \cos.\, c' \cos.\, \lambda)$$
$$= (\pi - a' - B) \log.\sin.\, c' + L(\tfrac{1}{2}\pi - a') + L(B)$$
$$- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) \qquad (128)$$

гдѣ снова

$$\cot.\, a' = \cot.\, c' \sin.\, \lambda,$$

$$\tang.\, B = \sin.\, c' \cot.\, \lambda.$$

Теперь можемъ также найти неопредѣленный интегралъ

$$V = \int_0 \frac{d\psi \cos.\psi}{1 - \cos.\alpha^2 \cos.\psi^2} \log.\,(1 + \sqrt{\cos.\beta^2 - \sin.\beta^2 \cot.\alpha^2 \sin.\psi^2})$$

съ постоянными α, β. Поставя сюда

$$\sin.\varphi = \cot.\alpha \tang.\beta \sin.\psi,$$

получимъ

$$V = \frac{\sin.\beta \cos.\beta}{\sin.\alpha \cos.\alpha} \int_0 \frac{d\varphi \cos.\varphi}{1 - \cos.\beta^2 \cos.\varphi^2} \log.\,(1 + \cos.\beta \cos.\varphi);$$

слѣдовательно [ур. (126)]

$$\begin{aligned}\sin.\alpha \cos.\alpha\, V = &-(x-y)\log.\sin.\beta + L(\tfrac{1}{2}\pi - x) - L(y)\\ &+ \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - x + y) - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - x - y) \qquad (129)\end{aligned}$$

гдѣ

$$\cot.\, x = \cot.\,\alpha \sin.\,\psi,$$

$$\cos.\, y = \frac{\cos.\alpha \sin.\psi}{\cos.\beta \sqrt{1 - \cos.\alpha^2 \cos.\psi^2}}.$$

Подобнымъ образомъ находимъ

$$\begin{aligned}\sin.\alpha \cos.\alpha \int_0 \frac{d\psi \cos.\psi}{1 - \cos.\alpha^2 \cos.\psi^2} \log.\,(1 - \sqrt{\cos.\beta^2 - \sin.\beta^2 \cot.\alpha^2 \sin.\psi^2})\\ = (\pi - x - y)\log.\sin.\beta + L(\tfrac{1}{2}\pi - x) + L(y)\\ - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - x + y) + \tfrac{1}{2} L.(\tfrac{1}{2}\pi - x - y). \qquad (130)\end{aligned}$$

Впрочемъ неопредѣленный интегралъ (129) со введеніемъ сюда x вмѣсто ψ переходитъ прямо въ интегралъ (118).

Теперь интегралъ въ уравненіи (85) можемъ выразить помощію той функціи для которой употребляемъ знакъ L. Пусть основаніе безконечной пирамиды бу-

детъ треугольникъ, котораго стороны a, b, c (чер. 18) съ углами противъ нихъ A, B, C. Изъ острея C угла пусть ребро пирамиды выходитъ перпендикулярно къ основанію. Отъ этой же точки перпендикулъ на сторону c называемъ p съ углами наклоненія x, y къ a и къ b. Величину пирамиды, согласно съ уравненіемъ (85), опредѣляемъ

$$P = \tfrac{1}{2}(\pi - C)\log.\sin.a' + \tfrac{1}{2}\text{arc. tang.}\left(\frac{\sin.A\sin.b'}{\cos.A - \cos.b'}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin.b'\cos.b'\int_0 \frac{'d\,A\cos.A}{1-\cos.b'^2\cos.A^2}\log.\left(\frac{1+\cos.a'\cos.B}{1-\cos.b'\cos.A}\right).$$

Между тѣмъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ, изъ которыхъ основаніе пирамиды составляется [ур. (23), (27)]:

$$\cot.p' = \cot.b'\sin.A,$$
$$\text{tang.}\,x = \sin.a'\cot.B,$$
$$\text{tang.}\,y = \sin.b'\cot.A,$$
$$\text{tang.}\,a'\sin.A = \text{tang.}\,b'\sin.B.$$

Послѣ чего [ур. (129), (128)]

$$\int_0 \frac{d\,A\,.\cos.A}{1-\cos.b'^2\cos.A^2}\log.(1+\cos.a'\cos.B)$$
$$= -(p'-x)\log,\sin.\,a' + L(\tfrac{1}{2}\pi - p') - L(x)$$
$$+ \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' + x) - \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' - x),$$

$$\int_0 \frac{d\,A\cos.A}{1-\cos.b'^2\cos.A^2}\log.(1-\cos.b'\cos.A)$$
$$= (\pi - p' - y)\log.\sin.b' + L(\tfrac{1}{2}\pi - p') + L(y)$$
$$- \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' + y) + \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' - y).$$

Наконецъ съ такими значеніями двухъ интеграловъ величина пирамиды сдѣлается

$$P = \tfrac{1}{4}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' + x) - \tfrac{1}{4}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' - x) - \tfrac{1}{2}L(x)$$
$$+ \tfrac{1}{4}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' + y) - \tfrac{1}{4}L(\tfrac{1}{2}\pi - p' - y) - \tfrac{1}{2}L(y)$$

Тоже бы самое нашли, разсматривая пирамиду P составленной изъ двухъ, съ прямоугольными треугольниками въ основаніи, потомъ для каждой взяли выраженіе, какое было дано выше [ур. (89)]. Это доказываетъ какъ вѣрность нашихъ вычисленій, такъ и справедливость началъ Воображаемой Геометріи.

Высоту пирамиды P, не принимая болѣе безконечной, назовемъ h (чер. 19) разумѣя, какъ и прежде, что падаетъ она въ острее угла B основанія, которое будетъ прямоугольный треугольникъ съ катетомъ b противъ B, съ другимъ a и съ угломъ противъ него A, съ гипотенузой c. Пусть ребра q, r соединяютъ вершину пирамиды съ концами линій a, c. Означаемъ еще

α' уголъ между линій q, h
β' . . . . . q, r
γ' . . . . . h, r
λ . . . . . b, r
μ . . . . . a, q
ω . . . . . r, c

Примѣняя сюда выраженіе (58), получимъ

$$P = \tfrac{1}{2} \int_0 d\,B\,(r \cos.\, \gamma' - h)$$

гдѣ h постоянное, r и γ' въ зависимости съ перемѣннымъ угломъ B, съ которымъ измѣняются также b, c и A, тогда какъ a постоянное. Въ этомъ треугольникѣ, который служитъ основаніемъ пирамидѣ P, и въ другомъ съ боками h, c, находимъ [ур. (21), (22)]

$$\sin.\, r' = \sin.\, h' \sin.\, c', \tag{132}$$

$$\cos.\, c' \cos.\, B = \cos.\, a', \tag{133}$$

$$\cos.\, r' \cos.\, \gamma' = \cos.\, h'. \tag{134}$$

Отсюда

$$\cos.\, B^2 = \frac{\cos.\, a'^2 \sin.\, h'^2}{\sin.\, h'^2 - \sin.\, r'^2}$$

потомъ

$$d\,B = \frac{\cos.\, a' \sin.\, h'\, d\,r \sin.\, r'^2 \cos.\, r'^2}{(\sin.\, h'^2 - \sin.\, r'^2)\sqrt{\sin.\, a'^2 \sin.\, h'^2 - \sin.\, r'^2}}$$

Что вставляя, даемъ уравненію (131) такой видъ

$$P = -\tfrac{1}{2} h B + \tfrac{1}{2} \cos.\, a' \sin.\, h' \cos.\, h' \int_q^r \frac{r\,d\,r \sin.\, r'^2}{(\sin.\, h'^2 - \sin.\, r'^2)\sqrt{\sin.\, a'^2 \sin.\, h'^2 - \sin.\, r'^2}} \tag{235}$$

Дадимъ еще другія дифференціальныя выраженія для P.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ съ боками b, q, r [ур. (22)]

$$\cos. r' \cos. \lambda = \cos. c' \tag{136}$$

Въ такомъ же треугольникѣ съ боками a, b [ур. [(25), (21)]

$$\text{tang. } B = \cos. b' \text{ tang. } a' \tag{137}$$

$$\sin. c' = \sin. a' \sin. b' \tag{138}$$

Это послѣднее съ уравненіемъ (132) даетъ

$$\sin. r' = \sin. a' \sin. b' \sin. h' \tag{139}$$

Изъ уравненій (132), (133) находимъ

$$\cos. r'^2 = \cos. h'^2 + \frac{\cos. a'^2}{\cos. B^2} \sin. h'^2 \tag{140}$$

Отсюда съ одними перемѣнными r, a

$$\left(\frac{d\,r}{d\,a'}\right) = -\frac{\sin. a' \cos. a' \sin. h'^2}{\cos. r' \sin. r'^2 \cos. B^2} \tag{141}$$

а въ соединеніи съ уравненіемъ (139)

$$\left(\frac{d\,r}{d\,a'}\right) = -\frac{\cot. a'}{\cos. r' \sin. b'^2 \cos. B^2}$$

Между тѣмъ изъ уравненія (137) для перемѣнныхъ b, B слѣдуетъ

$$d\,B = \text{tang. } a' \sin. b'^2 \cos. B^2\, d\,B \tag{142}$$

Послѣ чего

$$\left(\frac{d\,r}{d\,a'}\right) d\,B = -\frac{d\,b}{\cos. r'} \tag{143}$$

Еслиже въ уравненіи (140) разсматриваемъ r, B перемѣнными, то

$$\left(\frac{d\,r}{d\,B}\right) = \frac{\cos. a'^2 \sin. h'^2 \sin. B}{\sin. r'^2 \cos. r' \cos. B^2}$$

а въ соединеніи съ уравненіями (137), (139), (142)

$$\left(\frac{d\,r}{d\,B}\right) d\,B = \frac{\cos. b'}{\cos. r'}\, d\,b \tag{144}$$

Дифференціалъ отъ ўравненія (134) въ отношеніи къ a' даетъ

$$\left(\frac{d\cos.\gamma'}{da'}\right)=\frac{\cos.h'\sin.r'^2}{\cos.r'^2}\left(\frac{dr}{da'}\right)$$

а съ уравненіемъ (143)

$$\left(\frac{d\cos.\gamma'}{da'}\right)dB=-\frac{\cos.h'^2\sin.r'^2}{\cos.r'^3}db$$

Между тѣмъ дифференціалъ отъ уравненія (136) въ отношеніи къ B будетъ

$$\sin.r'^2\cos.\lambda\left(\frac{dr}{dB}\right)dB-\cos.r'\sin.\lambda\,d\lambda=\sin.b'^2\,db$$

и даетъ съ пособіемъ уравненій (136), (139), (144)

$$db=\frac{\sin.a'^2\sin.h'^2}{1-\sin.a'^2\sin.h'^2}\cdot\frac{\cos.r'^2}{\sin.r'^2}\sin.\lambda\,d\lambda$$

Послѣ чего

$$\left(\frac{d\cos.\gamma'}{da'}\right)dB=\frac{\cos.h'\sin.a'^2\sin.h'^2}{1-\sin.a'^2\sin.h'^2}\sin.\lambda\,d\lambda$$

и слѣдовательно [ур. (136)]

$$\frac{d.}{da'}\int_0\cos.\gamma'\,dB=\frac{\cos.h'\sin.a'^2\sin.h'^2}{1-\sin.a'^2\sin.h'^2}\cdot\frac{\cos.b'}{\cos.r'}\qquad(145)$$

Далѣе [ур. (144]

$$\left(\frac{dr}{dB}\right)dB\frac{d.}{da'}\int_0\cos.\gamma'\,dB=\frac{\cos.h'\sin.a'^2\sin.h'^2}{1-\sin.a'^2\sin.h'^2}\cdot\frac{\cos.b'^2}{\cos.r'^2}db$$

и наконецъ [ур. (139), (143)]

$$dB\left(\frac{dr}{dB}\right)\frac{d.}{da'}\int_0\cos.\gamma'\,dB-\left(\frac{dr}{da'}\right)\cos.\gamma'\,dB=\frac{\cos.h'\,db}{1-\sin.a'^2\sin.h'^2}\qquad(146)$$

Теперь если дифференцируемъ уравненіе (131) въ отношеніи къ a', потомъ интегрируемъ въ отношеніи къ B, то получимъ

$$2\left(\frac{dP}{da'}\right)=\int_0\left(\frac{dr}{da'}\right)\cos.\gamma'\,dB+r\int_0\left(\frac{d\cos.\gamma'}{da'}\right)dB$$

$$-\int_0 dB\left\{\left(\frac{dr}{dB}\right)\int_0\left(\frac{d\cos\gamma'}{da'}\right)dB\right\}$$

а пользуясь уравненіями (145), (146)

$$2\left(\frac{d\,P}{d\,a'}\right)=\frac{\cos.\,h'\sin.\,a'^{2}\sin.\,h'^{2}}{1-\sin.\,a'^{2}\sin.\,h'^{2}}\cdot\frac{r\cos.\,b'}{\cos.\,r'}-\frac{b\cos.\,h'}{1-\sin.\,a'^{2}\sin.\,h'^{2}}\qquad(147)$$

Къ тому же заключенію можно прпдти другой дорогой. Беремъ снова выраженіе (57) и примѣняя къ пирамидѣ, почитаемъ теперь вершину за начало полярныхъ координатъ r, α', β'. Итакъ

$$2\,d^2\,P=d\,\alpha'\,d\,\beta'\cos.\,\beta'\left(\frac{\cos.\,r'}{\sin.\,r'^{2}}-r\right)$$

Поставимъ сюда

$$\cos.\,r'=\frac{\cos.\,q'}{\cos.\,\beta'}\qquad(148)$$

изъ прямоугольнаго треугольника, котораго стороны b, q, r. Получимъ

$$4\left(\frac{d^2\,P}{d\,\alpha'\,d\,\beta'}\right)=\frac{2\cos.\,q'\cos.\,\beta'^{2}}{\cos.\,\beta'^{2}-\cos.\,q'^{2}}-\cos.\,\beta'\log.\left(\frac{\cos.\,\beta'+\cos.\,q'}{\cos.\,\beta'-\cos.\,q'}\right)$$

Умноживъ на $d\,\beta'$, потомъ интегрируя отъ $\beta'=o$,

$$4\left(\frac{d\,P}{d\,\alpha'}\right)=\frac{1}{\sin.\,q'}\log.\left(\frac{1+\cot.\,q'\,\mathrm{tang}.\,\beta'}{1-\cot.\,q'\,\mathrm{tang}.\,\beta'}\right)-\sin.\,\beta'\log.\left(\frac{\cos.\,\beta'+\cos.\,q'}{\cos.\,\beta'-\cos.\,q'}\right)\qquad(149)$$

Между тѣмъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ, въ одномъ изъ b, q, r, въ другомъ изъ a, q, h [ур. (21), (25)]

$$\mathrm{tang}.\,\beta'=\cos.\,b'\,\mathrm{tang}.\,q'\qquad(150)$$

$$\mathrm{tang}.\,\alpha'=\cos.\,a'\,\mathrm{tang}.\,h'\qquad(151)$$

$$\sin.\,q'=\sin.\,a'\sin.\,h'\qquad(152)$$

Съ помощію которыхъ уравненій и съ уравненіемъ (148) выраженіе (149) для P переходитъ въ такое:

$$2\left(\frac{d\,P}{d\,\alpha'}\right)=\frac{b}{\sin.\,a'\sin.\,h'}-r\sin.\,\beta'$$

Къ этому находимъ изъ уравненія (151)

$$d\,\alpha'=-\frac{\sin.\,h'\cos.\,h'\sin.\,a'\,d\,a'}{1-\sin.\,a'^{2}\sin.\,h'^{2}}$$

Изъ уравненій (148), (150), (152) еще

$$\sin.\ \beta' = \frac{\cos.\ b'}{\cos.\ r'} \sin.\ a' \sin.\ h'$$

и такимъ образомъ снова приходимъ къ выраженію (147), которому съ пособіемъ уравненій (140), (141) даемъ видъ:

$$dP = \tfrac{1}{4} \cos.\ h' \frac{da'}{1 - \sin.\ a'^2 \sin.\ h'^2} \log. \frac{\sin.\ (a' - B)}{\sin.\ (a' + B)}$$
$$- \tfrac{1}{2} \cos.\ h' \frac{r\,dr \sin.\ r'^2 \operatorname{tang.} B}{\cos.\ r'^2 + \cos.\ h'^2 \operatorname{tang.} B^2} \qquad (153)$$

или, все равно,

$$dP = \tfrac{1}{4} \cos.\ h' \frac{da'}{1 - \sin.\ a'^2 \sin.\ h'^2} \log. \frac{\sin.\ (a' - B)}{\sin.\ (a' + B)}$$
$$- 2 \cos.\ h' \operatorname{tang:} B \frac{r\,dr}{(e^r - e^{-r})^2 + \cos.\ h'^2 \operatorname{tang.} B^2 (e^r + e^{-r})^2} \qquad (154)$$

гдѣ a', r перемѣнныя въ зависимости другъ отъ друга; h и B произвольныя постоянныя.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ, гдѣ q, h, a стороны, получимъ [ур. (25)]

$$\operatorname{tang.} \mu = \cos.\ h' \operatorname{tang.} a' \qquad (155)$$

Далѣе принимая

$$\operatorname{tang.} \delta = \cos,\ h' \operatorname{tang.} B, \qquad (156)$$

находимъ [ур. (17)]

$$\cos.\ h' \int_{\frac{1}{2}\pi} \frac{da'}{1 - \sin.\ a'^2 \sin.\ h'^2} \log. \frac{\sin.\ (a' - B)}{\sin.\ (a' + B)} = - \int_{\mu}^{\frac{1}{2}\pi} d\mu \log. \frac{\sin.\ (\mu - \delta)}{\sin.\ (\mu + \delta)}$$
$$= L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu + \delta) - L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu - \delta) - 2\,L(\delta) \qquad (157)$$

Еще [ур. (97)]

$$8 \cos.\ h' \operatorname{tang.} B \int_{h}^{r} \frac{r\,dr}{(e^r + e^{-r})^2 \cos.\ h'^2 \operatorname{tang.} B^2 + (e^r - e^{-r})^2}$$
$$= 4 \sin.\ \delta \int_{h}^{r} \frac{r\,dr}{e^{2r} + e^{-2r} - 2 \cos.\ 2\delta}$$
$$= L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta) - L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta) - L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \delta) + L(\tfrac{1}{2}\pi - B - \delta) \qquad (158)$$

гдѣ

$$\text{tang. } \xi = \frac{\text{cos. } h'}{\text{cos. } r'} \text{ tang. } B. \tag{159}$$

такимъ образомъ изъ уравненія (153) получимъ величину пирамиды

$$\begin{aligned} P = {} & \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu + \delta') - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu - \delta') - \tfrac{1}{2} L(\delta') \\ & - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta') + \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta') \\ & + \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \delta') - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - B - \delta'); \end{aligned} \tag{160}$$

а случая съ другимъ значеніемъ P [ур. (135)], выводимъ

$$\begin{aligned} & \text{cos. } a' \text{ sin. } h' \text{ cos. } h' \int_{r'}^{q'} \frac{d r' \text{ sin. } r' \text{ log. cot. } \frac{1}{2} r'}{(\text{sin. } h'^2 - \text{sin. } r'^2) \sqrt{\text{sin. } q'^2 - \text{sin. } r'^2}} = \\ & h B + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu + \delta') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu - \delta') - L(\delta') \\ & \quad - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta') + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta') \\ & \quad + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \delta') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B - \delta') \end{aligned} \tag{161}$$

Гдѣ разсматривая q', h' какъ данныя дуги подъ условіемъ $h' > q'$, находимъ изъ уравненій (152), (140)

$$\text{sin. } a' = \frac{\text{sin. } q'}{\text{sin. } h'} \tag{162}$$

$$\text{tang. } B = \sqrt{\frac{\text{sin. } (q' + r') \text{ sin. } (q' - r')}{\text{sin. } (h' + q') \text{ sin. } (h' - q')}}$$

Къ тому въ прямоугольномъ треугольникѣ, гдѣ h, a катеты [ур. (24)]

$$\text{sin. } \mu = \text{tang. } q' \text{ cot. } h'$$

и наконецъ изъ уравненій (156), (159), (162)

$$\text{sin. } \xi = \frac{\text{cos. } h'}{\text{cos. } q'} \text{ sin. } B \tag{163}$$

Выраженію (151) для P можемъ дать еще новый видъ, поставя сюда

$$d B \text{ cos. } \gamma' = d \xi$$

какъ это легко найти съ исключеніемъ r' въ двухъ уравненіяхъ (134), (140). Такъ получимъ

$$2 P = \xi r - h B - \int_0 \xi \, d r$$

и можемъ замѣтить, что $\frac{1}{2}\pi - \xi$ будетъ уголъ плоскостей, которыя проходятъ чрезъ q, h и которыхъ r линія пересѣченія, какъ въ этомъ увѣриться не трудно

разсматривая сферическій прямоугольный треугольникъ изъ катетовъ α', β' съ гипотенузой γ', и гдѣ B уголъ противъ β'.

Далѣе значеніе B [ур. (163)] перемѣняетъ уравненіе (140) въ такое

$$\cos.\, r' = \frac{\cos.\, h' \cos.\, q' \cos.\, \xi}{\sqrt{\cos.\, h'^2 - \cos.\, q'^2 \sin.\, \xi^2}}$$

Отсюда

$$d\, r = \frac{\cos.\, a'^2 \cos.\, h' \cos.\, q' \sin.\, \xi\, d\, \xi}{(\sin.\, a'^2 \cos.\, h'^2 - \cos.\, q'^2 \sin.\, \xi^2)\sqrt{\cos.\, h'^2 - \cos.\, q'^2 \sin.\, \xi^2}}$$

и слѣдовательно

$$2\, P = \xi\, r - h\, B$$

$$- \cos.\, h' \cos.\, a'^2 \times \int_0^{\xi} \frac{\xi\, d\, \xi \sin.\, \xi}{(\sin.\, a'^2 \cos.\, h'^2 - \cos.\, q'^2 \sin.\, \xi^2)\sqrt{\cos.\, h'^2 - \cos.\, q'^2 \sin.\, \xi^2}}$$

что сравнивая съ значеніемъ P [ур. (158)], заключаемъ

$$\cos.\, h' \cos.\, q' \cos.\, a' \times \int_0^{\xi} \frac{\xi\, d\, \xi \sin.\, \xi}{(\sin.\, a'^2 \cos.\, h'^2 - \cos.\, q'^2 \sin.\, \xi^2)\sqrt{\cos.\, h'^2 - \cos.\, q'^2 \sin.\, \xi^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&\xi\, r - h\, B + L(\delta') \\
&+ \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta') \\
&- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu + \delta') + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu - \delta') \\
&- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \delta') + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B - \delta');
\end{aligned}$$

а со введеніемъ сюда

$$\cos.\, \alpha' = \frac{\cos.\, h'}{\cos.\, q'},$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\cos.\, a'^2 \cos.\, \alpha'^2}{\cos.\, h'} \int_0^{\xi} \frac{\xi\, d\, \xi \sin.\, \xi}{(\sin.\, a'^2 \cos.\, \alpha'^2 - \sin.\, \xi^2)\sqrt{\cos.\, \alpha'^2 - \sin.\, \xi^2}} \\
&= \xi\, r - h\, B + L(\delta') + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta') \\
&- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu + \delta') + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu - \delta') \\
&- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \delta') + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B - \delta')
\end{aligned}\right\} \qquad (164)$$

гдѣ разсматривая a', α' какъ данныя, находимъ въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго h, a, q стороны [ур. (25)]

$$\text{tang.}\, h' = \frac{\text{tang.}\, \alpha'}{\cos.\, a'}$$

и въ этомъ же треугольникѣ [ур. (22)]

$$\cos.\, q' \cos.\, \alpha' = \cos.\, h'$$

Послѣ чего [ур. (163)]

$$\sin.\, B = \frac{\sin.\, \xi}{\cos.\, \alpha'}.$$

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ, у которыхъ въ одномъ стороны a, b, c, въ другомъ c, h, r, будетъ

$$\cos.\, c' \cos.\, B = \cos.\, a'$$

$$\sin.\, r' = \sin.\, h' \sin.\, c',$$

и слѣдовательно

$$\cos.\, r' = \frac{\cos.\, a' \cos.\, \alpha' \cos.\, \xi}{\sqrt{1 - \sin.\, a'^2 \cos.\, \alpha'^2}\,\sqrt{\cos.\, \alpha'^2 - \sin.\, \xi^2}};$$

отсюда

$$r = \tfrac{1}{2} \log. \left\{ \frac{\sqrt{1 - \sin.\, a'^2 \cos.\, \alpha'^2}\,\sqrt{\cos.\, \alpha'^2 - \sin.\, \xi^2} + \cos.\, a' \cos.\, \alpha' \cos.\, \xi}{\sqrt{1 - \sin.\, a'^2 \cos.\, \alpha'^2}\,\sqrt{\cos.\, \alpha'^2 - \sin.\, \xi^2} - \cos.\, a' \cos.\, \alpha' \cos.\, \xi} \right\}.$$

Наконецъ углы μ, δ опредѣляемъ изъ уравненій (155), (156)

$$\sin.\, \mu = \sin.\, a' \cos.\, \alpha'$$

$$\text{tang.}\, \delta = \frac{\cos.\, a' \cos.\, \alpha' \sin.\, \xi}{\sqrt{1 - \cos.\, \alpha'^2 \sin.\, a'^2}\,\sqrt{\cos.\, \alpha'^2 - \sin.\, \xi^2}}$$

Оставаясь при тѣхъ же означеніяхъ, продолжаемъ въ пирамидѣ P высоту h и два ребра q, r чрезъ вершину D до какой нибудь B' (чер. 20) и до точекъ E, F, такъ чтобы разстоянія $DE = \alpha$, $DF = \gamma$ представляли линіи въ уравненіяхъ

$$\alpha = \log.\, \cot.\, \tfrac{1}{2}\, \alpha' \qquad\qquad \gamma = \log.\, \cot.\, \tfrac{1}{2}\, \gamma'$$

Теперь изъ точки E перпендикулъ EE' къ плоскости двухъ линій α, γ долженъ быть уже параленъ съ BB' [ур. (1)]. Далѣе плоскости $B'DF$ и $E'EF$ пере-

сѣкаются въ линіи тоже паралельной съ BB' и вмѣстѣ перпендикулярной къ $DF = \gamma$ [ур. (1)], а потому $EF = p$ будетъ перпендикулъ къ γ, и слѣдовательно $p' = \frac{1}{2}\pi - \xi$ когда подъ ξ разумѣемъ, какъ и выше, тотъ уголъ, который около ребра r составляютъ плоскости, проведенныя чрезъ h и q.

Уравненіе (163) показываетъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ DFE, котораго α, p, γ стороны, уголъ противъ γ долженъ быть $\frac{1}{2}\pi - B$.

Соединяемъ точки A, E линіей, которая такимъ образомъ съ α составитъ уголъ ψ. Этотъ уголъ находимъ изъ прямоугольнаго треугольника, гдѣ b и $q + \alpha = t$ катеты, слѣдовательно [ур. (25)]

$$\text{tang. } \psi = \cos. b \text{ tang. } t' \qquad (165)$$

Ведемъ къ линіи BB' паралельныя AA', BB' отъ остреевъ двухъ другихъ угловъ A, C основанія. Три паралельныя AA', BB', CC' будутъ ребрами безконечной пирамиды P', поставленной на томъ же прямоугольномъ треугольникѣ ABC съ пирамидой P. И такъ

$$P = P' + Q$$

гдѣ Q пирамида съ треугольнымъ основаніемъ ACD изъ линій b, q, r и которой паралельныя ребра тѣже, что пирамиды P. Далѣе, пирамиду Q можемъ принимать за разность пирамиды P'' на треугольникѣ ACE съ пирамидой на треугольникѣ ADE, и наконецъ эту послѣднюю за разность пирамиды P''' на треугольникѣ AFE съ пирамидой P^{IV} на треугольникѣ DFE, тогда какъ ихъ ребра всѣ паралельны къ одному BB'. Итакъ

$$P = P' - P'' + P''' - P^{IV}$$

Значеніе безконечныхъ пирамидъ будутъ здѣсь [ур. (89)]

$$P' = \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) - \tfrac{1}{2} L(B)$$
$$P'' = \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - t' + \psi) - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - t' - \psi) - \tfrac{1}{2} L(\psi)$$
$$P''' = \tfrac{1}{4} L(\pi - p' + \psi - B) - \tfrac{1}{4} L(B - \psi - p') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \psi)$$
$$P^{IV} = \tfrac{1}{4} L(\pi - p' - B) - \tfrac{1}{4} L(B - p') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B)$$

Изъ двухъ паралельныхъ CC', EE', проведенныхъ отъ концевъ линій $q + \alpha = t$, послѣдняя EE' перпендикулярна къ t, слѣдовательно первая CC' наклонена къ t подъ угломъ t', тогда какъ съ a составляетъ уголъ a', будучи паралельна къ

перпендикулу BB' въ концѣ линіи a. Значеніе $t' = a' - \mu$ перемѣняетъ уравненіе (165) въ такое

$$\text{tang. } \psi = \cos. b' \text{ tang. } (a' - \mu) \tag{166}$$

Величину же пирамиды P выразимъ теперь

$$\left.\begin{aligned}
P = {} & \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) - \tfrac{1}{2} L(B) \\
& - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + \mu + \psi) + \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + \mu - \psi) - \tfrac{1}{2} L(\psi) \\
& + \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi + \xi + \psi - B) - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \psi - B) - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \psi) \\
& - \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi + \xi - B) + \tfrac{1}{4} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - B) + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - B)
\end{aligned}\right\} \tag{167}$$

Сравнивая два значенія (158), (167) пирамиды P, заключаемъ

$$\begin{aligned}
& L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - \mu - \delta') - 2L(\delta') \\
& - L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta') + L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta') \\
& + L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - B - \delta') \\
= {} & L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + B) - L(\tfrac{1}{2}\pi - a' - B) - 2L(B) \\
& - L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + \mu + \psi) + L(\tfrac{1}{2}\pi - a' + \mu - \psi) + 2L(\psi) \\
& + L(\tfrac{1}{2}\pi + \xi + \psi - B) + L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \psi - B) - 2L(\tfrac{1}{2}\pi - B + \psi) \\
& - L(\tfrac{1}{2}\pi + \xi - B) + L(\tfrac{1}{2}\pi - B - \xi) + 2L(\tfrac{1}{2}\pi - B)
\end{aligned}$$

гдѣ подъ знакъ L функціи входятъ три произвольныхъ перемѣннымъ. Если разсматриваемъ B, ξ, μ какъ данныя, полагая къ тому

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mu = x \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \xi = y$$

$$\tfrac{1}{2}\pi - B = z \qquad \tfrac{1}{2}\pi - a' = u$$

то получимъ

$$\left.\begin{aligned}
& L(x + \delta') - L(x - \delta') - 2L(\delta') \\
& - L(y + \delta') + L(y - \delta') + L(z + \delta') - L(z - \delta') \\
= {} & L(\tfrac{1}{2}\pi - z + u) + L(\tfrac{1}{2}\pi - z - u) - 2L(\tfrac{1}{2}\pi - z) \\
& - L(\tfrac{1}{2}\pi - x + u + \psi) + L(\tfrac{1}{2}\pi - x + u - \psi) + 2L(\psi) \\
& + L(\tfrac{1}{2}\pi - y + z + \psi) - L(\tfrac{1}{2}\pi - y - z - \psi) - 2L(z + \psi) \\
& - L(\tfrac{1}{2}\pi - y + z) + L(\tfrac{1}{2}\pi - y - z) + (2Lz)
\end{aligned}\right\} \tag{168}$$

гдѣ u, δ, ψ опредѣляются:

$$\cos. u = \frac{\cos. x}{\cos. y} \cos. z$$

$$\text{tang.}\, \delta = \text{tang.}\, u \cot. x \cot. z$$

$$\text{tang.}\, \psi = \text{tang.}\, u \,\text{tang.}\, (x - u) \cot. z$$

которыя уравненія слѣдуютъ изъ прежнихъ (156), (163), (165), если замѣтимъ къ тому, что

$$\frac{\cos. h'}{\cos. q'} = \frac{\cos. h' \cos. \mu}{\cos. a'} = \frac{\sin. \mu}{\sin. a'} \tag{169}$$

Въ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 19) не предполагая теперь уголъ C прямымъ, можемъ величину пирамиды P выразить [ур. (86)]:

$$P = \frac{r \sin. \mu \cos. q'}{2 \sin. a' \cos. r'} \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\, C}{\sin. a'} \right) - \tfrac{1}{2} q \,\text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\, C}{\sin. \mu} \right)$$

$$- \tfrac{1}{2} (\pi - B) \left(r \frac{\cos. h'}{\cos. r'} - h \right) - \tfrac{1}{2} \text{arc. tang.} (\cot. \mu \sin. C) \log. \frac{\sin. a'}{\sin. c'}$$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r \sin. \mu \cos. \mu \,(\sin. q'^2 \cos. r'^2 - \sin. \mu^2 \cos. q'^2 \sin. r'^2)}{\cos. \mu^2 \sin. a'^2 \cos. r'^2 - \sin. \mu^2 \cos. a'^2} \times$$

$$\left\{ \cot. \mu \,\text{arc. tang.} \frac{\cot. \mu \sin. C}{\sqrt{1 - (1 - \cos. \mu^2 \cos. C^2) \,\text{tang.}\, r'^2 \cot. q'^2}} \right.$$

$$\left. - \frac{\cot. a'}{\cos. r'} \text{arc. tang.} \frac{\cot. a' \sin. C}{\cos. r' \sqrt{1 - (1 - \cos. \mu^2 \cos. C^2) \,\text{tang.}\, r'^2 \cot. q'^2}} \right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sin. \mu \cos. \mu \int_0^{} \frac{d\,C \cos. C}{1 - \cos. \mu^2 \cos. C^2} \log. \left(\frac{1 + \cos. c' \cos. A}{1 - \cos. a' \cos. C} \right)$$

Съ пособіемъ уравненій (152) и (155), замѣтивъ къ тому, что въ прямоугольномъ треугольникѣ

$$\cos. q' \cos. \mu = \cos. a',$$

находимъ

$$\frac{\sin. q'^2 \cos. r'^2 - \sin. \mu^2 \cos. q'^2 \sin. r'^2}{\cos. \mu^2 \sin. a'^2 \cos. r'^2 - \sin. \mu^2 \cos. a'^2}$$

$$= \frac{\sin. a'^2 \sin. h'^2 \cos. r'^2 - \text{tang.}\, \mu^2 \cos. a'^2 \sin. r'^2}{\cos. \mu^2 \,(\sin. a'^2 \cos. r'^2 - \text{tang.}\, \mu^2 \cos. a'^2)}$$

$$= \frac{1}{\cos. \mu^2} \cdot \frac{\sin. h'^2 \cos. r'^2 - \cos. h'^2 \sin. r'^2}{\cos. r'^2 - \cos. h^2} = \frac{1}{\cos. \mu^2}$$

Между тѣмъ изъ уравненій [ур. (27), (15)]

$$\sin.\ A\ \text{tang.}\ a' = \sin.\ C\ \text{tang.}\ c'$$

$$\text{tang.}\ \omega = \cos.\ h'\ \text{tang.}\ c'$$

разсматривая здѣсь только A, C перемѣнными, получимъ

$$\frac{d\,C\cos.\ C}{1-\cos.\ \mu^2\cos.\ C^2} = \frac{\sin.\ \omega\cos.\ \omega}{\sin.\ \mu\cos.\ \mu}\cdot\frac{d\,A\cos.\ A}{1-\cos.\ \omega^2\cos.\ A^2}$$

Итакъ [ур. (169), (155)]

$$P = \tfrac{1}{2}r\frac{\cos.\ h'}{\cos.\ r'}\left\{\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{tang.}\ C}{\sin.\ a'}\right) - \pi + B\right\} + \tfrac{1}{2}(\pi - B)\,h$$

$$- \tfrac{1}{2}q\ \text{arc. tang.}\left(\frac{\text{tang.}\ C}{\sin.\ \mu}\right) - \tfrac{1}{2}\ \text{arc. tang.}\ (\text{cot.}\ \mu\sin.\ C)\log.\frac{\sin.\ a'}{\sin.\ c'}$$

$$- \tfrac{1}{2}r\ \text{arc. tang.}\frac{\text{cot.}\ \mu\ \sin.\ C}{\sqrt{1-(1-\cos.\ \mu^2\cos.\ C^2)\ \text{tang.}\ r'^2\,\text{cot.}\ q'^2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}r\frac{\cos.\ h'}{\cos.\ r'}\ \text{arc. tang.}\ \frac{\text{cot.}\ a'\ \sin.\ C}{\cos.\ r'\sqrt{1-(1-\cos.\ \mu^2\cos.\ C^2)\ \text{tang.}\ r'^2\,\text{cot.}\ q'^2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin.\ \omega\cos.\ \omega\int_0\frac{d\,A\cos.\ A}{1-\cos.\ \omega^2\cos.\ A^2}\log.\ (1+\cos.\ c'\cos.\ A)$$

$$- \tfrac{1}{2}\sin.\ \mu\cos.\ \mu\int_0\frac{d\,C\cos.\ C}{1-\cos.\ \mu^2\cos.\ C^2}\log.\ (1-\cos.\ a'\cos.\ C) \qquad (170)$$

Для $a = c$ будетъ $q = r, A = C, \mu = \omega$, и слѣдовательно

$$P = \frac{r\sin.\ \mu}{\sin.\ a'}\left\{\text{arc. tang.}\frac{\text{tang.}\ A}{\sin.\ a'} - \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}B\right\} + \tfrac{1}{2}h\,(\pi - B) - r\ \text{arc. tang.}\left(\frac{\text{tang.}\ A}{\sin.\ \mu}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin.\ \mu\cos.\ \mu\int_0\frac{d\,A\cos.\ A}{1-\cos.\ \mu^2\cos.\ A^2}\log.\left(\frac{1+\cos.\ a'\cos.\ A}{1-\cos.\ a'\cos.\ A}\right) \qquad (171)$$

Объемъ этой же пирамиды представляемъ другимъ образомъ, раздѣливъ ее плоскостью чрезъ высоту на двѣ равныя съ прямоугольными треугольниками въ основаніи, гдѣ $\frac{1}{2}B$ будетъ уголъ противъ стороны $\frac{1}{2}b$. Послѣ чего называя D уголъ наклоненія не перпендикулярной грани къ основанію, и къ тому дѣлая {ур. (155). (159)}

$$\text{tang.}\ \delta = \cos.\ h'\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}B \qquad (172)$$

$$\text{tang.}\ \xi = \frac{\cos.\ h'}{\cos.\ r'}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}B \qquad (173)$$

получимъ $\{$ур. (160)$\}$

$$P = \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta') - L(\delta')$$
$$- \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta') + \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta')$$
$$+ \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B + \delta') - \tfrac{1}{2} L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B - \delta')$$

Сличая такое выраженіе для P съ прежнимъ (171), заключаемъ:

$$\sin.\mu \cos.\mu \int_0 \frac{dA \cos.A}{1 - \cos.\mu^2 \cos.A^2} \log.\left(\frac{1 + \cos.a' \cos.A}{1 - \cos.a' \cos.A}\right) =$$
$$\frac{r \sin.\mu}{\sin.a'} \{ B - 2 \text{ arc. cot. } (\cot.A \sin.a') \} - (\pi - B)\, h$$
$$+ 2r \text{ arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\, A}{\sin.\mu}\right) - 2L(\delta') + L(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta')$$
$$- L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta') + L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta')$$
$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B - \delta') \qquad (174)$$

Разсматривая здѣсь a' A, μ данными, находимъ прочія величины.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ, который составленъ изъ сторонъ a, r, h съ угломъ μ противъ h $\{$ур. (22), (25)$\}$

$$\cos.r' = \frac{\cos.a'}{\cos.\mu} \qquad (175)$$
$$\cos.h' = \text{tang.}\,\mu \cot.a'$$

Отсюда

$$r = \tfrac{1}{2} \log. \{ \cot.\tfrac{1}{2}(a' + \mu) \cot.\tfrac{1}{2}(a' - \mu) \}$$
$$h = \tfrac{1}{2} \log. \frac{\sin.(a' + \mu)}{\sin.(a' - \mu)}$$

Далѣе въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго углы A, $\frac{1}{2}B$ при гипотенузѣ a, называя p сторону противъ A, получимъ [ур. (23), (24)]

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}B = \sin.a' \cot.A \qquad (177)$$
$$\text{tang.}\,p' = \frac{\text{tang.}\,a'}{\sin.A} \qquad (178)$$

Изъ соединенія уравненій (172), (176), (177), находимъ

$$\text{tang}\,\delta = \text{tang}\,\mu \cos a' \cot A.$$

Подобнымъ образомъ изъ уравненій (173), (175), (177)

$$\text{tang}\,\xi = \sin \mu \cot A.$$

Наконецъ въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго катеты p, h и гдѣ уголъ D противъ h [ур. (25)]

$$\text{tang}\,D = \cos h' \,\text{tang}\,p',$$

что въ соединеніи съ уравненіями (176), (178) даетъ

$$\text{tang}\,D = \frac{\text{tang}\,\mu}{\sin A},$$

а самый интегралъ (174), съ нѣкоторой перемѣной въ немъ, будетъ

$$\sin \mu \cos \mu \int_0 \frac{dA \cos A}{1 - \cos \mu^2 \cos A^2} \log.\left(\frac{1 + \cos a' \cos A}{1 - \cos a' \cos A}\right) =$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi - \xi) \log.\,[\cot.\tfrac{1}{2}(a' + \mu) \cot.\tfrac{1}{2}(a' - \mu)]$$

$$-\tfrac{1}{2}(\pi - B) \log.\frac{\sin.(a' + \mu)}{\sin.(a' - \mu)}$$

$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta') - 2L(\delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta')$$

$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta')$$

$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B - \delta') \qquad (179)$$

гдѣ

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}B = \sin.\,a' \cot.\,A$$
$$\text{tang.}\,\xi = \sin.\,\mu \cot.\,A$$
$$\text{tang.}\,\delta = \text{tang.}\,\mu \cot.\,A \cos.\,a'$$

Въ интегралѣ (179) положивъ

$$\sin.\,A \cot.\,\mu = \text{tang.}\,\xi,$$

потомъ интегрируя по частямъ, находимъ

$$\sin.\,\mu \cos.\,\mu \int_0 \frac{dA \cos.\,A}{1 - \cos.\,\mu^2 \cos.\,A^2} \log.\left(\frac{1 + \cos.\,a' \cos.\,A}{1 - \cos.\,a' \cos.\,A}\right)$$

$$= \xi \log.\left(\frac{1 + \cos.\,a' \cos.\,A}{1 - \cos.\,a' \cos.\,A}\right)$$

$$+ 2 \cos.\,a' \cos.\,\mu \int_0 \frac{\xi\, d\xi \sin.\,\xi}{(\cot.\,a'^2 \sin.\,\xi^2 + \cot.\,\mu^2 \cos.\,\xi^2)\sqrt{\cos.\,\mu^2 - \sin.\,\xi^2}} \qquad (180)$$

Каковы бы линіи a, c въ уравненіи (180) ни были, пирамиду P можемъ раздѣлить на двѣ съ прямоугольными треугольниками въ основаніи, потомъ величину каждой изъ нихъ, а слѣдовательно и всей пирамиды P, выразить помощію функцій съ знакомъ L. Называемъ снова D уголъ наклоненія къ основанію не перпендикулярной грани; пусть p какъ и выше, перпендикулъ изъ острея B на сторону b; но теперь называемъ x уголъ, который p дѣлаетъ съ линіей a. Полагая къ тому

$$\text{tang. } \delta' = \cos. h' \text{ tang. } x$$

$$\text{tang. } \eta = \frac{\cos. h'}{\cos. q'} \text{tang. } x$$

$$\text{tang. } k = \cos. h' \text{ tang. } (B - x)$$

$$\text{tang. } \zeta = \frac{\cos. h'}{\cos. r'} \text{tang. } (B - x).$$

получимъ [ур. (160)]

$$\begin{aligned} 4P = {} & L(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta') - 2L(\delta') \\ & - L(\tfrac{1}{2}\pi - \eta + \delta') + L(\tfrac{1}{2}\pi - \eta - \delta') \\ & + L(\tfrac{1}{2}\pi - x + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - x - \delta') \\ & + L(\tfrac{1}{2}\pi - D + k) - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - k) - 2L(k) \\ & - L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta + k) + L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta - k) \\ & + L(\tfrac{1}{2}\pi - B + x + k) - L(\tfrac{1}{2}\pi - B + x - k) \end{aligned}$$

Сравнивая такое значеніе P съ другимъ (170), заключаемъ

$$\begin{aligned} & \sin. 2\omega \int_0 \frac{dA \cos. A}{1 - \cos. \omega^2 \cos. A^2} \log. (1 + \cos. c' \cos. A) \\ & - \sin. 2\mu \int_0 \frac{dC \cos. C}{1 - \cos. \mu^2 \cos. C^2} \log. (1 - \cos. a' \cos. C) \\ = {} & L(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta') - 2L(\delta') \\ & - L(\tfrac{1}{2}\pi - \eta + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - \eta - \delta') \\ & + L(\tfrac{1}{2}\pi - x + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - x - \delta') \\ & + L(\tfrac{1}{2}\pi - D + k) - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - k) - 2L(k) \\ & - L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta + k) + L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta - k) \\ & + L(\tfrac{1}{2}\pi + B + x + k) - L(\tfrac{1}{2}\pi - B + x - k) \end{aligned}$$

$$- 2\ r \frac{\cos.\ h'}{\cos.\ r'} \left\{ \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\ C}{\sin.\ a'} \right) - \pi + B \right\} - 2\ (\pi - B)\ h$$

$$+ 2\ q\ \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang.}\ C}{\sin.\ \mu} \right) + 2\ \text{arc. tang.}\ (\cot.\ \mu\ \sin.\ C) \log. \frac{\sin.\ a'}{\sin.\ c'}$$

$$+ 2\ r\ \text{arc. tang.} \left\{ \frac{\cot.\ \mu\ \sin.\ C}{\sqrt{1 - (1 - \cos.\ \mu^2\ \cos.\ C^2)\ \text{tang.}\ r'^2 \cot.\ q'^2}} \right\}$$

$$- 2\ r \frac{\cos.\ h'}{\cos.\ r'}\ \text{arc. tang.} \left\{ \frac{\cot.\ a'\ \sin.\ C}{\cos.\ r' \sqrt{1 - (1 - \cos.\ \mu^2\ \cos.\ C^2)\ \text{tang.}\ r'^2\ \cot.\ q'^2}} \right\} \quad (181)$$

Перпендикулъ p съ углами x и D находимъ изъ уравненій [ур. (25), (24), (23)]

$$\text{tang.}\ D = \cos.\ h'\ \text{tang.}\ p'$$

$$\text{tang.}\ a' = \text{tang.}\ p'\ \sin.\ C$$

$$\sin.\ a' = \text{tang.}\ x\ \text{tang.}\ C;$$

и слѣдовательно

$$\text{tang.}\ D = \frac{\cos.\ h'\ \text{tang.}\ a'}{\sin.\ C}$$

$$\text{tang.}\ x = \sin.\ a'\ \cot.\ C.$$

Здѣсь углы a' μ произвольные, но должны быть острые и неравные, если не будутъ оба нулями. Послѣдній случай заслуживаетъ особеннаго вниманія. Полагаемъ $a = \infty$ и слѣдовательно $a' = o$, $q = \infty$, $\mu = o$, $C = o$. Съ пособіемъ уравненія (176) находимъ

$$\sin.\ 2\ \mu \int_o \frac{d\ C \cos.\ C}{1 - \cos.\ \mu^2\ \cos.\ C^2} \log.\ (1 - \cos.\ a'\ \cos.\ C)$$

$$= 2\ \cos.\ h'\ \text{tang.}\ a' \int \frac{d\ C \cos.\ C}{\cos.\ h'^2\ \text{tang.}\ a'^2 + \sin.\ C^2} \log.\ (1 - \cos.\ a'\ \cos.\ C).$$

Полагая здѣсь

$$\text{tang.}\ \theta = \frac{\sin.\ C}{\cos.\ h'\ \text{tang.}\ a'}$$

и принимая въ началѣ a' чрезвычайно малымъ, такъ чтобы пренебрегать высшими степенями этой дуги въ сравненіи съ первой, получимъ

$$\cos.\, h' \,\text{tang.}\, a' \int \frac{d\, C \cos.\, C}{\sin.\, C^2 + \cos.\, h'^2 \,\text{tang.}\, a'^2} \log.\, (1 - \cos.\, a' \cos.\, C)$$

$$= \int_0 d\, \theta \log.\, (1 - \cos.\, a' \sqrt{1 - \cos.\, h'^2 \,\text{tang.}\, a'^2 \,\text{tang.}\, \theta^2})$$

$$= \theta \log.\, (2 \sin.\, \tfrac{1}{2} a'^2) + \int d\, \theta \log.\, (1 - \cos.\, h'^2 \,\text{tang.}\, \theta^2)$$

$$= 2\, \theta \log. \left(\frac{\sin.\, a'}{\sqrt{2}} \right) + 2\, L\, (\theta) + \int_0 d\, \theta \log.\, (1 - \sin.\, h'^2 \sin.\, \theta^2)$$

Примѣняя между тѣмъ уравненіе (29) къ основанію пирамиды, должны почитать

$$\cot.\, C \sin.\, B \sin.\, a' + \cos.\, B = \frac{1}{\cos.\, c'}$$

Отсюда

$$\frac{\text{tang.}\, C}{\sin.\, a'} = \frac{\sin.\, B \cos.\, c'}{1 - \cos.\, B \cos.\, c'}$$

и слѣдовательно

$$\cot.\, a' \sin.\, C = \frac{\sin.\, B \cos.\, c'}{1 - \cos.\, B \cos.\, c'}$$

а въ соединеніи съ уравненіемъ (176) получимъ

$$\frac{\text{tang.}\, C}{\sin.\, \mu} = \frac{\cos.\, c'}{\cos.\, h'} \cdot \frac{\sin.\, B}{1 - \cos.\, B \cos.\, c'}$$

$$\cot.\, \mu \sin.\, C = \frac{\cos.\, c'}{\cos.\, h'} \cdot \frac{\sin.\, B}{1 - \cos.\, B \cos.\, c'}$$

Далѣе [ур. (21), (2)]

$$\log.\, (e^q \sin.\, a') = \log. \left(e^q \frac{\sin.\, q'}{\sin.\, h'} \right)$$

$$= -\log.\, \{ \tfrac{1}{2} \sin.\, h' \,(1 + e^{-2q}) \} = \log. \left(\frac{2}{\sin.\, h'} \right)$$

Потомъ

$$\cot.\, q' \sqrt{1 - \cos.\, \mu^2 \cos.\, C^2} = \frac{\text{tang.}\, C}{\sin.\, q'}$$

$$= \frac{\text{tang.}\, C}{\sin.\, a' \sin.\, h'} = \frac{\cos.\, c'}{\sin.\, h'} \cdot \frac{\sin.\, B}{1 - \cos.\, B \cos.\, c'}$$

и наконецъ замѣтимъ, что каковы μ, a' ни будутъ,

$$\text{tang.}\, q' = \text{tang.}\, h' \sin.\, \mu$$

$$\text{tang.}\, r' = \text{tang.}\, h' \sin.\, \omega$$

отсюда

$$\text{tang. } r' \text{ cot. } q' = \frac{\text{sin. } \omega}{\text{sin. } \mu}.$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ съ катетами h, a:

$$\text{tang. } \mu = \text{cos. } h' \text{ tang. } a'$$

Въ такомъ же треугольникѣ, гдѣ a гипотенуза, p катетъ съ угломъ C противъ него,

$$\text{tang. } a' = \text{tang. } p' \text{ sin. } C$$

и въ треугольникѣ съ катетами h, p

$$\text{tang. } D = \text{cos. } h' \text{ tang. } p'$$

Послѣ чего

$$\text{tang. } D = \frac{\text{tang. } \mu}{\text{sin. } C}$$

и потому же

$$\text{tang. } D = \frac{\text{tang. } \omega}{\text{sin. } A};$$

слѣдовательно

$$\text{tang. } \omega \text{ sin. } C = \text{tang. } \mu \text{ sin. } A.$$

Теперь находимъ

$$1 - (1 - \text{cos. } \mu^2 \text{ cos. } C^2) \text{ tang. } r'^2 \text{ cot. } q'^2 = 1 - (1 - \text{cos. } \mu^2 \text{ cos. } C^2) \frac{\text{sin. } \omega^2}{\text{sin. } \mu^2}$$

$$= \text{cos. } \omega^2 - \text{cot. } \mu^2 \text{ sin. } C^2 \text{ sin. } \omega^2 = 1 - \frac{\text{sin. } \omega^2}{\text{sin. } D^2}.$$

Итакъ

$$\text{sin. } 2\omega \int_0^{} \frac{dA \text{ cos. } A}{1 - \text{cos. } \omega^2 \text{ cos. } A^2} \text{log. } (1 + \text{cos. } c' \text{ cos. } A) =$$

$$L(\tfrac{1}{2}\pi - x + D) - L(\tfrac{1}{2}\pi - x - D) - 2L(D)$$

$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - D + k) - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - k) - 2L(k)$$

$$- L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta + k) + L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta - k)$$

$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - B + x + k) - L(\tfrac{1}{2}\pi - B + x - k)$$

$$- 2r \frac{\text{cos. } h'}{\text{cos. } r'} \left\{ \text{arc. tang. } \left(\frac{\text{sin. } B \text{ cos. } c'}{1 - \text{cos. } B \text{ cos. } c'} \right) - \pi + B \right\} - 2(\pi - B)h$$

$$+ 2 \log. \frac{2}{\sin. r'} \cdot \text{arc. tang.} \left(\frac{\cos. c'}{\cos. h'} \cdot \frac{\sin. B}{1 - \cos. B \cos. c'} \right)$$

$$+ 2 r \text{ arc. tang.} \left\{ \frac{\cos. c' \sin. B \sin. D}{\cos. h' (1 - \cos. B \cos. c') \sqrt{\sin. D^2 - \sin. \omega^2}} \right\}$$

$$- 2 r \frac{\cos. h'}{\cos. r'} \text{arc. tang.} \left\{ \frac{\cos. c' \sin. B \sin. D}{\cos. r' (1 - \cos. B \cos. c') \sqrt{\sin. D^2 - \sin. \omega^2}} \right\}$$

$$+ 4 \theta \log. \left(\frac{\sin. a'}{\sqrt{2}} \right) + 4 L(\theta) + 2 \int_0 d\theta \log. (1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2) \qquad (182)$$

гдѣ

$$\text{tang. } \theta = \frac{\cos. c'}{\cos. h'} \cdot \frac{\sin. B}{1 - \cos. B \cos. c'}$$

Что касается до дуги B, то находимъ ея значеніе, представляя на разстояніи f отъ острея B перпендикулъ къ c паралельный съ a и который слѣдовательно долженъ быть также паралеленъ съ b. Итакъ [ур. (1)]

$$\cot. \tfrac{1}{2} B = e^f$$

$$\cot. \tfrac{1}{2} A = e^{c - f}$$

Откуда

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} B = e^{-c} \cot. \tfrac{1}{2} A$$

Въ уравненіи (181) полагаемъ теперь $c = \infty$ и слѣдовательно $c' = o, r = \infty$, $k = \zeta = D, \omega = o, A = o, p' = B - x$. Пусть

$$\text{arc. tang.} \left(\frac{\cot. a' \sin. C \sin. D}{\sqrt{\sin. D^2 - \sin. \omega^2}} \right) = \text{arc. tang. } (\cot. a' \sin. C) + z$$

Пренебрегая безконечно малыми вышсшихъ порядковъ, находимъ

$$z = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 \cot. a' \sin. C}{\sin. D^2 (1 + \cot. a'^2 \sin. C^2)}$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго r гипотенуза, h катетъ съ противоположнымъ угломъ ω,

$$\text{tang. } \omega = \cos. h' \text{ tang. } c'$$

или весьма близко

$$\omega = c' \cos. h'$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ, гдѣ r гипотенуза, c и h катеты

$$\sin. r' = \sin. c' \sin. h'$$

слѣдовательно

$$r' = \omega \operatorname{tang}. h'$$

Послѣ чего [ур. (1)]

$$r = \log. \cot. \tfrac{1}{2} r' = \log. 2 - \log. r'$$
$$= \log. 2 - \log. \operatorname{tang}. h' - \log. \omega.$$

Далѣе

$$r z = - \tfrac{1}{2} \omega^2 \frac{\cot. a' \sin. C}{1 + \cot. a'^2 \sin. C^2} \log. \omega = o$$

а потому

$$r \operatorname{arc}. \operatorname{tang}. \left(\frac{\cot. a' \sin. C \sin. D}{\sqrt{\sin. D^2 - \sin. \omega^2}} \right) = r \operatorname{arc}. \operatorname{tang}. (\cot. a' \sin. C)$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго гипотенуза a и при ней углы C, x, получимъ

$$\operatorname{tang}. p' \sin. C = \operatorname{tang}. a'$$

или

$$\operatorname{tang}. (B - x) = \frac{\operatorname{tang}. a'}{\sin. C}$$

Въ томъ же треугольникѣ

$$\sin. a' = \operatorname{tang}. x \operatorname{tang}. C$$

Послѣ чего

$$\operatorname{arc}. \operatorname{tang}. \frac{\operatorname{tang}. C}{\sin. a'} - \pi + B = B - x - \tfrac{1}{2} \pi$$
$$\operatorname{arc}. \operatorname{tang}. (\cot. a' \sin. C) = \tfrac{1}{2} \pi - B + x$$

Теперь положивъ на время

$$\frac{\sin. A \cot. c'}{\cos. h'} = \operatorname{tang}. \xi$$

для c' и A безконечно малыхъ находимъ

$$\sin. 2\omega \int_0 \frac{d A \cos. A}{1 - \cos. \omega^2 \cos. A^2} \log. (1 + \cos. c' \cos. A)$$
$$= 2 \log. 2 \cos. h' \operatorname{tang}. c' \int \frac{d A \cos. A}{\sin. A^2 + \cos. h'^2 \operatorname{tang}. c'^2}$$
$$= 2 \xi \log. 2 = 2 \log. 2 \operatorname{arc}. \operatorname{tang}. \left(\frac{\sin. B}{1 - \cos. B \cos. a'} \cdot \frac{\cos. a'}{\cos. h'} \right)$$

Еще разсмотрѣть остается выраженіе $r \log. \sin. c'$. Вставляя сюда

$$\sin. c' = \frac{\sin. r'}{\sin. h'}$$

получимъ

$$r \log. \sin. c' = \log. \left(e^r \frac{\sin. r'}{\sin. h'} \right)$$

$$= \log. \frac{2}{\sin. h' \, (1 + e^{-2r})}$$

$$= \log. \left(\frac{2}{\sin. h'} \right)$$

Такимъ образомъ уравненіе (181) теперь сдѣлается

$$\sin. 2 \mu \int_0 \frac{d C \cos. C}{1 - \cos. \mu^2 \cos. C^2} \log. (1 - \cos. a' \cos. C)$$

$$= - L (\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta) + L (\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta) + 2 L (\delta)$$

$$+ L (\tfrac{1}{2}\pi - \eta + \delta) - L (\tfrac{1}{2}\pi - \eta - \delta)$$

$$- L (\tfrac{1}{2}\pi - x + \delta) + L (\tfrac{1}{2}\pi - x - \delta)$$

$$- L (\tfrac{1}{2}\pi - B + x + D) + L (\tfrac{1}{2}\pi - B + x - D) + 2 L (D)$$

$$- 2 q \text{ arc. tang.} \left(\frac{\text{tang. } C}{\sin. \mu} \right)$$

$$+ 2 \text{ arc. tang. } (\cot. \mu \sin. C) \log. (\tfrac{1}{2} \sin. q') + 2 (\pi - B) \, h$$

$$+ 2 \log. 2 \text{ arc. tang.} \left(\frac{\sin. B}{1 - \cos. B \cos. a'} \cdot \frac{\cos. a'}{\cos. h'} \right) \qquad (183)$$

гдѣ

$$\cos. h' = \text{tang. } \mu \cot. a'$$

$$\text{tang. } D = \frac{\text{tang. } \mu}{\sin. C}$$

$$\text{tang. } x = \sin. a' \cot. C$$

$$\text{tang. } \delta = \cos. a' \text{ tang. } \mu \cot. C$$

$$\text{tang. } \eta = \sin. \mu \cot. C$$

$$\cot. \tfrac{1}{2} B = e^a \text{ tang. } \tfrac{1}{2} C.$$

Въ неопредѣленномъ интегралѣ (183) уголъ a' произвольный, а потому ставя $\pi - a'$ вмѣсто a', получимъ

$$\sin. 2\,\mu \int_0 \frac{d\,C \cos. C}{1 - \cos. \mu^2 \cos. C^2} \log. (1 + \cos. a' \cos. C)$$

$$= L(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta') - 2\,L(\delta')$$
$$- L(\tfrac{1}{2}\pi - \eta + \delta') + L(\tfrac{1}{2}\pi - \eta - \delta')$$
$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - x + \delta') - L(\tfrac{1}{2}\pi - x - \delta')$$
$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - E + x - D) - L(\tfrac{1}{2}\pi - E + x + D) + 2\,L(D) \qquad (184)$$
$$- 2\,q \text{ arc. tang.} \left(\frac{\text{tang. } C}{\sin. \mu}\right) + 2 \text{ arc. tang. } (\cot. \mu \sin. C) \log. (\tfrac{1}{2} \sin. q')$$
$$- 2\,(\pi - E)\,h - 2 \log 2. \text{ arc. tang.} \left(\frac{\sin. E \quad \cos. a'}{1 + \cos. E \cos. a' \cos. h'}\right),$$

гдѣ

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} E = e^a \cot. \tfrac{1}{2} C$$

а прочія величины h, D, x, δ', η тѣже, что въ уравненіи (183).

Въ интегралѣ (183) почитая a' и слѣдовательно C безконечно малыми, къ тому полагая

$$\text{tang. } \theta = \frac{\cot. a'}{\cos. h'} \sin. C,$$

находимъ

$$\sin. 2\,\mu \int_0 \frac{d\,C \cos. C}{1 - \cos. \mu^2 \cos. C^2} \log. (1 - \cos. a' \cos. C)$$

$$= 2 \cos. h' \text{ tang. } a' \int_0 \frac{d\,C \cos. C}{\cos. h' \text{ tang. } a'^2 + \sin. C^2} \log. (1 - \cos. a' \cos. C)$$

$$= 2 \int_0 d\,\theta \log. (1 - \cos. a' \sqrt{1 - \cos. h'^2 \text{ tang. } a'^2 \text{ tang. } \theta^2})$$

$$= 2 \int_0 d\,\theta \log. (2 \sin. \tfrac{1}{2} a'^2 + \tfrac{1}{2} \cos. h'^2 \sin. a'^2 \text{ tang. } \theta^2)$$

$$= 2\,\theta \log. (2 \sin. \tfrac{1}{2} a'^2) + 4\,L(\theta) + 2 \int_0 d\,\theta \log. (1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2)$$

$$= - 4\,q\theta + 4\,\theta \log. \frac{\sqrt{2}}{\sin. h'} + 2 \int_0 d\,\theta \log. (1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2) + 4\,L(\theta)$$

Вмѣстѣ съ этимъ, какъ видѣли выше, надобно принимать $\delta = \eta = D$. Далѣе $x = p' = \frac{1}{2} B$,

$$\cot. a' \sin. c = \frac{\tang. C}{\sin. a'}$$

$$= \frac{\sin. B \cos. c'}{1 - \cos. B \cos. c'} = \cot. \tfrac{1}{2} B,$$

$$\frac{\tang. C}{\sin. \mu} = \cot. \mu \sin. C =$$

$$\frac{\cos. c'}{\cos. h'} \frac{\sin. B}{1 - \cos. B \cos. c'} = \frac{\cot. \frac{1}{2} B}{\cos. h'};$$

слѣдовательно

$$\tang. D = \tang. \tfrac{1}{2} B \cos. h',$$

$$\tang. x = \cot. \tfrac{1}{2} B,$$

$$\tang. \theta = \frac{\cot. \frac{1}{2} B}{\cos. h'}.$$

Отсюда $D = \frac{1}{2} \pi - \theta$, потомъ

$$2 \text{ arc. tang. } (\cot. \mu \sin. C) \log. (\tfrac{1}{2} \sin. q') - 2\ q \text{ arc. tang.} \left(\frac{\tang. C}{\sin. \mu}\right) = -4\, q\, \theta.$$

Такимъ образомъ получимъ

$$\int_0 d\theta \log. (1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2) = (\pi - B) h + L(\theta - \tfrac{1}{2} B) - L(\pi - {}_2 B - \theta)$$
$$- 2 L(\theta) + 2 L(\tfrac{1}{2} \pi - \theta)$$
$$+ 2 \theta \log. \sin. h'$$

или [ур. (14)]

$$\int_0 d\theta \log. (1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2) = (\pi - B) h + L(\theta - \tfrac{1}{2} B) - L(\pi - \tfrac{1}{2} B - \theta)$$
$$+ L(\tfrac{1}{2} \pi - 2\theta) + \tfrac{1}{2} \pi \log. 2 + 2 \theta \log. (\tfrac{1}{2} \sin. h') \qquad (185)$$

гдѣ

$$\cot. \tfrac{1}{2} B = \cos. h' \tang. \theta.$$

Когда повѣряемъ интегралъ (185), то дифференцированіе даетъ

$$d\theta \log. (1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2) = \tfrac{1}{2} d B \log. \left\{\frac{\tang. \frac{1}{2} h'^2 \cos. (\theta - \frac{1}{2} B)}{\cos. (\pi - \frac{1}{2} B - \theta)}\right\}$$
$$+ d\theta \log. \left\{\frac{\sin. \theta^2 \cos. \theta^2 \sin. h'^2}{\cos. (\theta - \frac{1}{2} B) \cos. (\pi - \frac{1}{2} B - \theta)}\right\}$$

Здѣсь

$$\log. \left\{\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}h'^2\,\cos.\,(\theta-\frac{1}{2}B)}{\cos.\,(\pi-\frac{1}{2}B-\theta)}\right\}=\log.\left\{\text{tang.}\,\frac{1}{2}h'^2\,\frac{1+\text{tang.}\,\theta\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}B}{\text{tang.}\,\theta\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}B-1}\right\}$$

$$=\log.\left\{\text{tang.}\,\frac{1}{2}h'^2\,\frac{1+\cos.\,h'}{1-\cos.\,h'}\right\}=o$$

Множитель при $d\theta$ на второй сторонѣ

$$\log.\left\{\frac{\sin.\,\theta^2\,\cos.\,\theta^2\,\sin.\,h'^2}{\cos.\,(\theta-\frac{1}{2}B)\,\cos.\,(\pi-\frac{1}{2}B-\theta)}\right\}$$

$$=\log.\left(\frac{2\,\sin.\,\theta^2\,\cos.\,\theta^2\,\sin.\,h'^2}{-\cos.\,B-\cos.\,2\theta}\right)=\log.\left\{\frac{\sin.\,\theta^2\,\cos.\,\theta^2\,\sin.\,h'^2}{\sin.\,\frac{1}{2}B^2-\cos.\,\theta^2}\right\}$$

$$=\log.\,(1-\sin.\,h'^2\,\sin.\,\theta^2),$$

какъ и должно быть.

Въ уравненіи (185) полагая $\theta=\frac{1}{2}\pi$ и слѣдовательно $B=o$, получимъ

$$\int_o^{\frac{1}{2}\pi} d\theta\,\log.\,(1-\sin.\,h'^2\,\sin.\,\theta^2)=2\,\pi\,\log.\,(\cos.\,\tfrac{1}{2}h') \qquad (186)$$

какъ я нашелъ въ другомъ моемъ сочиненіи, также занимаясь примѣненіемъ Воображаемой Геометріи, но въ тотъ разъ употребивъ способъ совершенно различный отъ настоящаго

Интегралъ (186) можетъ еще быть выведенъ изъ такого

$$\int_o^{\pi} d\theta\,\log.\,(1+a^2-2\,a\,\cos.\,\theta)=o$$

гдѣ постоянное $a<1$, и который въ этомъ видѣ далъ Пуассонъ (Journal de l' Ecole Polyt., cah 17).

Если въ уравненіи (179) перемѣняемъ A, B на $C, 2\,x$, то значеніе всѣхъ уже буквъ сдѣлается тоже, что въ уравненіи (183); именно:

$$\text{tang.}\,x=\sin.\,a'\,\cot.\,C$$

$$\cos.\,h'=\text{tang.}\,\mu\,\cot.\,a'$$

$$\text{tang.}\,\delta=\cos.\,a'\,\text{tang.}\,\mu\,\cot.\,C$$

$$\text{tang.}\,\xi=\sin.\,\mu\,\cot.\,C$$

$$\cot.\,D=\cot.\,\mu\,\sin.\,C$$

Самый интегралъ (179) теперь напишется

$$\text{sin. } 2\,\mu \int_{\circ} \frac{d\,C \text{ cos. } C}{1 - \text{cos. } \mu^2 \text{ cos. } C^2} \text{ log.} \left(\frac{1 + \text{cos. } a' \text{ cos. } A}{1 - \text{cos. } a' \text{ cos. } A} \right)$$

$$= (\pi - 2\,\xi) \text{ log. } \left\{ \text{cot. } \tfrac{1}{2}(a' + \mu) \text{ cot. } \tfrac{1}{2}(a' - \mu) \right\}$$

$$- (\pi - 2\,x) \text{ log. } \frac{\text{sin. } (a' + \mu)}{\text{sin. } (a' - \mu)} + 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta) - 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta)$$

$$- 4\,L\,(\delta) - 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta) + 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta)$$

$$+ 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - x + \delta) - 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - x + \delta) \qquad (187)$$

Соединеніе двухъ интеграловъ (183), (187) даетъ

$$\text{sin. } 2\,\mu \int \frac{d\,C \text{ cos. } C}{1 - \text{cos. } \mu^2 \text{ cos. } C^2} \text{ log. } (1 + \text{cos. } a' \text{ cos. } C)$$

$$= (\tfrac{1}{2}\pi - \xi) \text{ log. } [\text{cot. } \tfrac{1}{2}(a' + \mu) \text{ cot. } \tfrac{1}{2}(a' - \mu)]$$

$$- (x - p') \text{ log. } \frac{\text{sin. } (a' + \mu)}{\text{sin. } (a' - \mu)} + L\,(\tfrac{1}{2}\pi - D + \delta) - L\,(\tfrac{1}{2}\pi - D - \delta)$$

$$- 2\,L\,(\delta) - L\,(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta) + L\,(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta) + L\,(\tfrac{1}{2}\pi + x + \delta)$$

$$- L\,(\tfrac{1}{2}\pi - x - \delta) - L\,(\tfrac{1}{2}\pi - p' + D) + L\,(\tfrac{1}{2}\pi - p' - D)$$

$$+ 2\,L\,(D) + (\tfrac{1}{2}\pi - D) \text{ log. } \frac{\text{sin. } (a' + \mu) \text{ sin. } (a' - \mu)}{\text{cos. } \mu^2} \qquad (188)$$

гдѣ

$$\text{cot. } p' = \text{cot. } a' \text{ sin. } C$$

Интегралъ (188) складывая съ прежнимъ (183), получимъ

$$\text{sin. } 2\,\mu \int_{\circ} \frac{d\,C \text{ cos. } C}{1 - \text{cos. } \mu^2 \text{ cos. } C^2} \text{ log. } (1 - \text{cos. } a'^2 \text{ cos. } C^2)$$

$$= (\pi - 2\,p') \text{ log. } \frac{\text{sin. } (a' + \mu)}{\text{sin. } (a' - \mu)} - 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - p' + D) + 2\,L\,(\tfrac{1}{2}\pi - p' - D)$$

$$+ 4\,L\,(D) + (\pi - 2\,D) \text{ log. } \frac{\text{sin. } (a' + \mu) \text{ sin. } (a' - \mu)}{\text{cos. } \mu^2} \qquad (189)$$

Тоже бы нашли съ пособіемъ уравненія (185), именно

$$\text{sin. } 2\,\mu \int_{\circ} \frac{d\,C \text{ cos. } C}{1 - \text{cos. } \mu^2 \text{ cos. } C^2} \text{ log. } (1 - \text{cos. } a'^2 \text{ cos. } C^2)$$

$$= 2 \int^{\frac{1}{2}\pi} d\,D \text{ log. } (\text{sin. } a'^2 + \text{cot. } a'^2 \text{ tang. } \mu^2 + \text{cot. } D^2)$$

$$= 4\,L\left(\tfrac{1}{2}\pi - D\right) + 4\,L\left(\tfrac{1}{2}\pi - D\right)\log.\,\text{Sin.}\,a'$$

$$+ 2\int^{\frac{1}{2}\pi} d\,D\log.\,(1 - \text{Sin.}\,h'^2\,\text{Cos.}\,D^2)$$

$$= 4\left(\tfrac{1}{2}\pi - D\right)\log\text{Sin.}\,q' + 2\,(\pi - 2\,p')\,h + 2\,L\left(\tfrac{1}{2}\pi - D - p'\right)$$

$$- 2\,L\left(\tfrac{1}{2}\pi - p' + D\right) + 4\,L\,(D)$$

Въ интегралѣ (189) полагая

$$\cot.\,\mu\,\text{sin.}\,C = \text{tang.}\,\theta,$$

находимъ

$$\text{sin.}\,2\,\mu\int\frac{d\,C\,\text{cos.}\,C}{1 - \text{cos.}\,\mu^2\,\text{cos.}\,C^2}\log.\left(\frac{1 + \text{cos.}\,a'\,\text{cos.}\,C}{1 - \text{cos.}\,a'\,\text{cos.}\,C}\right)$$

$$= 2\,\theta\log.\left(\frac{1 + \text{cos.}\,a'\,\text{cos.}\,C}{1 - \text{cos.}\,a'\,\text{cos.}\,C}\right)$$

$$+ \frac{4\,\text{cos.}\,a'\,\text{sin.}\,\mu^2}{\text{cos.}\,\mu\,\text{sin.}\,a'^2}\int_0^{\theta}\frac{\theta\,d\,\theta\,\text{sin.}\,\theta}{(1 - \text{sin.}\,h'^2\,\text{sin.}\,\theta^2)\sqrt{\text{cos.}\,\mu^2 - \text{sin.}\,\theta^2}}$$

къ тому $\theta = \frac{1}{2}\pi - D$ и слѣдовательно

$$2\,\frac{\text{cos.}\,a'\,\text{sin.}\,\mu^2}{\text{cos.}\,\mu^2\,\text{sin.}\,a'^2}\int_0^{\theta}\frac{\theta\,d\,\theta\,\text{sin.}\,\theta}{(1 - \text{sin.}\,h'^2\text{sin.}\,\theta^2)\sqrt{\text{cos.}\,\mu^2 - \text{sin.}\,\theta^2}}$$

$$= \theta\log.\left(\frac{1 - \text{cos.}\,a'\,\text{cos.}\,C}{1 + \text{cos.}\,a'\,\text{cos.}\,C}\right) - (\pi - 2\,x)\,h + (\pi - 2\,\xi)\,q$$

$$+ L\,(\theta + \delta') - L\,(\theta - \delta') - 2\,L\,(\delta')$$

$$- L\left(\tfrac{1}{2}\pi - \xi + \delta'\right) + L\left(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \delta'\right)$$

$$+ L\left(\tfrac{1}{2}\pi - x + \delta'\right) - L\left(\tfrac{1}{2}\pi - x - \delta'\right) \qquad (190)$$

подъ условіемъ

$$\theta < \tfrac{1}{2}\pi - \mu.$$

Здѣсь почитая θ, μ, h' данными, легко выводимъ значенія прочихъ буквъ:

$$\cot.\,a' = \text{cos.}\,h'\,\cot.\,\mu$$

$$\text{tang.}\,\delta' = \frac{\text{cos.}\,h'}{\text{sin.}\,\theta}\sqrt{\frac{\text{cos.}\,\mu^2 - \text{sin.}\,\theta^2}{1 - \text{sin.}\,h'^2\,\text{cos.}\,\mu^2}}$$

$$\text{sin.}\,C = \text{tang.}\,\mu\,\text{tang.}\,\theta$$

$$\text{cos.}\,\xi = \frac{\text{sin.}\,\theta}{\text{cos.}\,\mu}$$

$$\text{tang. } x = \sqrt{\frac{\cos. \mu^2 - \sin. \theta^2}{1 - \sin. h'^2 \cos. \mu^2}}$$

$$\text{tang. } q' = \sin. \mu \text{ tang. } h'$$

Интегралъ (190) служитъ дополненіемъ къ прежнему (164).

Подобнымъ образомъ интегралъ (188) перемѣняемъ въ такой

$$2\theta \log. (1 + \cos. a' \cos. C)$$

$$= \frac{2 \cos. a' \sin. \mu^2}{\cos. \mu \sin. a'^2} \int \frac{\theta \, d\theta \sin. \theta}{(1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2) \sqrt{\cos. \mu^2 - \sin. \theta^2}}$$

$$+ 2 \cos. h' \int \frac{\theta \, d\theta \text{ tang. } \theta}{1 - \sin. h'^2 \sin. \theta^2}$$

Отсюда видно, какъ интегралъ (188) можетъ прямо быть выведенъ изъ интеграла (189) или, все равно, изъ интеграла (185).

Въ вычисленіи наклоненнаго конуса съ безконечной осью и съ кругомъ въ основаніи представляется случай повѣрить одинъ изъ найденныхъ интеграловъ и дать ему также новый видъ. Пусть r полупоперечникъ круга, a разстояніе до центра отъ той точки, куда падаетъ высота, и слѣдовательно a' уголъ наклоненія оси конуса къ основанію. Считаемъ прямоугольныя координаты: x изъ центра круга, y до окружности. Объемъ всего конуса будетъ [ур. (95)]

$$P = - \int y \, d (a + x)'$$

отъ $x = -r$ до $x = +r$. Уравненіе круга

$$\sin. x' \sin. y' = \sin. r'$$

Отсюда

$$y = \tfrac{1}{2} \log. \frac{\sin. x' + \sqrt{\sin. x'^2 - \sin. r'^2}}{\sin. x' - \sqrt{\sin. x'^2 - \sin. r'^2}}$$

Далѣе [ур. (9)]

$$- d (a + x)' = d x \sin. (a + x)'$$

слѣдовательно [ур. (6)]

$$- d (a + x)' = \frac{d x \sin. a' \sin. x'}{1 + \cos. a' \cos. x'}$$

Послѣ чего

$$P = \tfrac{1}{2} \sin. a' \int_{r'}^{\pi - r'} \frac{d x'}{1 + \cos. a' \cos. x'} \log. \left(\frac{\sin. x' + \sqrt{\sin. x'^2 - \sin. r'^2}}{\sin. x' - \sqrt{\sin. x'^2 - \sin. r'^2}} \right)$$

$$= \sin. a' \int_{r'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d x'}{1 + \cos. a' \cos. x'} \log. \left(\frac{\sin. x' + \sqrt{\sin. x'^2 - \sin. r'^2}}{\sin. x' - \sqrt{\sin. x'^2 - \sin. r'^2}} \right)$$

Сличивъ это значеніе съ прежнимъ (72), заключаемъ

$$\sin. a \int_{r}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d x}{1 - \cos. a^2 \cos. x^2} \log. \frac{\sin. x + \sqrt{\sin. x^2 - \sin. r^2}}{\sin. x - \sqrt{\sin. x^2 - \sin. r^2}}$$

$$= - \pi \log. \sin. r - \pi \log. \left(\frac{1 + \sin. a}{\sin. a + \sqrt{1 - \cos. a^2 \cos. r^2}} \right) \qquad (191)$$

гдѣ r, a произвольныя постоянныя. Другой видъ принимаетъ этотъ интегралъ еще такой:

$$\sin. a \int_{r}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d x}{1 - \cos. a^2 \cos. x^2} \log. (\sin. x + \sqrt{\sin. x^2 - \sin. r^2})$$

$$= - \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{tang. } r}{\sin. a} \right) \cdot \log. \sin. r$$

$$- \tfrac{1}{2} \pi \log. \left(\frac{1 + \sin. a}{\sin. a + \sqrt{1 - \cos. a^2 \cos. r^2}} \right) \qquad (192)$$

гдѣ какъ частный уже случай заключается прежній интегралъ (117), именно съ предположеніемъ $a = \frac{1}{2} \pi$.

Въ интегралѣ (190) полагая

$$\sin. \psi = \sin. x \sin. r,$$

находимъ

$$\sin. a \sin. r \int_{r}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d \psi \sin. \psi \cos. \psi \log. \cot. \frac{1}{2} \psi}{(\cos. a^2 \sin. r^2 + \sin. a^2 \sin. \psi^2) \sqrt{\sin. \psi^2 - \sin. r^2}}$$

$$= \log. \sin. r - \tfrac{1}{2} \pi \log. \left(\frac{1 + \sin. a}{\sin. a + \sqrt{1 - \cos. a^2 \cos. r^2}} \right) \qquad (193)$$

а когда поставимъ сюда

$$\cot.\ \mu = \sin.\ a\ \mathrm{tang.}\ r$$

$$\cos.\ \psi = \cos.\ r\ \cos.\ \xi$$

то снова получимъ интегралъ (78), который уже былъ найденъ выше. Такъ то всѣ построенія ведутъ всегда къ согласнымъ заключеніямъ и доказываютъ вѣрность принятыхъ началъ въ Воображаемой Геометріи.

Соберемъ теперь интегральныя выраженія, которыя съ пособіемъ Воображаемой Геометріи здѣсь были выведены.

I.

ля x ω перемѣнныхъ, a, b постоянныхъ и дѣйствительныхъ чиселъ, когда $F[x]$ произвольная функіця x [урав. (37)]

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\, dx\,(e^{x} - e^{-x})\, F'[a(e^{x} + e^{-x}) + b\cos.\omega\,(e^{x} - e^{-x})]$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} F[2\sqrt{a^2 - b^2}],$$

гдѣ для всякаго x

$$F'[x] = \frac{d\,F[x]}{d\,x}$$

подъ условіями: $a^2 > b^2$ и чтобъ элементъ интеграла дѣлался нулемъ для $x = \infty$.

II.

Для перемѣнныхъ ω, x; для постоянныхъ дѣйствительныхъ a, b, c и произвольной функціи $F[x]$ всякаго x [ур. (38)]

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} d\omega\, dx\,(e^{x} - e^{-x})\, F'[a(e^{x} + e^{-x}) + (e^{x} - e^{-x})\{b\sin.\omega + c\cos.\omega\}]$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} F[2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}],$$

гдѣ снова

$$F'[x] = \frac{d\,F[x]}{d\,x}$$

подъ условіемъ $a^2 > b^2 + c^2$ и чтобъ элементъ интеграла дѣлался нулемъ для $x = \infty$.

III.

Для перемѣнныхъ x, y съ прежнимъ означеніемъ и съ тѣмижъ условіями какъ для произвольной функціи, такъ и для постоянныхъ a, b, c [ур. (45)].

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx\,dy}{\sin.x\sin.y^2} F'\left[\frac{a - b\cos.x}{\sin.x\sin.y} + c\cot.y\right]$$

$$= -\frac{2\pi F[\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}]}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

IV.

Для перемѣнныхъ x, ω, θ и для произвольной функціи съ знакомъ F, подъ которой входятъ постоянныя дѣйствительныя числа a, b, c [ур. (50)]

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi dx\, d\omega\, d\theta \sin.\theta\, (e^x - e^{-x})^2\, F\,[a\,(e^x + e^{-x}) + \sin.\theta\,(e^x - e^{-x})\{b\cos.\omega + c\sin.\omega\}]$$
$$= 2\pi \int_0^\infty dx\,(e^x - e^{-x})^2 F\,[(e^x + e^{-x})\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}]$$

подъ условіями $a^2 > b^2 + c^2$ и чтобъ элементъ интеграловъ дѣлался нулемъ для $x = \infty$.

V.

Для перемѣнныхъ x, ω, θ и для произвольной функціи съ знакомъ F, подъ которымъ находится четыре постоянныхъ A, C, B, D дѣйствительныхъ чиселъ [ур. (51)]

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi dx\, d\omega\, d\theta \sin.\theta\,(e^x - e^{-x})^2\, F\,[A\,(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})\{B\cos.\omega\sin.\theta + C\sin.\omega\sin.\theta + D\cos.\theta\}]$$
$$= 4\pi \int_0^\infty dx\,(e^x - e^{-x})^2\, F\,[(e^x + e^{-x})\sqrt{A^2 - B^2 - C^2 - D^2}]$$

подъ условіемъ $A^2 > B^2 + C^2 + D^2$ и чтобъ элементъ интеграла дѣлался нулемъ для $x = \infty$.

VI.

Для перемѣнныхъ x, ω и постоянныхъ a, b дѣйствительныхъ чиселъ, когда $F[x]$ произвольная функція всякаго x [ур. (53)]

$$\int_0^\infty \int_0^\pi dx\, d\omega \sin.\omega\,(e^x - e^{-x})^2\, F\,[a\,(e^x + e^{-x}) + b\cos.\omega\,(e^x - e^{-x})]$$
$$= 2\int_0^\infty dx\,(e^x - e^{-x})^2\, F\,[(e^x + e^{-x})\sqrt{a^2 - b^2}]$$

подъ условіемъ $a^2 > b^2$ и чтобъ элементъ интеграловъ дѣлался нулемъ для $x = \infty$.

VII.

Для x перемѣннаго, a, b постоянныхъ дѣйствительныхъ чиселъ и для произвольной функціи съ знакомъ F [ур. (53)]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}\,F(ax+b\sqrt{1+x^2})$$

$$= \tfrac{1}{2}a\int_{0}^{\infty} dx\,(e^{x}-e^{-x})^2\,F'\left[\tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\sqrt{a^2-b^2}\right]$$

гдѣ для всякаго x

$$F'[x] = \frac{d\,F[x]}{dx}$$

при томъ элементъ интегралов дѣлается нулемъ вмѣстѣ съ $x = \infty$.

VIII.

Для x перемѣннаго и для постоянныхъ a, b дѣйствительныхъ чиселъ [ур. (54)]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}F[a\sqrt{1+x^2}+bx\sqrt{-1}]$$

$$= 2b\sqrt{-1}\int_{0}^{\infty} dx\,(e^{x}-e^{-x})^2\,F'\left[\tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\sqrt{a^2+b^2}\right]$$

гдѣ F знакъ произвольной функціи, но такой, которая съ $x = \infty$ уничтожаетъ элементъ интегралов. Потомъ для всякаго x

$$F'[x] = \frac{d\,F[x]}{dx}$$

IX.

Разсматривая V какъ функцію трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, можемъ уравненію съ частными дифференціалами

$$\left(\frac{d^2\,V}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\,V}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2\,V}{dz^2}\right) = 0$$

удовлетворить, полагая [ур. (42), (43)]

$$V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} x\,d\omega\,d\xi\,(e^{\xi}-e^{-\xi})f\left\{y+\tfrac{1}{2}x(e^{\xi}-e^{-\xi})\cos.\,\omega, z+\tfrac{1}{2}x(e^{\xi}-e^{-\xi})\sin.\omega\right\}$$

$$+\frac{d.}{dx}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} x\,d\omega\,d\xi\,(e^{\xi}-e^{-\xi})\,F\left\{y+\tfrac{1}{2}x(e^{\xi}-\xi^{-\xi})\cos.\,\omega, z+\tfrac{1}{2}x(e^{\xi}-e^{-\xi})\sin.\omega\right\}$$

гдѣ f, F знаки двухъ произвольныхъ функцій, но которыя дѣлаютъ элементъ интеграла нулемъ вмѣстѣ съ $\xi = \infty$.

X.

Подъ V разумѣя функцію четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, , z, t, можемъ уравненію съ частными дифференціалами

$$\left(\frac{d^2\,V}{d\,t^2}\right)=\left(\frac{d^2\,V}{d\,x^2}\right)+\left(\frac{d^2\,V}{d\,y^2}\right)+\left(\frac{d^2\,V}{d\,z^2}\right)$$

удовлетворить, принимая [ур. (40), (41)]

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} x\,d\,\omega\,d\,\xi\,(e^{\xi}-e^{-\xi})\,f\left\{t+\tfrac{1}{2}\,x\,(e^{\xi}-e^{-\xi}),\right.$$

$$\left. y+\tfrac{1}{2}x(e^{\xi}-e^{-\xi})\cos.\,\omega,\ z+\tfrac{1}{2}\,x\,(e^{\xi}-e^{-\xi}\sin.\,\omega\right\}$$

гдѣ f знакъ произвольной функціи, которая дѣлаетъ элементъ интеграла нулемъ вмѣстѣ съ $\xi = \infty$.

XI.

Для постоянныхъ дѣйствительныхъ чиселъ, $\alpha^2<1$ и n произвольнаго, [ур. (56)]

$$\int_0^{\infty} d\,x\cos.\,n\,x\,e^{-\sqrt{n^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int_0^{\infty} d\,x\,e^{-\sqrt{1+\alpha^2}.\sqrt{n^2+x^2}}$$

XII.

Для произвольныхъ постоянныхъ a, b, n, но дѣйствительныхъ и положительныхъ, [ур. (47)]

$$\int_0 \frac{d\,x\sin.\,x^n}{(a+b\cos.\,x)^{n+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{(a^2-b^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\!\varsigma^{\frac{n-1}{2}}}{(\tfrac{1}{2}\,n)\varsigma\,\frac{1}{2}\,n}$$

Здѣсь для всякаго n разумѣемъ

$$n^{\varsigma n}=\int_0^{\infty} d\,x\,e^{-x}\,x^n$$

XIII.

Для $\alpha > \beta$ постоянныхъ и положительныхъ [ур. (73)]

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,\omega\log.\left\{\frac{1+\cos.\,\omega\sqrt{\sin.\,\alpha^2-\sin.\,\beta^2\sin.\,\omega^2}}{1-\cos.\,\omega\sqrt{\sin.\,\alpha^2-\sin.\,\beta^2\sin.\,\omega_2}}\right\}$$

$$=\pi\log.\,\tfrac{1}{2}\,(\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2+\sqrt{\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^4+\sin.\,\tfrac{1}{2}\,\beta^2\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\beta^2})$$

XIV.

Для произвольныхъ постоянныхъ α, β положительныхъ [ур. (75)]

$$\int_0^{\beta} d\,\omega \log. \left(\frac{\sin.\,\beta + \sin.\,\alpha \cos.\,\omega \sqrt{\sin.\,\beta^2 - \sin.\,\omega^2}}{\sin.\,\beta - \sin.\,\alpha \cos.\,\omega \sqrt{\sin.\,\beta^2 - \sin.\,\omega^2}} \right)$$

$$= \pi \log. \left\{ \tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha \sin.\,\beta + \sqrt{\tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin.\,\beta^2 + 1} \right\}$$

XV.

Послѣдній интегралъ для $\beta = \frac{1}{2}\pi$ дѣлается

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,\omega \log. \left(\frac{1 + \sin.\,\alpha \cos.\,\omega^2}{1 - \sin.\,\alpha \cos.\,\omega^2} \right) = \pi \log. \left(\frac{1 + \sin.\,\frac{1}{2}\alpha}{\cos.\,\frac{1}{2}\alpha} \right)$$

какъ и должно быть [урав. (73)]. Напротивъ другой интегралъ (XIII) не переходитъ въ этотъ для $\beta = \alpha$, какъ подобное нарушеніе въ постепенности значеній опредѣленныхъ интеграловъ часто замѣчается.

XVI.

Для α, β произвольныхъ постоянныхъ [ур. (78)]

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\,x \cos.\,x}{1 - \cos.\,\alpha^2 \cos.\,x^2} \log. \left(\frac{1 + \cos.\,\beta \cos.\,x}{1 - \cos.\,\beta \cos.\,x} \right)$$

$$= \frac{2\,\pi}{\sin.\,2\,\alpha} \log. \frac{\cos.\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin.\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

XVII.

Для такихъ же дугъ α, β [ур. (79)]

$$\int_0^{\beta} \frac{x\,d\,x \sin.\,x}{(1 - \sin.\,\alpha^2 \sin.\,x^2)\sqrt{\sin.\,\beta^2 - \sin.\,x^2}}$$

$$= \frac{\pi \log. \left\{ \dfrac{\cos.\,\alpha + \sqrt{1 - \sin.\,\alpha^2 \sin.\,\beta^2}}{2 \cos.\,\beta \sin.\,\frac{1}{2}\alpha^2} \right\}}{2 \cos.\,\alpha\,(1 - \sin.\,\alpha^2 \sin.\,\beta^2)}$$

XVIII.

Для постоянной дуги α послѣдній интегралъ даетъ [ур. (80)]

$$\int_0^{\alpha} \frac{x\,d\,x \sin.\,x}{\cos.\,x^2 \sqrt{\sin.\,\alpha^2 - \sin.\,x^2}} = \frac{\pi \sin.\,\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos.\,\alpha^2}$$

XIX.

Для постоянныхъ дугъ $\alpha > \beta$ положительныхъ [ур. (81)]

$$\int_0^\beta \frac{x\,dx\,\text{sin.}\,x}{(\text{sin.}\,\alpha^2 - \text{sin.}\,x^2)\sqrt{\text{sin.}\,\beta^2 - \text{sin.}\,x^2}} = \frac{\pi\,(\alpha - \text{arc.}\,\text{cos.}\,\frac{\text{cos.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\beta})}{2\,\text{cos.}\,\beta\sqrt{\text{sin.}\,\beta^2 - \text{sin.}\,\alpha^2}}$$

XX.

Опредѣленный интегралъ (100), когда поставимъ сюда αx вмѣсто x съ постояннымъ α,

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})^2} = \frac{1}{4\alpha^2}\,\text{log.}\,2$$

можетъ быть также найденъ изъ интеграла

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2\alpha x} + 1} = \frac{1}{2\alpha}\,\text{log.}\,2$$

когда беремъ отсюда дифференціалъ въ отношеніи къ α.

XXI.

Для постоянной дуги α [ур. (117)]

$$\int_0^\alpha dx\,\text{log.}\,(\text{cos.}\,x + \sqrt{\text{cos.}\,x^2 - \text{cos.}\,\alpha^2}) = -(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\,\text{log.}\,\text{cos.}\,\alpha$$

Этотъ интегралъ съ нѣкоторыми перемѣнами заключается какъ частный случай въ интегралѣ (XVI).

XXII.

Для постоянныхъ дугъ, α произвольной и $\beta > \frac{1}{2}\pi$ положительной, [ур. (71)]

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1 - \text{cos.}\,\alpha^2\,\text{cos.}\,x^2}\,\text{log.}\left(\frac{1 + \text{cos.}\,\beta\,\text{cos.}\,x}{1 - \text{cos.}\,\beta\,\text{cos.}\,x}\right) = \frac{\pi}{\text{sin.}\,\alpha}\,\text{log.}\left(\frac{1 + \text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\alpha + \text{sin.}\,\beta}\right)$$

XXIII.

Послѣдній интегралъ въ соединеніи съ прежнимъ (XVI) даетъ также для постоянныхъ дугъ, положительной $\beta < \frac{1}{2}\pi$ и произвольной α,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+\cos.\alpha\cos.x} \log.\left(\frac{1+\cos.\beta\cos.x}{1-\cos.\beta\cos.x}\right)$$
$$= \frac{2\pi}{\sin.\alpha} \log. \frac{\cos.(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha)}{\cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

Отсюда для $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ и произвольныхъ острыхъ угловъ $\beta, \beta', \ldots$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \log. \left\{\frac{1+\sin.\beta\cos.x}{1-\sin.\beta\cos.x} \cdot \frac{1+\sin.\beta'\cos.x}{1-\sin.\beta'\cos.x} \cdot \ldots\right\}$$
$$= -2\pi \log. (\cos.\tfrac{1}{2}\beta . \cos.\tfrac{1}{2}\beta' \ldots)$$

Подобнымъ образомъ для постоянныхъ дугъ $\beta, \beta', \beta'', \beta''' \ldots$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \log. \left\{\frac{1-\sin.\beta\cos.x}{1+\sin.\beta\cos.x} \cdot \frac{1-\sin.\beta'\cos.x}{1+\sin.\beta'\cos.x} \cdot \ldots\right\}$$
$$= -2\pi \log. \left\{\frac{\cos.\frac{1}{2}\beta}{\cos.\frac{1}{2}\beta'} \cdot \frac{\cos.\frac{1}{2}\beta''}{\cos.\frac{1}{2}\beta'''} \cdot \ldots\right\}$$

XXIV.

Для α, β постоянныхъ и произвольныхъ дугъ [ур. (192)]

$$\sin.\alpha \int_\beta^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1-\cos.\alpha^2\cos.x^2} \log. (\sin.x + \sqrt{\sin.x^2 - \sin.\beta^2}) =$$

$$-\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{tang.}\,\beta}{\sin.\alpha}\right) \log.\sin.\beta - \tfrac{1}{2}\pi \log.\left(\frac{1+\sin.\alpha}{\sin.\alpha + \sqrt{1-\cos.\alpha^2\cos.\beta^2}}\right)$$

XXV.

Для постоянныхъ дугъ α, β [ур. (193)]

$$\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx \sin.x \cos.x \log.\cot.\frac{1}{2}x}{(\sin.\alpha^2 + \text{tang.}\,\beta^2 \sin.x^2)\sqrt{\sin.\alpha^2 - \sin.x^2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \frac{\cos.\beta^2}{\sin.\alpha\sin.\beta} \log. \left\{\frac{\sin.\beta + \sqrt{1-\cos.\alpha^2\cos.\beta^2}}{\sin.\beta(1+\sin.\alpha)}\right\}$$

XXVI.

Полагая [ур. (11)]

$$L(x) = x \log. 2 - \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{(-1)^i}{i^2} \sin. 2ix \qquad \begin{cases} i=1 \\ i=\infty \end{cases}$$

гдѣ L знакъ функціи, знакъ же суммы относится къ цѣлымъ числамъ i, паходимъ

$$L(\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi \log. 2$$

Потомъ для всякой дуги x [ур. (13), (14)]

$$L(-x) = -L(x)$$

$$L(x) - L(\tfrac{1}{2}\pi - x) = (x - \tfrac{1}{4}\pi)\log. 2 - \tfrac{1}{2}L(\tfrac{1}{2}\pi - 2x)$$

$$L(\pi - x) = \pi \log. 2 - L(x)$$

$$L(\pi + x) = \pi \log. 2 + L(x)$$

Для произвольныхъ дугъ x, y [ур. (113)]

$$L(x) + L(\tfrac{1}{2}\pi - x) + L(y) + L(\tfrac{1}{2}\pi - y) =$$

$$L(z) + L(\tfrac{1}{2}\pi - z) + \tfrac{1}{2}L(x+y+z) + \tfrac{1}{2}L(-x+y+z) + \tfrac{1}{2}L(x-y+z)$$

$$+ \tfrac{1}{2}L(x+y-z) - \tfrac{1}{2}\pi \log. 2$$

гдѣ

$$\text{tang. } z = \frac{\cos.(x-y)}{\sin.(x+y)}$$

Для такихъ же дугъ x, y [ур. (104]

$$L(x) + L(\tfrac{1}{2}\pi - x) + L(y + \tfrac{1}{2}x) - L(y - \tfrac{1}{2}x) + L(z + \tfrac{1}{2}x) - L(z - \tfrac{1}{2}x)$$

$$= \tfrac{1}{2}L(u+x) - \tfrac{1}{2}L(u-x) + (\tfrac{1}{2}\pi + x)\log. 2$$

гдѣ

$$\text{tang. } z = \cot.\tfrac{1}{2}x^2 \cot. y$$

$$\text{tang. } u = \frac{\sqrt{\sin. 2y \sin. 2z}}{\cos.(y-z)} \cot. x$$

Для произвольныхъ дугъ x, y, z [ур. (168)]

$$L(x+\delta) - L(x-\delta) + L(y+\delta) - L(y-\delta) + L(z+\delta) - L(z-\delta)$$

$$= 2L(\delta) - 2L(\psi) - 2L(z-\psi) - L(\tfrac{1}{2}\pi - 2z) + 2z \log. 2$$

$$- L(u+z) + L(u-z) + L(x+u+\psi) - L(x+u-\psi)$$

$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi + y + z - \psi) - L(\tfrac{1}{2}\pi + y - z + \psi)$$

$$- L(\tfrac{1}{2}\pi + y + z) + L(\tfrac{1}{2}\pi - y - z)$$

гдѣ

$$\sin.\, u = \frac{\cos.\, x}{\cos.\, y} \cos.\, z$$

$$\text{tang.}\, \delta = \cot.\, u \cot.\, x \cot.\, z$$

$$\text{tang.}\, \psi = \cot.\, u \cot.\, (u + x) \cot.\, z$$

Подъ условіемъ $\cos.\, x \cos.\, z < \cos.\, y$.

XXVII.

Для произвольной постоянной дуги α и перемѣнной x [ур. (15)]

$$\int_0 dx \log.\left(1 - \frac{\sin.\, x^2}{\sin.\, \alpha^2}\right)$$

$$= -2x \log.\sin.\alpha + L(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha + x) - L(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - x) - 2L(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha).$$

XXVIII.

Для такихъ же дугъ α, x [ур. (185)]

$$\int_0 dx \log.(1 - \sin.\, \alpha^2 \sin.\, x^2)$$

$$= (\pi - 2\theta) \log.\cot.\tfrac{1}{2}\alpha + 2x \log.(\tfrac{1}{2}\sin.\alpha) - \tfrac{1}{2}\pi \log.\, 2$$

$$+ L(\theta + x) - L(\theta - x) + L(\tfrac{1}{2}\pi - 2x)$$

гдѣ

$$\cot.\, \theta = \cos.\, \alpha \,\text{tang.}\, x.$$

XXIX.

Съ произвольнымъ постояннымъ α [ур. (92)]

$$\sin.\, 2\alpha \int_0 \frac{x\, dx}{\cos.\,(\alpha - x) \cos.\,(\alpha + x)}$$

$$= x \log.\frac{\cos.\,(\alpha - x)}{\cos.\,(\alpha + x)} - L(\alpha + x) - L(\alpha - x) - 2L(\alpha)$$

XXX.

Для x перемѣннаго и α произвольнаго постояннаго [ур. (97)]

$$\int_0 \frac{x\, dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos.\, 2\alpha} = \frac{1}{\sin.\, 2\alpha}\Big\{ L(\theta + \alpha) - L(\theta - \alpha) - 2L(\alpha)\Big\}$$

гдѣ

$$\text{tang. } \theta = \frac{e^{\varpi} - 1}{e^{\varpi} + 1} \text{ cot. } \alpha$$

XXXI.

Для $x = \infty$ послѣдній интегралъ даетъ [ур. (99)]

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^{\varpi} + e^{-\varpi} - 2 \text{ cos. } 2\alpha} = \frac{\alpha \text{ log. } 2 - L(\alpha)}{\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha}$$

XXXII.

Для перемѣнной x и для постоянной произвольной дуги α [ур. (101)]

$$2 \text{ sin. } \alpha \int_0 \frac{x\,dx\,(e^{\varpi} + e^{-\varpi})}{e^{2\varpi} + e^{-2\varpi} - 2 \text{ cos. } 2\alpha}$$

$$= L(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) - L(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) + L(\pi - \psi - \tfrac{1}{2}\alpha) - L(\psi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$- 1\,L(\tfrac{1}{2}\alpha) - 2\,L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

гдѣ

$$\text{tang. } \theta = \frac{e^{\varpi} - 1}{e^{\varpi} + 1} \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\text{tang. } \psi = \frac{e^{\varpi} + 1}{e^{\varpi} - 1} \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\alpha$$

XXXIII.

Для $x = \infty$ послѣдній интегралъ дѣлается [ур. (103)]

$$\text{sin. } \alpha \int_0^{\infty} \frac{x\,dx\,(e^{\varpi} + e^{-\varpi})}{e^{2\varpi} + e^{-2\varpi} - 2 \text{ cos. } 2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ log. } 2 - L(\tfrac{1}{2}\alpha) - L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

XXXIV.

Интегрированіе по частямъ перемѣняетъ интегралъ (XXXII) въ такой

$$\int_0 dx \text{ arc. tang.}\left(\frac{2 \text{ sin. } \alpha}{e^{\varpi} - e^{-\varpi}}\right) = x \text{ arc. tang.}\left(\frac{2 \text{ sin. } \alpha}{e^{\varpi} - e^{-\varpi}}\right)$$

$$+ L(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) - L(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) + L(\pi - \psi - \tfrac{1}{2}\alpha) - L(\psi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$- 2\,L(\tfrac{1}{2}\alpha) - 2\,L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

гдѣ снова

$$\text{tang. } \theta = \frac{e^{\omega} - 1}{e^{\omega} + 1} \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\text{tang. } \psi = \frac{e^{\omega} + 1}{e^{\omega} - 1} \text{ cot. } \tfrac{1}{2}\alpha$$

XXXV.

Въ послѣднемъ интегралѣ положивъ

$$\text{tang. } \omega = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2 \text{ sin. } \alpha}$$

получимъ для перемѣнной ω и постоянной дуги α:

$$\int_0 d\omega \log. (\text{sin. } \alpha \text{ sin. } \omega + \sqrt{1 - \text{cos. } \alpha^2 \text{ sin. } \omega^2}) =$$

$$L(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) - L(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) - L(\omega) + L(\pi - \psi - \tfrac{1}{2}\alpha) - L(\psi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$- 2\,L(\tfrac{1}{2}\alpha) - 2\,L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

гдѣ слѣдовательно

$$\text{tang. } \theta = \text{cot. } \tfrac{1}{2}\alpha \frac{\text{sin. } \alpha \text{ tang. } \omega + \sqrt{1 + \text{sin. } \alpha^2 \text{ tang. } \omega^2} - 1}{\text{sin. } \alpha \text{ tang. } \omega + \sqrt{1 + \text{sin. } \alpha^2 \text{ tang. } \omega^2} + 1}$$

$$\text{tang. } \psi = \text{cot. } \tfrac{1}{2}\alpha \frac{\text{sin. } \alpha \text{ tang. } \omega + \sqrt{1 + \text{sin. } \alpha^2 \text{ tang. } \omega^2} + 1}{\text{sin. } \alpha \text{ tang. } \omega + \sqrt{1 + \text{sin. } \alpha^2 \text{ tang. } \omega^2} - 1}$$

XXXVI.

Это даетъ для $\omega = \frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log. (\text{sin. } \alpha \text{ sin. } \omega + \sqrt{1 - \text{cos. } \alpha^2 \text{ sin. } \omega^2})$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \log. 2 - 2\,L(\tfrac{1}{2}\alpha) - 2\,L(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

XXXVII.

Для дугъ, перемѣнной x и постоянной α, [ур. (108)]

$$\text{sin. } 2\alpha \int_0 \frac{dx \text{ sin. } x \log. \text{cot. } \frac{1}{2}x}{1 - \text{cos. } \alpha^2 \text{ sin. } x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \log. 2 + L(\varphi - \alpha) - L(\varphi + \alpha) - L(\tfrac{1}{2}\pi - 2\alpha)$$

гдѣ

$$\text{tang.}\,\varphi = \cot.\,\alpha\,\cos.\,x$$

XXXVIII.

Вмѣстѣ съ $x = \frac{1}{2}\pi$ послѣдній интегралъ дѣлается [ур. (106)]

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx\,\sin.\,x\,\log.\cot.\frac{1}{2}x}{1-\cos.\,\alpha^2\,\sin.\,x^2} = \frac{(\frac{1}{2}\pi-\alpha)\log.\,2 - L(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}{\sin.\,\alpha\,\cos.\,\alpha}$$

Отсюда для $\alpha = \frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx\,\sin.\,x\,\log.\cot.\tfrac{1}{2}x = \log.\,2$$

XXXIX.

Для перемѣнной x и постоянной дуги α, покуда $x < \alpha$ [ур. (118)]

$$\int dx\,\log.\,(\cos.\,x + \sqrt{\cos.\,x^2 - \cos.\,\alpha^2}) = -(\tfrac{1}{2}\pi - x - \varphi)\log.\,\cos.\,\alpha$$
$$+\tfrac{1}{2}L(x+\varphi) - \tfrac{1}{2}L(x-\varphi) - L(\varphi)$$

гдѣ

$$\cos.\,\varphi = \frac{\sin.\,x}{\sin.\,\alpha}$$

XL.

Для постоянной дуги $\alpha > o, < \frac{1}{2}\pi$ [ур. (123)]

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx\,\cos.\,x}{1-\cos.\,\alpha^2\,\cos.\,x^2}\log.\,(1+\cos.\,\alpha\,\cos.\,x) = \frac{L(\frac{1}{2}\pi-\alpha) - \alpha\log.\,\sin.\,\alpha}{\sin.\,\alpha\,\cos.\,\alpha}$$

XLI.

Для такой же дуги α [ур. (120)]

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx\,\cos.\,x}{1-\cos.\,\alpha^2\,\cos.\,x^2}\log.\,(1-\cos.\,\alpha\,\cos.\,x) =$$
$$\frac{L(\frac{1}{2}\pi-\alpha) + (\pi-\alpha)\log.\,\sin.\,\alpha}{\sin.\,\alpha\,\cos.\,\alpha}$$

XLII.

Для постоянныхъ положительныхъ дугъ $\alpha < \beta$ [ур. (125)]

$$\sin.\,\beta \cos.\,\alpha \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx \cos.\,x}{1 - \sin.\,\alpha^2 \cos.\,x^2} \log.\,(1 + \sqrt{\sin.\,\beta^2 - \cos.\,\beta^2 \operatorname{tang.}\,\alpha^2 \sin.\,x^2})$$

$$= -(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - \gamma) \log.\sin.\,\beta + L(\alpha) - L(\gamma) + \tfrac{1}{2} L(\alpha + \gamma) - \tfrac{1}{2} L(\alpha - \gamma)$$

гдѣ

$$\cos.\,\gamma = \frac{\sin.\,\alpha}{\sin.\,\beta}$$

XLIII.

Для такихъ же дугъ α, β [ур. (130)]

$$\sin.\,\alpha \cos.\,\alpha \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx \cos.\,x}{1 - \sin.\,\alpha^2 \cos.\,x^2} \log.\,(1 - \sqrt{\sin.\,\beta^2 - \cos.\,\beta^2 \operatorname{tang.}\,\alpha^2 \sin.\,x^2})$$

$$= (\tfrac{1}{2}\pi + \alpha - \gamma) \log.\cos.\,\beta + L(\alpha) + L(\gamma) - \tfrac{1}{2} L(\alpha + \gamma) + \tfrac{1}{2} L(\alpha - \gamma)$$

гдѣ снова

$$\cos.\,\gamma = \frac{\sin.\,\alpha}{\sin.\,\beta}$$

XLIV.

Для перемѣнной x и постоянныхъ положительныхъ дугъ $\alpha < \beta$ [ур. (129)]

$$\sin.\,\alpha \cos.\,\alpha \int_0 \frac{dx \cos.\,x}{1 - \sin.\,\alpha^2 \sin.\,x^2} \log.\,(1 + \sqrt{\sin.\,\beta^2 - \cos.\,\beta^2 \operatorname{tang.}\,\alpha^2 \sin.\,x^2})$$

$$= -(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi - \psi) \log.\cos.\,\beta + L(\varphi) - L(\psi) + \tfrac{1}{2} L(\varphi + \psi) - \tfrac{1}{2} L(\varphi - \psi)$$

гдѣ

$$\operatorname{tang.}\,\varphi = \operatorname{tang.}\,\alpha \sin.\,x$$

$$\cos.\,\psi = \frac{\sin.\,\alpha \sin.\,x}{\sin.\,\beta \sqrt{1 - \sin.\,\alpha^2 \cos.\,x^2}}$$

XLV.

Для такихъ же дугъ x, α, β, φ, ψ [ур. (130)]

$$\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha \int_0 \frac{dx \text{ cos. } x}{1 - \text{sin. } \alpha^2 \text{ cos. } x^2} \text{log. } (1 - \sqrt{\text{sin. } \beta^2 - \text{cos. } \beta^2 \text{ tang. } \alpha^2 \text{ sin. } x^2})$$

$$= (\tfrac{1}{2}\pi + \varphi - \psi) \text{ log. cos. } \beta + L(\varphi) + L(\psi) - \tfrac{1}{2} L(\varphi + \psi) + \tfrac{1}{2} L(\varphi - \psi)$$

XLVI.

Для постоянныхъ дугъ $\alpha < \beta$ и для перемѣнной $x < \beta$ [ур. (162)]

$$\text{cos. } \alpha \sqrt{\text{sin. } \alpha^2 - \text{sin. } \beta^2} \int^{\beta} \frac{dx \text{ sin. } x \text{ log. cot. } \frac{1}{2} x}{(\text{sin. } \alpha^2 - \text{sin. } x^2) \sqrt{\text{sin. } \beta^2 - \text{sin. } x^2}} =$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) \text{ log. cot. } \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2} L(\psi + \delta) + \tfrac{1}{2} L(\psi - \delta) - L(\psi)$$

$$- \tfrac{1}{2} L(\psi + \omega) - \tfrac{1}{2} L(\psi - \omega) + \tfrac{1}{2} L(\psi + \varphi) + \tfrac{1}{2} L(\psi - \varphi)$$

гдѣ

$$\text{cos. } \delta = \text{cos. } \alpha \text{ tang. } \beta$$

$$\text{tang. } \varphi = \sqrt{\frac{\text{sin. } (\alpha + \beta) \text{ sin. } (\alpha - \beta)}{\text{sin. } (\beta + x) \text{ sin. } (\beta - x)}}$$

$$\text{tang. } \psi = \text{cos. } \alpha \text{ cot. } \varphi$$

$$\text{cos. } \omega = \frac{\text{cos. } \alpha}{\text{cos. } \beta} \text{cos. } \varphi$$

XLVII.

Для перемѣнной x и для постоянныхъ положительныхъ дугъ $\alpha < \beta$ [ур. (164)]

$$\text{cos. } \alpha \sqrt{\text{sin. } \beta^2 - \text{sin. } \alpha^2} \int_0 \frac{x \, dx \text{ sin. } x}{(\text{sin. } \alpha^2 - \text{sin. } x^2) \sqrt{\text{sin. } \beta^2 - \text{sin. } x^2}} =$$

$$x \text{ log. } \left\{ \frac{\text{cos. } \alpha \sqrt{\text{sin. } \beta^2 - \text{sin. } x^2} + \text{cos. } x \sqrt{\text{sin. } \beta^2 - \text{sin. } \alpha^2}}{\text{cos. } \beta \sqrt{\text{sin. } \alpha^2 - \text{sin. } x^2}} \right\}$$

$$- \psi \text{ log. } \left\{ \frac{\text{cos. } \alpha + \sqrt{\text{sin. } \beta^2 - \text{sin. } \alpha^2}}{\text{cos. } \beta} \right\}$$

$$+ L(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) - \tfrac{1}{2} L(\varphi + x) - \tfrac{1}{2} L(\varphi - x) + \tfrac{1}{2} L(\varphi + \alpha) + \tfrac{1}{2} L(\varphi - \alpha)$$

$$- \tfrac{1}{2} L(\pi - \varphi - \psi) + \tfrac{1}{2} L(\varphi - \psi)$$

гдѣ

$$\sin.\ \psi = \frac{\sin.\ x}{\sin.\ \beta}$$

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ x}\sqrt{\frac{\sin.\ \beta^2 - \sin.\ x^2}{\sin.\ \beta^2 - \sin.\ \alpha^2}}$$

XLVIII.

Для перемѣнной x и для постоянныхъ дугъ α, β [ур. (179)]

$$\sin.\ \alpha \cos.\ \alpha \int_0 \frac{dx \cos.\ x}{1 - \cos.\ \alpha^2 \cos.\ x^2} \log.\left(\frac{1 + \cos.\ \beta \cos.\ x}{1 - \cos.\ \beta \cos.\ x}\right) =$$

$$\gamma \log.\left\{\cot.\ \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) \cot.\ \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\right\} - \xi \log.\frac{\sin.\ (\beta + \alpha)}{\sin.\ (\beta - \alpha)}$$

$$+ L(\xi + \omega) - L(\xi - \omega) - L(\gamma + \omega) + L(\gamma - \omega)$$

$$+ L(\zeta + \omega) - L(\zeta - \omega) - 2\,L(\omega)$$

гдѣ

$$\cot.\ \xi = \sin.\ \beta \cot.\ x$$

$$\cot.\ \gamma = \sin.\ \alpha \cot.\ x$$

$$\text{tang.}\ \zeta = \cot.\ \alpha \sin.\ x$$

$$\text{tang.}\ \omega = \text{tang.}\ \alpha \cos.\ \beta \cot.\ x.$$

XLIX.

Если къ тому полагаемъ $\cot.\ \theta = \cot.\ \beta \sin.\ x$, то [ур. (188)]

$$\sin.\ 2\alpha \int_0 \frac{dx \cos.\ x}{1 - \cos.\ \alpha^2 \cos.\ x^2} \log.\ (1 + \cos.\ \beta \cos.\ x) =$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi - \xi - \theta) \log.\frac{\sin.\ (\beta + \alpha)}{\sin.\ (\beta - \alpha)} + \gamma \log.\left\{\cot.\ \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) \cot.\ \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\right\}$$

$$+ \zeta \log.\left(1 - \frac{\cos.\ \beta^2}{\cos.\ \alpha^2}\right) + L(\xi + \omega) - L(\xi - \omega) - L(\gamma + \omega)$$

$$+ L(\gamma - \omega) + L(\zeta + \omega) - L(\zeta - \omega) - L(\pi - \zeta - \theta)$$

$$+ L(\zeta - \theta) + 2\,L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta) - 2\,L(\omega)$$

L.

Съ тѣмижъ означеніями, какъ и въ послѣднемъ интегралѣ, [ур. (183)]

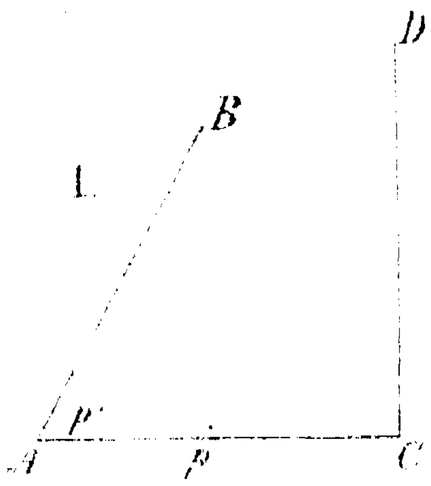
$$\text{sin. } 2\,\alpha \int_0 \frac{d\,x \text{ cos. } x}{1 - \text{cos. } \alpha^2 \text{ cos. } x^2} \text{log. } (1 - \text{cos. } \beta \text{ cos. } x) =$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi + \xi - \theta) \text{ log. } \frac{\text{sin. } (\beta + \alpha)}{\text{sin. } (\beta - \alpha)} - \eta \text{ log. } \left\{\text{cot. } \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) \text{ cot. } \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\right\}$$

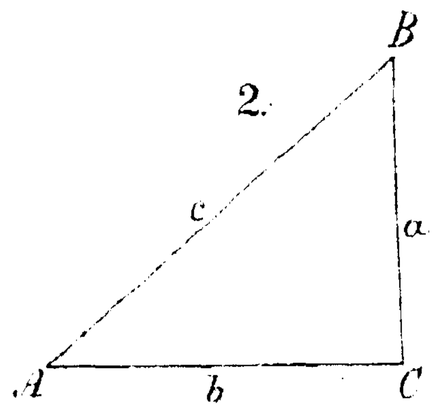
$$L(\xi + \omega) + L(\xi - \omega) + L(\eta + \omega) - L(\eta - \omega) - L(\zeta + \omega) + L(\zeta - \omega)$$

$$- L(\pi - \zeta - \theta) + L(\zeta - \theta) + 2\,L(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta) + 2\,L(\omega).$$

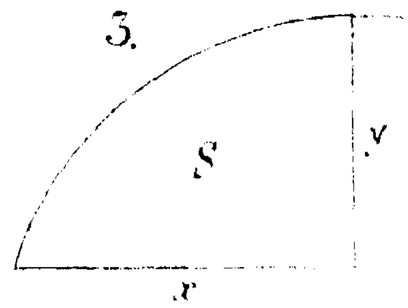
1.



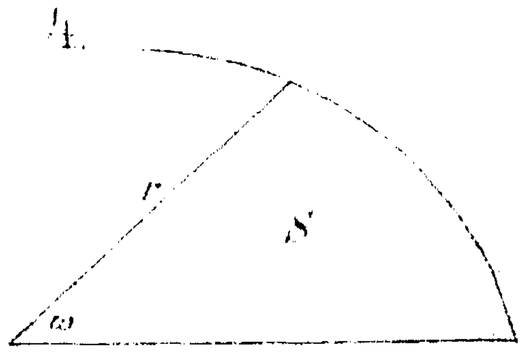
2.



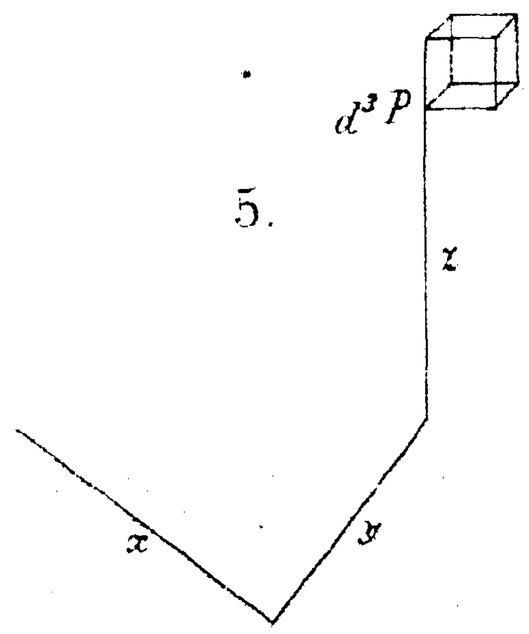
3.



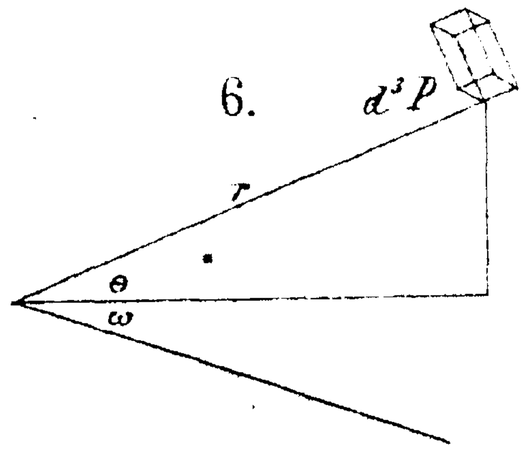
4.



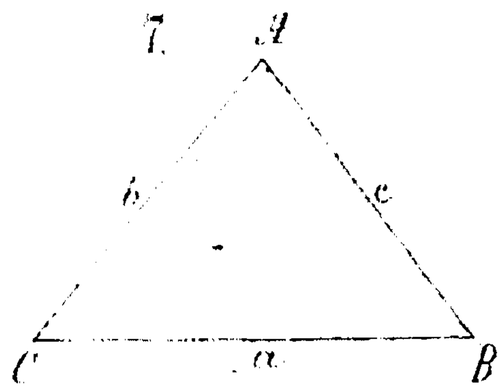
5.



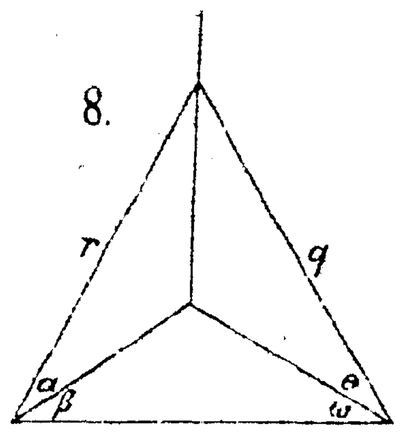
6.



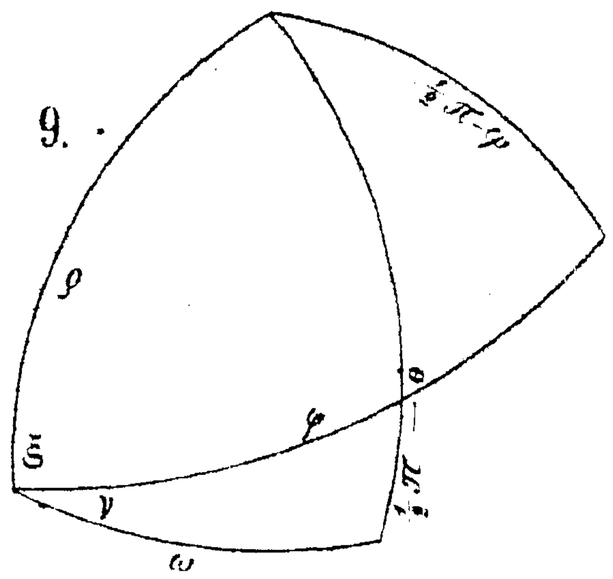
7.



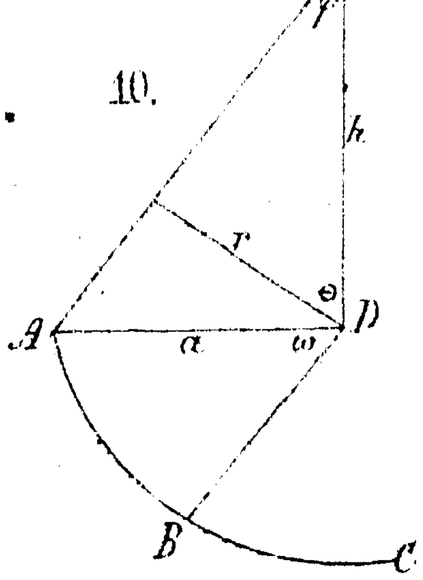
8.



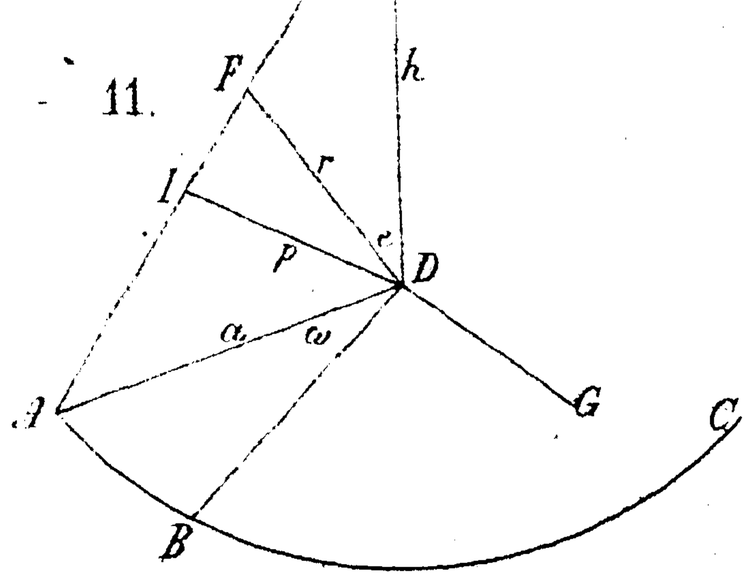
9.



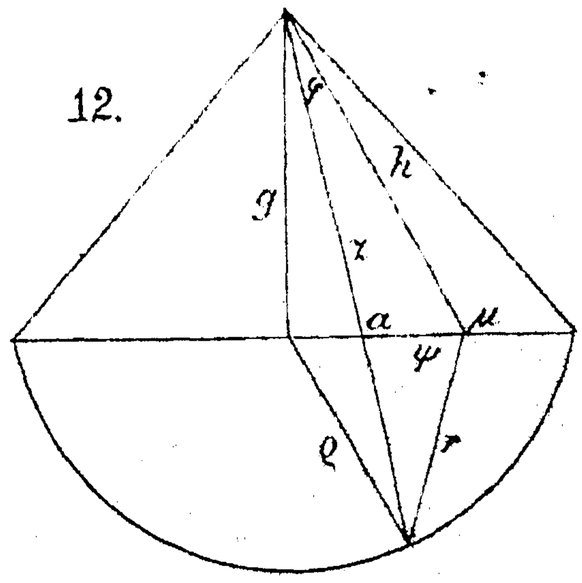
10.



11.



12.



НОВЫЯ НАЧАЛА ГЕОМЕТРІИ

СЪ ПОЛНОЙ ТЕОРІЕЙ ПАРАЛЕЛЬНЫХЪ.

НОВЫЯ НАЧАЛА ГЕОМЕТРІИ

СЪ ПОЛНОЙ ТЕОРІЕЙ ПАРАЛЕЛЬНЫХЪ.

ВСТУПЛЕНІЕ.

Всѣмъ извѣстно, что въ Геометріи теорія паралельныхъ до сихъ поръ оставалась несовершенной. Напрасное стараніе со временъ Эвклида, въ продолженіе двухъ тысячь лѣтъ, заставило меня подозрѣвать, что въ самыхъ понятіяхъ еще не заключается той истины, которую хотѣли доказывать и которую повѣрить, подобно другимъ физическимъ законамъ, могутъ лишь опыты, каковы напримѣръ Астрономическія наблюденія. Въ справедливости моей догадки будучи наконецъ убѣжденъ, и почитая затруднительный вопросъ рѣшенымъ вполнѣ, писалъ объ этомъ я разсужденіе въ 1826 году (1). Примѣненіе новой теоріи къ аналитикѣ находится также въ статьяхъ, подъ названіемъ *о началахъ Геометріи*, помѣщенныхъ въ Казанскомъ Вѣстникѣ за 1829 и 1830 годы. Главное заключеніе, къ которому пришелъ я съ предположеніемъ зависимости линій отъ угловъ, допускаетъ существованіе Геометріи въ болѣе обширномъ смыслѣ, нежели какъ ее представилъ намъ первый Эвклидъ. Въ этомъ пространномъ видѣ далъ я наукѣ названіе *Воображаемой Геометріи*, гдѣ какъ частный случай входитъ *Употребительная Геометрія* съ тѣмъ ограниченіемъ въ общемъ положеніи, какого требуютъ измѣренія на самомъ дѣлѣ. Достаточность новыхъ началъ предпринималъ я доказывать въ сочиненіи, которое было недавно напечатано въ Ученыхъ Запискахъ Казанскаго Университета (2). Желая достигнуть этой цѣли

---

(1) Exposition succincte des principes de la Géomertie, aves une démonstration rigoureuse du théoréme des paralleles, читано въ засѣданіи Физикоматематическаго Отдѣленія при Казанскомъ Университетѣ 12 Февраля 1826 года, но не было нигдѣ напечатано. (Стр. 1 настоящаго изданія. *Прим. изд.*)

(2) Въ книжкѣ I Ученыхъ Записокъ 1835 года подъ названіемъ *Воображаемая Геометрія.* (Стр. 71 настоящаго изданія. *Прим. изд.*)

хотя не прямымъ, но самымъ краткимъ обратнымъ путемъ, я предп челъ въ тотъ разъ, отъ основаній предположительныхъ, идти къ уравненіямъ для всѣхъ отношеній и къ выраженіямъ для всякой Геометрической величины. Еслибъ открытіе мое не принесло другой пользы кромѣ пополненія недостатка въ начальномъ ученіи, то по крайней мѣрѣ вниманіе, какое постоянно заслуживалъ этотъ предметъ, обязываетъ уже меня къ изложенію подробному. Начну разборомъ прежнихъ теорій.

Легко доказать, что двѣ прямыя наклоненныя подъ однимъ угломъ къ третьей, никогда не встрѣчаются, дѣлаясь такимъ образомъ перпендикулярны къ одной. Эвклидъ полагалъ обратно, что двѣ линіи, наклоненныя неодинаково къ третьей, должны всегда пересѣкаться. Чтобъ увѣриться въ справедливости послѣдняго предложенія, прибѣгали къ различнымъ способамъ, то стараясь напередъ отыскать сумму угловъ въ треугольникѣ, то сравнивая безконечныя плоскости въ отверстіи угловъ и между перпендикулами, то допуская зависимость угловъ только съ содержаніемъ сторонъ, или наконецъ придавая новыя свойства прямой линіи въ дополненіе къ опредѣленію. Изъ всѣхъ этихъ доказательствъ можно нѣкоторыя назвать остроумными, но всѣ вообще ложными, недостаточными въ своихъ основаніяхъ и безъ должной строгости въ сужденіи; между ними даже нѣтъ такого, которое бы соединяя съ простотой убѣдительность, могло быть одобрено для начинающихъ.

Лежандръ въ 1800 году напечаталъ третьимъ изданіемъ свою Геометрію, гдѣ помѣстилъ предложеніе, что сумма угловъ треугольника не можетъ быть болѣе π, двухъ прямыхъ. Тутъ же доказывалъ, что такая сумма не должна быть $< \pi$, выпустивъ однакожъ изъ вниманія то, что линіи могутъ не составлять болѣе треугольника вмѣстѣ съ тѣмъ, когда значеніе суммы, выведенное по другому способу, представляло бы какую нибудь несообразность. Не почитаю нужнымъ распространяться здѣсь объ этой ошибкѣ, въ которой сознался послѣ самъ Лежандръ, говоря, что хотя въ основаніе взятыя начала не подлежатъ сомнѣнію, но встрѣчаетъ однакожъ затрудненія, не будучи въ состояніи побѣдить ихъ (¹). Въ Запискахъ Французской Академіи 1833 года прибавилъ онъ еще предложеніе, что сумма угловъ должна быть π во всѣхъ треугольникахъ, если такова въ одномъ только. Тоже мнѣ надобно было доказывать и въ моей теоріи, которую писалъ я въ 1826 году. Даже нахожу, что Лежандръ нѣсколько разъ попадалъ на ту до-

---

(¹) Вотъ собственныя слова Лежандра: «Nous devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de la démonstration fût bien connu, nous a présenté des difficultés que nous n' avons pu entièrement resoudre» (Mémoires de l' Acad. d. sc. de l' Inst. de France Tome XII, 1833, p. 371).

рогу, которую выбралъ я такъ удачно; но вѣроятно предубѣжденіе въ пользу принятаго всѣми положенія, заставляло на каждомъ шагу спѣшить заключеніемъ или дополнять тѣмъ, чего бы нельзя было допускать еще въ новомъ предположеніи. Разсмотримъ все то, что напечаталъ онъ объ этомъ предметѣ въ Запискахъ Французской Академіи 1833 года.

Въ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 1) ведемъ изъ A, чрезъ средину J стороны $B\,C$, линію $A\,C' = A\,B$; продолжаемъ $A\,B$ покуда сдѣлается $A\,B' = 2\,A\,J$. Произойдетъ треугольникъ $A\,B'\,C'$, гдѣ $B'\,C' = A\,B$ и гдѣ сумма S угловъ таже, что въ первомъ треугольникѣ ABC, откуда уголъ CAB переходитъ въ $\triangle AB'C'$, раздѣляясь на два при точкахъ A, B'. Если къ тому $A\,B$ самая большая сторона или неменѣе двухъ другихъ въ $\triangle A\,B\,C$, также $B\,C \leqq A\,C$, то $A\,C' \leqq C'\,B'$, уголъ противъ $B'\,C'$ въ $\triangle A\,B'\,C'$ по крайней мѣрѣ вдвое меньше угла $C\,A\,B$. Такъ продолжая, можемъ придти къ треугольнику, гдѣ два угла какъ угодно малы; а сумма всѣхъ трехъ таже S, что и въ первомъ треугольникѣ $A\,B\,C$. Лежандръ думалъ заключить отсюда, что съ уменьшеніемъ двухъ угловъ, приближеніе противоположныхъ сторонъ къ третьей оканчивается необходимо превращеніемъ остальнаго угла въ два прямые, а потому $S = \pi$ въ начальномъ и слѣдовательно во всякомъ треугольникѣ (Réflexions sur la théorie des paralléles. Mémoires de l' Acad. d. sc. Tome XII. 1833, p. 390). Однакожъ это разсужденіе невѣрно, потому что здѣсь стороны въ треугольникѣ растутъ безконечно, а слѣдовательно можемъ предполагать и границу приближенія, покуда уголъ $A\,C'\,B' < S, < \pi$. Называемъ A, B, C углы въ $\triangle A\,B\,C$ при точкахъ съ тѣми же буквами; называемъ еще A', B', C' углы въ $\triangle A\,B'\,C$ при точкахъ A, B', C'; наконецъ пусть h перпендикулъ изъ C' на сторону $A\,B'$. По способу Воображаемой Геометріи, въ предположеніи $S < \pi$ и разумѣя подъ e основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, находимъ

$$\cot.\,A' = \cot.\,A + \frac{\sin.\,C}{\sin.\,A\,\sin.\,B}$$

$$\cot.\,B' = \cot.\,A + \frac{\sin.\,B}{\sin.\,A\,\sin.\,C}$$

$$e^h - e^{-h} = \frac{4}{\sin.\,C}\sqrt{\cos.\tfrac{1}{2}S.\cos.(\tfrac{1}{2}S - A).\cos.(\tfrac{1}{2}S - B).\cos.(\tfrac{1}{2}S - C)}$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій видно, что A', B' всегда возможны и съ превращеніемъ треугольниковъ уменьшаются до нуля. Послѣднее уравненіе даетъ вся-

кій разъ высоту h и назначаетъ границу приближенія

$$h = \log.\cot.\tfrac{1}{4}S$$

гдѣ логариѳмъ берется Неперовъ.

Лежандръ хотя назвалъ свое доказательство совершенно строгимъ, но самъ вѣроятно думалъ иначе, прибавивъ оговорку, что затрудненіе, еслибъ какое встрѣтилось, всегда можетъ быть отклонено. Съ этой цѣлію прибѣгаетъ онъ къ вычисленіямъ, основаннымъ впрочемъ на первыхъ извѣстныхъ уравненіяхъ прямолинейной Тригонометріи, которыя бы слѣдовало напередъ еще повѣрить и которыя въ этомъ уже случаѣ ни къ чему не служатъ и ни какому заключенію не ведутъ.

Желая все сказать въ подтвержденіе своего предложенія, Лежандръ замѣчаетъ, что равные треугольники, будучи сомкнуты вездѣ различными углами, по три къ точкѣ, представляютъ полосу, которую можно продолжать до безконечности, тогда какъ ее граничатъ двѣ ломанныя линіи: вогнутыя другъ къ другу, если $S < \pi$, выпуклыя — для $S > \pi$. Между тѣмъ доказанная невозможность послѣдняго случая заставляетъ отвергать и первый, гдѣ линіи, какъ двѣ дуги круга, одна къ другой обращенныя, должны необходимо пересѣкаться. Кажется не нужно много разбирать и цѣнить такое сужденіе, гдѣ нѣтъ и тѣни строгаго доказательства. Къ тому скажемъ, что вогнутыя другъ къ другу линіи сближаются только по принятому понятію въ Употребительной Геометріи, тогда какъ съ предположеніемъ $S < \pi$ ничто не мѣшаетъ допускать ихъ продолженіе съ сохраненіемъ одинаковости въ разстояніяхъ.

Бертранъ и по примѣру его Лежандръ хотѣли сравнивать безконечныя плоскости въ углахъ и между перпендикулами. Этого рода доказательствамъ должно бы предшествовать опредѣленіе величины, которую въ Геометріи можно понимать только вмѣстѣ съ измѣреніемъ, при томъ условясь напередъ, по какимъ признакамъ различаются большое съ меньшимъ. Напримѣръ площадь, ограниченная кривою линіей, почитается больше того многоугольника, которой весь помѣщается внутри; менѣе—когда наоборотъ площадь заключается вся въ многоугольникѣ, хотя бы средство вымѣрять эту площадь еще было не извѣстно. Что же касается до безпредѣльныхъ плоскостей, то здѣсь, какъ вездѣ въ математикѣ, за содержаніе двухъ безконечно великихъ чиселъ должно почитать границу, къ которой оно приходитъ съ непрестаннымъ возрастаніемъ числителя и знаменателя въ дроби. Сверхъ того здѣсь надобно разумѣть подъ Геометрической величиной по крайней мѣрѣ ту, какую можно назначать приблизительно, судя по признакамъ неравенства. Въ этомъ отношеніи доказательство Бертрана, какъ и всѣ подобныя, далеко

не удовлетворяютъ требованія, потому что въ нихъ не видимъ даже способа мѣрить плоскости, не говоря о томъ уже какъ плоскости должны быть ограничены напередъ и съ расширеніемъ границъ расти до безконечности.

Пусть надобно сравнивать плоскость X (чер. 2) въ отверстіи угла DCE, съ плоскостію $У$, которая простирается отъ линіи $AC = a$ между двухъ перпендикуловъ AB, CD къ AC. Содержаніе двухъ площадей $X, У$ будетъ выходить различное, хотябъ онѣ возрастали до безконечности, смотря потому, какимъ образомъ придумаемъ ихъ ограничивать въ началѣ. Полагаемъ напримѣръ, что во всякомъ треугольникѣ сумма угловъ $S = \pi$. Дѣлаемъ $AB = CD = na$, гдѣ n цѣлое, потомъ ведемъ прямую DB, а плоскость въ отверстіи угла DCE ограничиваемъ дугой, описанной изъ центра C полупоперечникомъ $CD = na$. Получимъ

$$У = na^2, \qquad X = \tfrac{1}{4}\pi n^2 a^2$$

Отсюда

$$\frac{У}{X} = \frac{4}{\pi n}$$

такое содержаніе, которое съ возрастаніемъ плоскостей $У, X$, для $n = \infty$, изчезаетъ, какъ принималъ и Бертранъ. Еслиже вмѣсто того, чтобы полагать $AB = na$, дѣлаемъ $AB = n^2a$, а CD оставляемъ прежнимъ, то въ этотъ разъ уже находимъ содержаніе

$$\frac{У}{X} = \frac{4}{\pi}$$

постояннымъ для всякаго n, а слѣдовательно также для $n = \infty$, когда двѣ плоскости безконечно велики. Итакъ содержаніе $У : X$ всякій разъ выходитъ различное, смотря по тому, какъ ограничиваемъ плоскости въ началѣ, и какъ онѣ растутъ затѣмъ до безконечности.

Обрѣзываемъ теперь обѣ плоскости $X, У$ дугой FDE, описанной изъ центра C полупоперечникомъ $CD = na$. Полагая во всякомъ треугольникѣ сумму угловъ $S > \pi$ или $S = \pi$, не трудно видѣть, что содержаніе $У : X$ обращается въ нуль для $n = \infty$. Это значитъ, что въ обоихъ случаяхъ $У$ бываетъ безконечно великое перваго, X—втораго порядка, какъ разумѣлъ и Бертранъ. Напротивъ съ предположеніемъ $S < \pi$, находимъ содержаніе (1)

---

(1) Если подъ e разумѣемъ основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, оставляя неизвѣстной линію, принятую единицей, и полагаемъ

$$\sin. r' = \frac{2}{e^r + e^{-r}} \qquad \sin. \psi = \text{tang. } r' \cot. x'$$

$$\text{tang. } r' = \frac{2}{e^r - e^{-r}} \qquad \text{tang. } x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\frac{У}{X} =$$

$$\frac{2\,(e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}).\ \text{arc. sin.}\left(\dfrac{e^{2\alpha}-1}{e^{2\alpha}+1}\cdot\dfrac{e^{2n\alpha}-1}{e^{2n\alpha}+1}\right) - \text{arc. sin.}\left(\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{n\alpha}-e^{-n\alpha}}\right)}{\pi\,(e^{n\alpha}+e^{-n\alpha}-2)}$$

гдѣ число $e > 1$ независитъ отъ n, а слѣдовательно для $n = \infty$

$$\frac{У}{X} = \frac{2}{\pi}\ \text{arc. sin.}\left(\frac{e^{2\alpha}-1}{e^{2\alpha}+1}\right)$$

не будетъ нулемъ, покуда $\alpha > o$, и можетъ быть пренебрежено только за чрезвычайною малостію α.

Съ другой стороны въ томъ увѣриться не трудно, что содержаніе $У : X$ не должно почитать нулемъ для $X = \infty$ и допуская $S < \pi$. Пусть $A\,B, C\,D$ (чер. 3) перпендикулы къ $A\,C$; беремъ произвольно $A\,B = C\,D$. Въ предположеніи $S < \pi$ углы $A\,B\,D, C\,D\,B$ острые; перпендикулы $B\,B'', D\,D''$ къ $B\,D$ отклоняются внутри плоскости $B'\,B\,D\,D'$, не встрѣчаясь другъ съ другомъ и составляя съ BB', DD' углы $B'\,B\,B'', D'\,D\,D''$, которыхъ безконечныя плоскости менѣе такойже плоскости $B'\,A\,C\,D'$, въ противность того, что Бертранъ хотѣлъ утверждать о всѣхъ углахъ безъ исключенія.

Другой видъ даетъ Бертранъ своему доказательству, разсматривая безконечныя плоскости въ однихъ углахъ. Въ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 4) называемъ A, B, C углы противъ сторонъ a, b, c, которыя продолжаемъ: $A\,C$ чрезъ A до A'', $A\,B$ чрезъ B до B'', $B\,C$ чрезъ C до C'. Въ отверстіи внѣшнихъ угловъ $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ плоскости $X + x$, $У + y$, Z, простираясь безпредѣльно, составляютъ такую же плоскость около точки C во всѣ стороны, за исключеніемъ площади $A\,B\,C$, которую дозволяется пренебречь за малостію. Это значитъ, что $\pi - A + \pi - B + \pi - C = 2\,\pi$, откуда $A + B + C = \pi$.

Повѣримъ теперь это сужденіе, напередъ ограничивъ плоскости дугами круга съ полупоперечникомъ $C\,C' = r$ и принимая точки A, B, C за центры. Окружность около C можетъ пересѣкать бока угла $\pi - A$ въ A', B', такъ что раздѣлитъ плоскость въ отверстіи $\pi - A$ на двѣ части: одну X внутри, другую x внѣ

то находимъ площадь, вырѣзанную въ кругѣ перпендикулами къ полупоперечнику r, изъ центра и на разстояніи x отъ центра (Воображаемая Геометрія)

$$\frac{1}{\text{sin. } r'}\cdot \text{arc. cot. (sin. } r' \text{ cot. } \psi) - \psi$$

полнаго круга, котораго C центръ. Бока угла $\pi - B$ могутъ быть пересѣчены тѣмъ же полнымъ кругомъ въ B', C', такъ что плоскость въ отверстіи $\pi - B$ раздѣлится на двѣ части: Y внутри; y внѣ круга, да кромѣ того часть z изъ полнаго круга не будетъ принадлежать къ углу $\pi - B$. Вотъ всѣ возможные случаи, которые представляетъ чертежъ, предполагая $r > a, r > b, r > c, a > c$. Означая къ тому Δ площадь треугольника $A\,B\,C$, R площадь круга съ полупоперечникамъ r, получимъ

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - A) = X + x$$

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - B) = Y + x$$

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - C) = Z$$

$$R = X + Y + Z + z + \Delta$$

Отсюда находимъ

$$A + B + C = \pi + \frac{2\pi}{R}(\Delta - x - y + z) \qquad (1)$$

Оставалось бы теперь доказывать, что $\Delta = x + y - z$ въ предположеніи суммы угловъ треугольника $S < \pi$ для всякаго r или по крайней мѣрѣ для $r = \infty$; но предпринимать этотъ трудъ было бы напрасно. Напротивъ съ условіемъ $S > \pi$ находимъ постоянно $\Delta < x + y - z$, какъ сейчасъ увидимъ. Возрастаніе $CC' = r$ удаляетъ точки B', B'', B''' отъ точки B по направленію $A\,B$, приближая линіи $C\,B', C\,B'', C\,B'''$ къ извѣстной границѣ $C\,D$ (чер. 5), которую въ новой теоріи назвалъ я *параллельной* съ $A\,B$ и которая съ $C\,D, C\,B$ дѣлаетъ углы

$$A\,C\,D = \pi - A - \alpha \qquad B\,C\,D = B - \beta$$

такь, что α, β какія нибудь положительныя числа. При томъ $C\,B' = r$ всегда можно взять довольно большую линію, чтобъ углы $B'\,C\,D, B''\,C\,D, B'''\,C\,D$ выходили какъ угодно малыми. Называя P площадь треугольника $A\,C\,B'$, получимъ слѣдовательно для весьма большаго r (чер. 4) безъ примѣтной разности

$$\tfrac{1}{2}(\pi - A - \alpha)\,R = \tfrac{1}{2}(\pi - A)\,R + P - x.$$

Отсюда

$$x = P + \tfrac{1}{2}\alpha\,R \qquad (2)$$

Если на время полагаемъ уголъ $C'\,C\,D = M$ (чер. 5), то данное выше уравненіе

$$(\pi - B)\,R = 2\pi\,(Y + y)$$

теперь можетъ быть написано:

$$\tfrac{1}{2}(\pi - B)\,R = \tfrac{1}{2}\,M\,R + P - \Delta + y - z \qquad (3)$$

Куда вставляя значеніе

$$M = A + C + \alpha$$

получимъ уравненіе, которое въ соединеніи съ уравненіемъ (2) снова приводитъ къ уравненію (1) и такимъ образомъ его повѣряетъ. Если-жь беремъ

$$M = \pi - B - \beta$$

то паходимъ изъ уравненія (3)

$$\beta = \frac{2\,\pi}{R}(\Delta - P - y + z)$$

что въ соединеніи съ уравненіями (1), (2) даетъ

$$A + B + C = \pi - \alpha - \beta$$

Итакъ въ доказательствѣ Бертрана подразумѣвалось уже $\alpha = o$, $\beta = o$, то самое, что надобно было доказывать.

Подобно тому какъ Бертранъ довольствовался сравненіемъ безконечныхъ плоскостей въ углахъ треугольника, Лежандръ хотѣлъ обойтись съ *двууголъниками* (biangles), разумѣя подъ этимъ названіемъ безконечныя плоскости между двухъ перпендикуловъ. Собственно доказалъ онъ только то, что безконечная плоскость $C\,A\,B\,D$ (чер. 6) между перпендикулами $A\,C, B\,D$ къ $A\,B$, равна безконечной плоскости $D\,E\,F\,C$, которая происходитъ изъ первой съ отдѣленіемъ отъ нея четыреугольника $A\,B\,E\,F$ помощію перпендикула $E\,F$ къ $B\,D$. Это само по себѣ впрочемъ ясно; но Лежандръ еще выпустилъ здѣсь изъ вниманія то, что $E\,F$ можетъ не встрѣчаться съ $A\,C$. Чтобъ избѣжать этого небольшого затрудненія, стоитъ только принимать $E\,F$ перпендикуломъ изъ F къ $B\,D$; но далѣе какимъ образомъ отсюда будетъ слѣдовать $F\,E = A\,B$ и уголъ $E\,F\,C = \frac{1}{2}\,\pi$, уже нельзя болѣе поправить ложное сужденіе, въ которомъ неосмотрительность Лежандра была такъ велика, что не примѣчая грубой ошибки, почиталъ онъ свое доказательство весьма простымъ и совершенно строгимъ.

Въ теоріи паралельныхъ думали принять еще за основаніе, что въ треугольникахъ углы должны зависѣть отъ содержанія сторонъ. Съ перваго раза такое положеніе кажется столько же простымъ, сколько необходимымъ; но когда вникаемъ въ наши понятія, откуда беретъ оно свое начало, то принуждены называть его также произвольнымъ, какъ и всѣ другія, къ которымъ до сихъ поръ прибѣгали. Въ природѣ мы познаемъ собственно только движеніе,

безъ котораго чувственныя впечатлѣнія не возможны. Итакъ всѣ прочія понятія, напримѣръ Геометрическія, произведены нашимъ умомъ искуственно, будучи вязты въ свойствахъ движенія; а потому пространство, само собой, отдѣльно, для насъ не существуетъ. Послѣ чего въ нашемъ умѣ не можетъ быть никакого противорѣчія, когда мы допускаемъ, что нѣкоторыя силы въ природѣ слѣдуютъ одной, другія своей особой Геометріи. Чтобы пояснить эту мысль, полагаемъ, какъ и многіе въ этомъ увѣрены, что силы притягательныя слабѣютъ отъ распространенія своего дѣйствія по сферѣ. Въ употребительной Геометріи величину сферы принимаютъ $4\pi r^2$ для полупоперечника r, отъ чего сила должна уменьшаться въ содержаніи къ квадрату разстоянія. Въ воображаемой Геометріи нашелъ я поверхность шара

$$\pi (e^r - e^{-r})^2$$

и такой Геометріи можетъ быть слѣдуютъ молекулярныя силы, которыхъ за тѣмъ все разнообразіе будетъ зависѣть отъ числа e, всегда весьма большаго. Впрочемъ пусть это чистое предположеніе только, для подтвержденія котораго надобно искать другихъ убѣдительнѣе доводовъ; но въ томъ однако-жъ нельзя сомнѣваться, что силы все производятъ однѣ: движеніе, скорость, время, массу, даже разстоянія и углы. Съ силами все находится въ тѣсной связи, которую не постигая въ сущности, не можемъ утверждать, будто въ отношеніе разнородныхъ величинъ между собою должны только входить ихъ содержанія. Допуская зависимость отъ содержанія, почему не предполагать и зависимости прямой? Нѣкоторые случаи говорятъ уже въ пользу такого мнѣнія: величина притягательной силы, напримѣръ, выражается массою, раздѣленной на квадратъ разстоянія. Для разстоянія нуль это выраженіе собственно ничего не представляетъ. Надобно начинать съ какого нибудь, большаго и малаго, но всегда дѣйствительнаго разстоянія, и тогда только сила появляется. Теперь спрашивается, какъ же разстояніе производитъ эту силу? какъ эта связь между двумя столько разнородными предметами существуетъ въ природѣ? Этого вѣроятно мы никогда не постигнемъ; но когда вѣрно что силы зависятъ отъ разстоянія, то линіи могутъ быть также въ зависимости съ углами. По крайней мѣрѣ разнородность одинакова въ обоихъ случаяхъ, которыхъ различіе не заключается собственно въ понятіи, но только въ томъ, что мы познаемъ одну зависимость изъ опытовъ, а другую при недостаткѣ наблюденій должны предполагать умственно, либо за предѣлами видимаго міра, либо въ тѣсной сферѣ молекулярныхъ притяженій.

Какъ бы то ни было, но предположеніе, что содержаніе только разстояній можетъ опредѣлить углы, будетъ частный случай, къ которому всякій разъ переходимъ, принимая линіи безконечно малыми. Способъ употребительной Геометріи приводитъ слѣдовательно всегда къ заключеніямъ вѣрнымъ, однакожъ не въ такомъ обширномъ видѣ, въ какомъ даетъ ихъ общая Геометрическая система, которую назвалъ я *Воображаемой Геометріей*. Разность въ уравненіяхъ той и другой происходитъ отъ прибавленія новаго постояннаго, которое должны бы давать уже наблюденія, но которое безъ чувствительной разности находимъ отсюда таково, что въ измѣреніяхъ на самомъ дѣлѣ принятая всѣми Геометрія болѣе нежели достаточна, хотябъ она сама по себѣ не была строго вѣрной. Это значитъ, что въ природѣ такая система либо находится случайно, либо всѣ доступныя для насъ разстоянія въ ней еще безконечно малы. Вообще всякое положеніе, которое Воображаемая Геометрія допускаетъ въ элементахъ величины, будучи принято для линій въ большомъ размѣрѣ, должно необходимо приводить къ правиламъ обыкновенной Геометріи, потому что съ такимъ предположеніемъ удерживаются только первыя степени тѣхъ чиселъ, которыя представляютъ собою линіи, а слѣдовательно вездѣ въ уравненіяхъ войдутъ ихъ содержанія. Таковы положенія напримѣръ, что разстоянія между двумя перпендикулами вездѣ равны, что перпендикулъ описываетъ вершиной прямую линію, что кругъ съ возрастаніемъ поперечника переходитъ въ прямую линію. Изъ всѣхъ извѣстныхъ подобныхъ положеній отдать надобно преимущество тому, которое принимаетъ зависимость содержанія линій отъ угловъ; по крайней мѣрѣ здѣсь простота въ понятіи близка даже къ первой нашей опытности; но вотъ и все что можно сказать въ защищеніе: всякое другое сужденіе либо ложно, либо неосновательно. Такъ нельзя затруднятся тѣмъ, что съ непосредственной зависимостію линій отъ угловъ войдетъ одна величина столько же произвольная, какъ и выборъ единицы. Противъ этого можемъ отвѣчать, что ничто не мѣшаетъ представлять себѣ въ уравненіяхъ содержаніе линій не къ одной изъ тѣхъ, которыя тутъ разсматриваются, но къ такой, которая какимъ нибудь образомъ опредѣлена въ природѣ. Это показалъ я въ Воображаемой Геометріи, давъ уравненія, гдѣ всѣ линіи входятъ въ содержаніи къ одной только, которую бы требовалось найти изъ наблюденій, еслибъ они были къ тому достаточны. Почитаю не нужнымъ подробно разбирать другія положенія, слишкомъ искуственныя, либо произвольныя. Изъ нихъ одно только заслуживаетъ еще нѣкоторое вниманіе: это переходъ круга въ прямую линію. Недостатокъ виденъ здѣсь впрочемъ съ перваго раза въ нарушеніи постепенности, когда кривая, которая не перестаетъ замыкаться, какъ бы ни была велика, долж-

на грубо превратиться въ безконечную прямую, потерявъ такимъ образомъ существенное свойство. Въ этомъ отношеніи Воображаемая Геометрія гораздо лучше пополняетъ промежутокъ. Въ ней увеличивая кругъ, котораго всѣ полупоперечники сходятся въ одну точку, приходимъ наконецъ къ такой линіи, гдѣ нормальныя сближаются въ безконечности, хотя не могутъ уже пересѣкаться. Такое свойство не принадлежитъ однакожъ прямой, но той кривой линіи, которую назвалъ я *предѣльной круга* въ сочиненіи моемъ *о началахъ Геометріи.*

Наконецъ если затруднительную задачу паралелизма надобно рѣшить опытомъ, то предложенный Лежандромъ, укладывать шесть разъ полупоперечникъ по кругу, безъ сомнѣнія долженъ почитаться слишкомъ недостаточнымъ. Въ моихъ *началахъ Геометріи,* пользуясь Астрономическими наблюденіями, показалъ я, что въ треугольникѣ, котораго бока равняются почти съ разстояніемъ земли до солнца, сумма угловъ не можетъ разниться съ двумя прямыми, болѣе 0,0003 секунды градуса. Эта разность увеличивается въ геометрическомъ содержаніи къ бокамъ треугольника, а слѣдовательно до сихъ поръ употребительная Геометрія, какъ я замѣтилъ выше, болѣе нежели достаточна въ измѣреніяхъ на самомъ дѣлѣ. Къ такому заключенію можно даже придти съ помощію предложеній довольно простыхъ и приличныхъ началамъ науки, хотя полная теорія требуетъ уже совершенно перемѣнить порядокъ въ преподаваніи, съ присоединеніемъ сюда Тригонометріи.

Къ несовершенству въ теоріи паралельныхъ надобно было причислять опредѣленіе самой паралельности. Однакожъ это несовершенство нисколько не зависѣло, какъ подозрѣвалъ Лежандръ, отъ недостатка въ опредѣленіи прямой линіи, ни даже отъ тѣхъ недостатковъ, прибавлю, которые скрывались въ первыхъ понятіяхъ, и которые намѣренъ я здѣсь указать и попытаться, сколько могу самъ, ихъ исправить.

Геометрію начинаютъ обыкновенно, придавая тѣламъ три протяженія, поверхностямъ два, линіямъ одно, въ точкѣ не допуская никакого. Называя три протяженія: длина, ширина, высота, и разумѣя подъ этими названіями собственно три координаты, спѣшатъ такимъ образомъ преждевременныя понятія сообщить словами, къ которымъ разговорный языкъ придаетъ уже какое-то, хотя для точной науки еще неопредѣленное значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, какъ можно съ ясностію себѣ представлять измѣреніе въ длину, когда не знаемъ еще, что такое прямая линія? Какъ можно говорить о ширинѣ, высотѣ, ничего не сказавъ на передъ о перпендикулахъ, о плоскости, какъ бываютъ перпендикулы въ одной и

въ разныхъ плоскостяхъ? Наконецъ если въ точкѣ нѣтъ ни одного протяженія, то чтоже въ ней остается затѣмъ, чтобъ она могла быть предметомъ сужденія? Пусть и такъ, что прямую линію всякій ясно себѣ представляетъ, хотя не можетъ еще дать отчета въ своемъ понятіи; но спрашивается, какимъ образомъ помощію прямой долженъ онъ назначать теперь одно протяженіе въ кривой линіи, два въ кривой поверхности?

Правда, нѣтъ необходимости требовать, чтобы длина, ширина, высота были другъ къ другу перпендикулярны: довольно когда для нихъ взяты линіи въ различныхъ направленіяхъ. Однакожъ и въ этомъ случаѣ встрѣчаются своего рода затрудненія. Принимая за правило преждевременно не заимствовать изъ тѣхъ понятій, которыя должно раскрыть еще въ послѣдствіи, какъ, спрашивается, выразить теперь условіе, чтобы три размѣра въ тѣлахъ принадлежали тремъ прямымъ въ разныхъ плоскостяхъ? Потомъ, различное направленіе двухъ частей отъ точки перелома на линіи, не должно смѣшивать съ двойнымъ протяженіемъ въ плоскости, и наконецъ опредѣлить вполнѣ, что такое надобно разумѣть подъ направленіемъ и подъ угломъ. Короче: *пространство, протяженіе, мѣсто, тѣло, поверхность*, линія, точка, направленіе, уголъ—слова, *которыми начинаютъ Геометрію, но съ* которыми никогда не соединяютъ *яснаго понятія.*

Между тѣмъ на всѣ такіе предметы можно смотрѣть еще съ другой стороны. Надобно замѣтить, что темноту въ понятіи здѣсь производитъ отвлеченность, которая въ примѣненіи къ дѣйствительнымъ измѣреніямъ дѣлается лишней, а слѣдовательно въ самую теорію введена напрасно. Поверхности, линіи, точки, какъ ихъ опредѣляетъ Геометрія, существуютъ только въ нашемъ воображеніи; тогда какъ измѣреніе поверхностей и линій производимъ, употребляя къ тому тѣла. Вотъ почему стоитъ только говорить о поверхностяхъ, линіяхъ и точкахъ, какъ ихъ въ дѣйствительномъ измѣреніи разумѣть должно, и тогда будемъ уже держаться тѣхъ самыхъ понятій, которыя съ представленіемъ тѣлъ въ нашемъ умѣ непосредственно соединены, къ которымъ наше воображеніе пріучено, которыя можемъ повѣрять въ природѣ прямо, не прибѣгая напередъ къ другимъ, искуственнымъ и постороннимъ. Но съ этими новыми понятіями наука въ самомъ началѣ получаетъ другое направленіе, которому слѣдуетъ, покуда не перейдетъ въ аналитику; такъ что способъ преподаванія теперь уже принимаетъ особенный видъ. Постараюсь объяснить, въ чемъ эта перемѣна можетъ заключаться.

Въ Математикѣ слѣдуютъ двумъ способамъ, анализу и синтезу. Отличительную принадлежность анализа составляютъ уравненія, которыя служатъ первымъ осно-

ваніемъ всякому сужденію и ведутъ уже ко всѣмъ заключеніямъ. Синтезъ, или способъ построеній, требуетъ того самаго представленія, которое соединено непосредственно съ первыми понятіями въ нашемъ умѣ. Главная выгода въ анализѣ та, что здѣсь отъ уравненій идутъ всегда прямою дорогой къ предположенной цѣли. Синтезъ не подчиняется какимъ нибудь общимъ правиламъ, но съ него надобно начинать по необходимости, чтобы наконецъ отыскавъ уравненія, достигнуть съ тѣмъ вмѣстѣ той черты, за которой все переходитъ уже въ науку чиселъ. Напримѣръ въ Геометріи доказываютъ, что два перпендикула не пересѣкаются, что съ равенствомъ нѣкоторыхъ только частей треугольники бываютъ уже во всемъ одинаковы. Напрасно бы хотѣли такіе случаи, какъ и всю теорію параллельныхъ, разсматривать аналитически. Въ этомъ никогда не успѣютъ также, какъ не могутъ обойтись безъ синтеза въ измѣреніи плоскостей, ограниченныхъ прямыми линіями, въ измѣреніи тѣлъ, ограниченныхъ плоскостями. Само по себѣ разумѣется, что въ синтезѣ даже должно пользоваться пособіемъ анализа; но то не оспоримо, что въ началахъ Геометріи и Механики никогда не можетъ анализъ быть единственнымъ способомъ. Геометріи до извѣстной степени всегда будетъ принадлежать собственно геометрическое, ни какимъ образомъ онъ нея неотъемлемое. Можно стѣснять кругъ синтеза, но совсѣмъ уничтожить его нельзя. Даже въ этомъ стараніи, замѣнить синтезъ анализомъ, не надобно столько спѣшить уже, чтобы допускать всякій разъ функціи гдѣ только зависимость предвидѣть можно, не зная въ чемъ еще заключается, того менѣе, какъ будетъ она выражаться. Съ этимъ ограниченіемъ въ анализѣ назначаемъ истинную цѣль и надлежащее мѣсто другому способу, который одинъ сперва начинаетъ науку съ такихъ понятій, откуда сужденіе производитъ уже все прочее, выводя тотчасъ изъ первыхъ его данныхъ новыя, такъ потомъ и далѣе разширяя предѣлы нашихъ познаній во всѣхъ направленіяхъ до безконечности. Первыми данными безъ сомнѣнія будутъ всегда тѣ понятія, которыя мы пріобрѣтаемъ въ природѣ посредствомъ нашихъ чувствъ. Умъ можетъ и долженъ ихъ приводить къ самому меньшему числу, чтобъ они служили потомъ твердымъ основаніемъ наукѣ. Однакожъ обыкновенно синтетическому способу въ этомъ видѣ, съ соблюденіемъ всѣхъ сказанныхъ здѣсь правилъ, никто не слѣдуетъ, предпочитая, хотя бы прежде времени, вводить анализъ, и предполагая развитіе, хотя бы неполное, тѣхъ понятій которыя составляютъ природный умъ нашъ, и которымъ остается придать только названія, не распространяясь много въ объясненіяхъ и не затрудняясь точностію въ опредѣленіяхъ. Если легкость и простота заставляютъ избирать такой способъ преподаванія, то на сторонѣ строгой истины всегда будетъ свое преиму-

щество, которымъ когда нибудь надобно пользоваться. Первый опытъ этому сдѣлалъ я съ Алгеброй и теперь предпринимаю тоже съ Геометріей.

Чистый анализъ, безъ всякой уже примѣси синтеза, не прежде можетъ начинаться въ Геометріи, какъ послѣ того, когда всякая зависимость представлена будетъ уравненіями и для всякаго рода геометрической величины будутъ даны выраженія. Величину въ Геометріи можемъ понимать только съ измѣреніемъ, которое для кривыхъ линій и поверхностей собственно не существуетъ. Какъ бы малы ни были взяты части кривой, онѣ остаются всегда кривыми, слѣдовательно помощію прямой никогда не могутъ быть измѣрены. Тоже надобно сказать о кривой поверхности, гдѣ какъ бы тѣсно части ни были разграничены, никогда не будутъ плоскими. Съ другой стороны въ природѣ нѣтъ ни прямыхъ ни кривыхъ линій, нѣтъ плоскостей и кривыхъ поверхностей: въ ней находимъ одни тѣла, такъ что все прочее, созданное нашимъ воображеніемъ, существуетъ въ одной теоріи. Лагранжъ въ основаніе принималъ положеніе Архимеда, что двѣ точки на кривой могутъ быть всегда взяты такъ близко, чтобы дуга между ними почиталась уже болѣе хорды, но меньше двухъ касательныхъ къ дугѣ, проведенныхъ отъ ея концевъ до взаимной встрѣчи (Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange). Такое положеніе дѣйствительно необходимо, но съ нимъ уничтожается начальная мысль, мѣрить кривыя линіи прямыми. Тотъ же случай съ поверхностями, когда предполагаютъ мѣрить ихъ плоскостями. Итакъ вычисленіе длины кривой поверхности, нисколько не представляетъ, такъ сказать, выпрямленіе кривизны; но клонится совсѣмъ къ другой цѣли: сыскать границу, къ которой тѣмъ ближе подходитъ измѣреніе на самомъ дѣлѣ, чѣмъ это послѣднее сдѣлано вѣрнѣе. Измѣреніе же полагаютъ вѣрнѣе той цѣпью, которой звенья мельче; самымъ вѣрнымъ наконецъ, когда вмѣсто цѣпи берутъ тонкую нить, совершенно гибкую. Вотъ почему въ Геометріи надобно собственно доказывать то, что сумма касательныхъ уменьшается вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ сумма хордъ увеличивается, покуда двѣ суммы перестанутъ примѣтно разниться съ границей, къ которой обѣ прибližаются и которую Геометрія принимаетъ уже за длину кривой линіи. Теперь ясно, что вычисленіе по такому правилу тѣмъ согласнѣе бываетъ съ измѣреніемъ, чѣмъ это послѣднее вѣрнѣе. Здѣсь видно также на чемъ основано положеніе Архимеда. По примѣру кривыхъ линій должно разсуждать о величинѣ поверхностей, нисколько не утверждая, будто весьма малыя части способны выпрямляться.

Для плоскостей, ограниченныхъ кривыми линіями, и для тѣлъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями, также въ строгомъ смыслѣ не существуетъ измѣренія, какъ скоро мѣрою должны служить въ первомъ случаѣ квадратъ, во вто-

ромъ кубъ. Однакожъ всегда предполагая найти только границу, къ которой дѣйствительное вымѣриваніе приближается, надобно показать, что къ такой границѣ непремѣнно всякій разъ приходимъ; потомъ объяснить, какимъ образомъ измѣреніе должно себѣ представлять и какъ въ немъ можемъ достигать желаемой точности. Чтобъ удовлетворить всѣмъ этимъ требованіямъ нельзя здѣсь обойтись безъ особыхъ вспомогательныхъ положеній, которыя принимаютъ уже за аксіомы: 1) плоскости равны, когда для составленія одной изъ нихъ другая дѣлится на части, которыя соединяются въ новомъ порядкѣ; 2) плоскость менѣе той, въ которой она вся помѣщается, не наполняя при томъ ее совершенно; 3) величина треугольника изчезаетъ съ безпредѣльнымъ умепьшеніемъ одной стороны. Послѣднее положеніе даже необходимо въ измѣреніи плоскостей. Къ подобнымъ аксіомамъ надобно прибѣгать и въ измѣреніи тѣлъ.

ГЛАВА I.

ПЕРВЫЯ ПОНЯТІЯ ВЪ ГЕОМЕТРІИ.

1. *Прикосновеніе* составляетъ отличительную принадлежность тѣлъ и даетъ имъ названіе *геометрическихъ*, когда въ нихъ удерживаемъ это свойство, не принимая въ разсужденіе всѣ другія, существенныя ли то будутъ или случайныя.

Кромѣ тѣлъ предметомъ сужденія бываютъ напримѣръ: время, сила, скорость движенія; но понятіе, какое заключается въ словѣ прикосновеніе, сюда неотносится. Мы соединяемъ его въ нашемъ умѣ съ одними тѣлами, когда говоримъ объ ихъ составленіи, либо раздѣленіи на части. Это простое представленіе, получаемое прямо въ природѣ чувствами, не происходитъ изъ другихъ, а потому не подлежитъ уже толкованію.

Два тѣла A, B (чер. 7), *касаясь* другъ друга, составляютъ одно Геометрическое тѣло C, гдѣ составныя части A, B являются каждая порознь не теряясь въ цѣломъ C.

Обратно всякое тѣло C произвольнымъ *сѣченіемъ* S раздѣляется на двѣ части A, B. Здѣсь подъ словомъ сѣченіе не разумѣемъ какую нибудь новую принадлежность тѣла; но тоже прикосновеніе, выражая въ этотъ разъ уже дѣленіе тѣла на двѣ прикосновенныя части. Двѣ части A, B будемъ называть еще *сторонами* сѣченія S въ тѣлѣ C.

Такъ можно представлять себѣ всѣ тѣла въ природѣ частями одного цѣлаго, которое называемъ *пространствомъ*.

2. Ко всякому тѣлу A (чер. 8) можетъ касаться другое B такъ, что прикосновеніе третьяго C къ A и къ B вмѣстѣ сдѣлается невозможнымъ. Въ такомъ случаѣ B называютъ *окружнымъ пространствомъ*, предполагая что въ немъ заключается всякое тѣло C; или *мѣстомъ* тѣла A, принимая въ разсужденіе только

прикосновеніе *A* съ *B*, и потому дозволяя всякую часть *C*, неприкосновенную къ *A*, выбрасывать изъ окружнаго пространства. Когда тѣло *A* находится въ этомъ родѣ прикосновенія съ *B*, притомъ съ *A* нельзя соединять никакого тѣла, которое бы не касалось *B*, то говорятъ, что *A наполняетъ* мѣсто *B*. Всѣ другія тѣла, которыя безъ всякой съ ними перемѣны наполняютъ также мѣсто *B*, будутъ уже геометрически во всѣхъ отношеніяхъ *одинаковы* между собою.

Два тѣла только что *равны*, какъ скоро части одного должны быть расположены въ новомъ порядкѣ, чтобы наполняли мѣсто другаго.

Измѣреніе геометрическаго тѣла будетъ произведено, когда раздѣляемъ его съ другимъ, принятымъ за мѣру, на равныя части. Послѣ чего величина выразится содержаніемъ числа частей въ данномъ тѣлѣ къ числу частей въ мѣрѣ. Возможность найти величину тѣлъ предполагаетъ слѣдовательно возможность составлять всякое тѣло повтореніемъ одного, которое прикладываясь само къ себѣ наполняло бы наконецъ какъ измѣряемое, такъ и самую мѣру. Если нельзя въ этомъ успѣть совершенно, то начинаютъ съ того, что мѣрѣ даютъ извѣстный видъ, затѣмъ раздѣляютъ ее такъ на части, хотя произвольнаго размѣра, но всегда одинаковыя, чтобъ она сама съ собой и съ частями производила сплошное тѣло, наполняя пространство внѣ всякихъ границъ. Послѣ чего въ составленіи можно будетъ подходить къ образованію всякаго тѣла, достигая той степени равенства, за который наши чувства перестаютъ уже постигать недостатки. Тогда погрѣшности въ измѣреніи не превзойдутъ тѣхъ отклоненій, какія бываютъ даже въ самой природѣ, которая должна быть всегда главною цѣлію въ наукахъ, и гдѣ хотя мы почерпаемъ первыя понятія, но самою строгостію въ нихъ бываемъ одолжены несовершенству нашихъ чувствъ. Дѣйствительно, въ природѣ непрерывнаго составленія нѣтъ, а слѣдовательно правильность образованія не поддерживается до малѣйшихъ частицъ, какъ она представляется съ перваго раза для всего цѣлаго въ большомъ размѣрѣ. Съ другой стороны, хотя производимъ въ нашемъ воображеніи несоизмѣримыя тѣла, какъ напримѣръ шаръ и кубъ, однакожъ стоитъ условиться въ признакахъ большаго и меньшаго, слѣдовательно допускать уже во всемъ опредѣленную величину, потомъ заключать измѣряемое въ границы, которыя бы можно было сближать по произволу, тогда будемъ подходить съ какой угодно точностію къ величинѣ мысленныхъ образцовъ.

3. *Вся ое тѣло можетъ быть раздѣлено на части, которыя не касаются взаимно чер зъ одну.* Такія сеченія назовемъ *поступательными.* Они назначаютъ *прохяженіе*, по которому тѣло простирается до безконечности, когда непрестан-

но прибавляемъ отъ окружнаго пространства новыя части, неприкосновенныя черезъ одну.

Въ чертежѣ 9 представлены части A, B, C, D, E тѣла, которыя по порядку соединены прикосновеніемъ, тогда какъ A не касается ни C, ни D, ни E; также B не касается ни D, ни E. Сѣченія S, S', S'', S''', которыми такое дѣленіе произведено, будутъ поступательныя.

4. Первое сѣченіе дѣлитъ тѣло на двѣ части; второе, переходя съ одной стороны на противоположную, производитъ уже четыре. Въ такомъ случаѣ *два сѣченія можно всегда такъ провести, потомъ прибавлять еще новыя, чтобы съ каждымъ разомъ увеличивалось двумя число частей, которыя всѣ взаимно другъ друга касаются.* Такія сѣченія, которыхъ слѣдовательно число неограничено, будемъ называть *обращательными.*

Въ чертежѣ 10 сѣченіе $a\,b$ раздѣляетъ тѣло на двѣ части; сѣченія $c\,d, f\,e$ прибавляютъ еще по двѣ, такъ что всѣ шесть частей, AA, BB, CC, DD, EE, FF взаимно касаются. Напримѣр $A\,A$ касается не только $B\,B$, но даже $C\,C$, $D\,D$, $E\,E$, $F\,F$. Три сѣченія $a\,b$, $c\,d$, $e\,f$ будутъ обращательныя.

Два сѣченія, изъ которыхъ каждое въ отношеніи къ другому переходитъ съ одной стороны на противоположную, будемъ называть для краткости *сѣченіями накрестъ.* Напримѣръ въ чертежѣ 10 сѣченія $a\,b$, $c\,d$ проведены накрестъ. Изъ четырехъ частей, такими сѣченіями въ тѣлѣ произведенныхъ, тѣмъ двумъ, которыя въ отношеніи къ обоимъ сѣченіямъ находятся на противоположныхъ сторонахъ, дадимъ названіе *долей накрестъ.* Въ чертежѣ 10 представлены доли накрестъ $A\,A$ съ $D\,D$, $B\,B$ съ $E\,E$, $C\,C$ съ $F\,F$. Здѣсь $A\,A$ съ $D\,D$ лежатъ на противоположныхъ сторонахъ какъ въ отношеніи къ сѣченію $a\,b$, такъ и къ $c\,d$. Надобно замѣтить, что два сѣченія накрестъ раздѣляютъ иногда тѣло на четыре части неприкосновенныя черезъ одну. Однакожъ въ такомъ случаѣ первая доля соединяется вновь прикосновеніемъ съ четвертой, а потому здѣсь дѣленіе нельзя смѣшивить съ тѣмъ, которое происходитъ отъ поступательныхъ сѣченій. На чертежѣ 11 представленъ видъ съ боку такого тѣла, которое сѣченіями $abcd, efgh$ раздѣляется на четыре части A, B, C, D неприкосновенныя черезъ одну. Между тѣмъ первая часть A соединена съ четвертой D, а потому дѣленіе нельзя починать произведеннымъ посредствомъ четырехъ поступательныхъ сѣченій $a\,b$, $e\,f$, $c\,d$, $g\,h$. Отличительный признакъ сѣченій поступательныхъ отъ сѣченій накрестъ будетъ тотъ, что первыя не переходятъ съ одной стороны на противоположную. Въ чертежѣ 11 напротивъ сѣченіе $a\,b\,c\,d$ раздѣляетъ тѣло на двѣ части $a\,d\,h$,

$a\,e\,d$, которыя представляютъ двѣ стороны сѣченія $a\,b\,c\,d$; другое сѣченіе $e\,f\,g\,h$ съ одной стороны $a\,e\,d$ переходитъ на другую $a\,h\,d$. Если бы часть D напримѣръ была отброшена, чрезъ что прикосновеніе A съ D, D съ C было бы прервано; то въ такомъ случаѣ два сѣченія $e\,f$, $c\,d$ сдѣлались бы поступательными. Впрочемъ съ двумя сѣченіями накрестъ должно всегда происходитъ прикосновеніе по крайней мѣрѣ двухъ долей накрестъ, если не въ самомъ тѣлѣ, то въ окружномъ пространствѣ; слѣдовательно съ прибавленіемъ отсюда какой нибудь части къ тѣлу. Такъ въ чертежѣ 11 тѣло можетъ быть дополнено частію, взятой отъ окружнаго пространства, съ тѣмъ чтобы въ этомъ составномъ тѣлѣ два сѣченія не прерывались.

Предполагая сѣченія непрерывными можемъ допускать два случая: или сѣченія $a\,d$, $e\,h$ (чер. 12), производятъ четыре части A, B, C, D, изъ которыхъ каждыя двѣ A съ C, B съ D касаются накрестъ; или гдѣ только двѣ части, напримѣръ A съ C (чер. 13) касаются, тогда какъ двѣ другія, B съ D, не соединены. Въ одномъ только первомъ изъ этихъ двухъ случаевъ сѣченія $a\,d$, $e\,h$ (чер. 12) будутъ обращательными.

5. *Всякое тѣло можно тремя сѣченіями раздѣлять на восемь частей взаимно прикосновенныхъ, такъ чтобъ сѣченія поступательныя къ каждому изъ трехъ отдѣляли всегда по четыре части взаимно прикосновенныя.* Въ такомъ случаѣ три сѣченія назовемъ *главными*, которыхъ уже болѣе числомъ существовать въ тѣлахъ не можетъ, хотя каждое замѣняется какъ обращательнымъ его, такъ и поступательнымъ. Четвертаго сѣченія, которому бы могло принадлежать названіе главнаго подъ этимъ условіемъ, никакое тѣло не допускаетъ. Дѣйствительно, мы не въ состояніи ни одно тѣло раздѣлять четвертымъ сѣченіемъ, удваивая число долей взаимно прикосновенныхъ, такъ чтобы прикосновеніе всѣхъ шестнадцати частей сохранялось, когда сѣченія замѣняемъ ихъ поступательными.

Три главныя сѣченія $a\,b$, $c\,d$, $e\,f$ (чер. 14) раздѣляютъ тѣло на восемь частей A, B, C, D, A', B', C', D' взаимно прикосновенныхъ. Тоже бы произошло, когда бы вмѣсто $c\,d$ напримѣръ взяли которое нибудь изъ его поступательныхъ, или одно изъ обращательныхъ.

Еще недовольно, чтобы всѣ восемь долей взаимно касались, если три сѣченія, которыми тѣло раздѣлено, должны быть главными. Надобно, чтобы поступательныя къ каждому вырѣзывали всякій разъ по четыре части, прикосновенныя накрестъ, по крайней мѣрѣ когда не принимаемъ въ разсужденіе доли совсемъ уже накрестъ неприкосновенныя. Воображаемъ теперь, что къ одному изъ трехъ

сѣченій проведено поступательное: между ними вырѣжутся четыре части, которыхъ прикосновеніе можетъ быть одно изъ трехъ, представленныхъ на чертежахъ 11, 12, 13. Первый случай не рѣшаетъ еще, должно ли почитать сѣченія $c\,d$, $e\,h$ за два главныя; но въ случаѣ, который видимъ на чертежѣ 12, два сѣченія ad, eh могутъ быть главными, когда тоже повторяется вездѣ между поступательными сѣченіями, или покрайней мѣрѣ только между нѣкоторыми прикосновеніе накрестъ совсемъ уничтожается.

6. Когда въ тѣлѣ три главныя сѣченія проведены, съ тѣмъ вмѣстѣ восемь долей взаимно прикосновенныхъ произошли, то въ отношеніи къ первому сѣченію двѣ части касаются *поверхностно*, въ отношеніи къ двумъ сѣченіямъ двѣ части накрестъ касаются *линейно*, въ отношеніи ко всѣмъ тремъ сѣченіямъ двѣ части на противоположныхъ сторонахъ касаются *въ точкѣ*.

Чертежъ 7 представляетъ поверхностное прикосновеніе двухъ частей A, B въ тѣлѣ C. На чертежѣ 15 видно линейное прикосновеніе двухъ тѣлъ A, B, которые могутъ быть вырѣзаны изъ одного посредствомъ сѣченій $a\,b$, $c\,d$. Въ чертежѣ 16 два тѣла A, B касаются другъ друга въ точкѣ, будучи вырѣзаны изъ одного помощію трехъ сѣченій $a\,b\,c$, $d\,b\,e$, $f\,b\,g$.

Всякое тѣло съ окружнымъ пространствомъ находится въ поверхностномъ прикосновеніи. Сѣченіе, которымъ оно бываетъ отдѣлено, можно разсматривать то за одно, то за два обращательныя, то наконецъ за три главныя. Итакъ двѣ части въ тѣлѣ касаются либо поверхностно, либо линейно, либо въ точкѣ.

7. Если говоримъ о прикосновеніи только двухъ тѣлъ, слѣдовательно не принимаетъ въ разсужденіе части, которыя въ одномъ не касаются другаго, то два тѣла получаютъ названіе *поверхности*, *линіи*, *точки*, смотря потому, какого рода прикосновеніе между ними будетъ: поверхностное, линейное, либо въ точкѣ.

Такъ если два тѣла A, B (чер. 17) касаются поверхностно, находясь на двухъ сторонахъ сѣченія S, то получаютъ уже названіе поверхности S, какъ скоро дозволяется прикладывать и отбрасывать отъ A всякую часть a неприкосновенную къ B, отъ B всякую часть b неприкосновенную къ A. Отдѣленіе такихъ частей a, b должно происходить помощію поступательныхъ сѣченій S', S'' къ S, и можетъ продолжаться, покуда доходимъ въ двухъ тѣлахъ до тонкости бумажнаго листа или какъ далеко воображеніе въ состояніи слѣдовать еще за дѣленіемъ. Обыкновенно въ этомъ видѣ представляютъ себѣ поверхности, при чрезвычайной тонкости двухъ тѣлъ, устраняя тѣ части въ нихъ отъ нашего вниманія, которыя не нужно совсемъ принимать въ разсужденіе.

Если два тѣла A, B (чер. 18) касаются линейно, представляя собой части одного, вырѣзанныя двумя сѣченіями $a\,b, c\,d$; притомъ дозволяется отъ A отнимать всякую часть α неприкосновенную къ B, отъ B всякую часть β неприкосновенную къ A, то два тѣла A, B подъ такимъ условіемъ принимаютъ уже названіе линіи. Отдѣленіе частей α, β можетъ происходить въ обоихъ тѣлахъ помощію поступательныхъ сѣченій S, S' къ двумъ сѣченіямъ $a\,b, c\,d$ и доводить тѣла до тонкости волоса, или черты $e\,f$ на бумагѣ, или какъ только далеко воображеніемъ въ состояніи постигать это дѣленіе. Такъ обыкновенно представляютъ линіи, напередъ сдѣлавши непримѣтнымъ въ нихъ то, что недолжно здѣсь обращать на себя вниманіе.

Если два тѣла A, B (чер. 19) касаются въ точкѣ, слѣдовательно могутъ быть принимаемы за доли, вырѣзанныя въ одномъ помощію трехъ главныхъ сѣченій $a\,b\,c, d\,b\,e, f\,b\,g$; то A, B называются точкой въ такомъ случаѣ, когда дозволяется отъ A отнимать всякую часть α, β, которая не касается B; отъ B всякую часть γ неприкосновенную къ A. Отдѣленіе такихъ частей происходитъ въ обоихъ тѣлахъ посредствомъ сѣченій S, S', S'' поступательныхъ къ тремъ главнымъ $a\,b\,c, d\,b\,e, f\,b\,g$ и доводитъ наконецъ тѣло до малости песчинки, или до точки b отъ прикосновенія пера, откуда заимствовано самое названіе.

Прикосновеніе всякаго тѣла къ окружному пространству производитъ поверхность, которая *граничитъ* тѣло. Самое тѣло будетъ *внутренняя*, окружное пространство—*внѣшняя сторона* поверхности. Сѣченія въ тѣлѣ производятъ поверхности, которыя называются *внутреннимі*, различаясь тѣмъ самымъ отъ *наружной* въ прикосновеніи къ окружному пространству.

Всякая линія принадлежитъ къ безчисленному множеству поверхностей, производимыхъ обращательными сѣченіями (ст. 4). Это самое разумѣютъ говоря, что поверхности *пересѣкаются въ линіи*, которая *лежитъ* въ каждой изъ нихъ и раздѣляетъ ее на двѣ части—*стороны линіи*. Въ пересѣченіи наружной поверхности тѣла со внутренней, продолженной внѣ тѣла, происходитъ линія, которая *замыкаясь*, *граничитъ* внутреннюю поверхность, или другими словами: раздѣляетъ *внутреннюю сторону линіи* отъ *наружной* безпредѣльной въ окружномъ пространствѣ.

Точка принадлежитъ всѣмъ линіямъ, въ которыхъ три главныя сѣченія съ ихъ обращательными пересѣкаются. Каждую линію точка раздѣляетъ на двѣ части, которыя назначаютъ двѣ противоположныя стороны точки. Если линія замыкается, то надобно вынимать изъ нея часть, чтобы не смѣшивать болѣе двѣ соединенныя стороны.

8. Измѣреніе тѣлъ требуетъ раздѣлять ихъ на равныя части (ст. 2). Дѣленіе можетъ быть произведено помощію поступательныхъ сѣченій къ тремъ главнымъ; а потому тѣламъ принадлежатъ три протяженія, назначаемыя тремя рядами поступательныхъ сѣченій.

Если предположить, что мы въ состояніи такимъ образомъ всякое тѣло вымѣрять, какъ это будетъ доказано въ послѣдствіи, то къ каждому сѣченію можемъ провести поступательное, вырѣзывая между ними такую часть, которой величина можетъ быть уменьшаема какъ угодно сравнительно съ величиной всего тѣла. Съ другой стороны такое уменьшеніе въ величинѣ тѣла не перемѣняетъ поверхности, которую первое сѣченіе производитъ. Итакъ въ этомъ отношеніи величина поверхности должна почитаться нулемъ въ сравненіи съ величиною тѣла.

9. Измѣреніе поверхности, подобно какъ измѣреніе тѣлъ, требуетъ дѣленія на равныя части. Такое дѣленіе возможно, когда къ сѣченію, которое производитъ самую поверхность, присоединяемъ еще два, чтобы составить три главныя; потомъ къ этимъ двумъ прибавленнымъ ведемъ поступательныя. Здѣсь два ряда поступательныхъ сѣченій назначаютъ два протяженія, тогда какъ въ третьемъ отрѣзываются только части, которыя къ поверхности непринадлежатъ (ст. 7).

Если предположимъ, что поверхность такимъ образомъ всегда можетъ быть вымѣрена, также какъ и всякая часть ея между двумя поступательными сѣченіями, которыя назначаютъ одно протяженіе, то часть эту можемъ уменьшать произвольно въ сравненіи съ величиною всей поверхности. А какъ часть поверхности составляетъ сторону линіи, то въ этомъ отношеніи величина линіи будетъ нулемъ сравнительно съ поверхностью. Итакъ въ измѣреніи поверхностей можно слѣдовательно поступательныя сѣченія замѣнять ихъ обращательными: это значитъ уже, что надобно принимать только въ разсужденіе самыя линіи, проведенныя на поверхности, къ какимъ бы сѣченіямъ впрочемъ онѣ ни принадлежали и какъ бы сѣченія внѣ поверхности ни продолжались.

10. Измѣреніе линій требуетъ раздѣленія на части, которыя можно вырѣзывать однимъ только рядомъ поступательныхъ сѣченій, проведенныхъ къ третьему главному, принимая за два другія тѣ самыя, гдѣ линія находится. Дѣйствительно, поступательныя сѣченія къ двумъ послѣднимъ отрѣзываютъ только части непринадлежныя къ линіи (ст. 7).

Предполагая возможность найти величину всякой линіи, также всякой части на ней между двумя точками, потомъ допуская, что часть эта можетъ по произволу быть уменьшаема, должны принимать точку за нуль въ сравненіи съ величиною линіи, потому что всѣ такія части непринадлежатъ уже къ точкѣ.

11. Величину точки должно во всякомъ случаѣ почитать за нуль въ сравненіе съ величиною линій, потому что всѣ линіи, какъ бы малы ни были, могутъ уменьшаться, безъ всякаго вліянія на величину точки, которая такимъ линіямъ принадлежитъ (ст. 7).

Вообще какъ линіи такъ и точки, соединяясь между собою сѣченіями, къ которымъ онѣ принадлежатъ и которыя слѣдовательно всѣ будутъ уже другъ къ другу обращательными, не могутъ увеличиваться съ тѣмъ вмѣстѣ, какъ сѣченія, замѣняясь одно другимъ, не производятъ новыхъ линій и точекъ. Итакъ въ этомъ родѣ соединенія величина двухъ линій остается снова величиною большой изъ нихъ, или тойже въ случаѣ равенства; величина же точки всегда не перемѣняется. Это свойство линій и точекъ, отъ удваиванія не увеличиваться, между геометрическими величинами тоже, какое между числами принадлежитъ нулямъ.

12. Относительное положеніе двухъ точекъ называется *разстояніемъ* и назначается прикосновеніемъ двухъ тѣлъ, въ которыхъ допускаются всѣ тѣ перемѣны, какія не перемѣняютъ самыхъ точекъ; такъ что разстояніе почитается тоже, когда разность происходитъ отъ частей одного тѣла неприкосновенныхъ къ другому, или отъ различныхъ обращательныхъ сѣченій, къ которымъ точки равно принадлежатъ.

Разстояніе точекъ A, B (чер. 20) опредѣляется прикосновеніемъ тѣла $L\ M$ къ $A\ C\ B$ также, какъ и прикосновеніемъ тѣла $L\ M$ къ $A\ D\ B$, потому что здѣсь различіе въ тѣлахъ прикосновенныхъ составляютъ или тѣ части въ одномъ, которыя не касаются другаго; или такія части, которыхъ наружныя поверхности представляютъ обращательныя сѣченія, куда принадлежатъ двѣ точки.

ГЛАВА II.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ШАРА, СФЕРЫ, КРУГА, ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ ЛИНІИ.

13. *Шаръ* есть тѣло съ такой наружной поверхностію—*сферой*, которой всѣ точки въ равныхъ растояніяхъ (ст. 12) отъ одной внутри—*центра* шара или сферы. Это разстояніе центра до точекъ сферы называются *полупоперечникомъ* шара, также какъ и самой сферы.

Съ первымъ понятіемъ о тѣлахъ въ Геометріи принимаемъ уже центръ внутри шара, представляя себѣ вокругъ всякой точки сферу, какъ такую поверхность, которая граничитъ совершенно часть пространства въ полномъ ея прикосновеніи съ окружнымъ (ст. 2).

14. *Сферы съ равными полупоперечниками бываютъ одинаковы*, потому что сливаются во всѣхъ точкахъ, когда центръ у нихъ общій (ст. 2).

Шары съ равными полупоперечниками также одинаковы, одинъ наполняя мѣсто другаго (ст. 2).

Одинаковыя сферы вокругъ одного центра сливаются такимъ образомъ всякій разъ, какая бы точка въ одной, куда бы ни перепосилась на точку другой.

Часть сферы сливается съ самою сферой, куда бы здѣсь ни полагалась, покуда центръ у нихъ общій.

15. У сферъ вокругъ одного центра—*одноцентрныхъ*, но съ различными полупоперечниками, не можетъ быть общихъ точекъ (ст. 13). Ихъ шары слѣдовательно заключаются, одинъ внутри другаго.

Одноцентрныя сферы съ этимъ ихъ свойствомъ, представля поступательныя сѣченія въ пространствѣ (ст. 3), служатъ къ назначенію протяженія въ тѣлахъ, поверхностяхъ и линіяхъ.

Полупоперечники считаются тѣ *менѣе*, которые принадлежатъ одноцентрнымъ шарамъ, помѣщеннымъ внутри другихъ. Это подаетъ первое средство для сравненія различныхъ разстояній между собою.

Итакъ всякое тѣло необходимо раздѣляется на части помощію сферъ одноцентрныхъ.

16. *Центръ можетъ быть одинъ только внутри шара.*

Внутри сферы A (чер. 21) полагаемъ два центра a, b. Вокругъ одного, напримѣръ a, воображаемъ сферу B съ полупоперечникомъ r. На ней всѣ точки будутъ также центрами сферы A, потому что всякая точка c на сферѣ B, движеніемъ вокругъ a, переносится въ b, тогда какъ сфера A въ своемъ обращеніи по связи въ шару съ B, не перестаетъ сливаться сама съ собою (ст. 14); послѣ чего точкѣ c на мѣстѣ b, также какъ и на прежнемъ, должно принадлежать тоже свойство. Разстоянія всякой точки d на сферѣ A до b, c и до всѣхъ вообще точекъ на сферѣ B, дѣлаются такимъ образомъ равны. Это значило бы, что за центръ сферы B можно почитать точку d внѣ сферы (ст. 13).

Замѣтимъ еще, что шаръ подъ сферой B нельзя бы раздѣлять на части сферами вокругъ d слѣдовательно принимать за тѣло (ст. 15).

17. *Шаръ своей сферой не раздѣляется на части.*

Иначе между частями шара, раздѣленнаго своею сферой, нашлись бы такія, внутри которыхъ не заключается центръ (ст. 16) и которыя бы слѣдовательно не подраздѣлялись болѣе на части помощію сферъ, одноцентрныхъ съ шаромъ (ст. 15).

18. *Плоскость* называется такая поверхность, гдѣ пересѣкаются равныя сферы вокругъ двухъ постоянныхъ центровъ—*полюсовъ*.

Пусть A, B (чер. 22) полюсы, вокругъ которыхъ описаны сферы съ однимъ полупоперечникомъ $A\,C = B\,C$. Общія точки C, D, E принадлежатъ *кругу*, также какъ и цѣлой плоскости со всѣми другими точками F, G, H, общими сферамъ около тѣхъ же полюсовъ A, B съ какими нибудь полупоперечниками $A\,G = B\,G$.

Части круга, напримѣръ $C\,D, F\,G$, называются *дугами* круга.

19. *Плоскость, безконечно продолжаясь, раздѣляетъ пространство на двѣ части*, которыя составляютъ ея двѣ стороны, каждая заключая въ себѣ свой полюсъ.

Пусть A, B полюсы. О всякой третьей точкѣ C въ пространствѣ можемъ утверждать, что принадлежитъ самой плоскости, либо той, либо другой ея сторонѣ. Если разстояніемъ AC двухъ точекъ A, C произведенныя сферы вокругъ центровъ A, B не пересѣкаются, то C лежитъ внѣ плоскости на сторонѣ полюса A. Если же разстояніемъ AD, какой нибудь точки D до A, вокругъ A, B описанныя сферы проходятъ обѣ чрезъ D, то точка D лежитъ въ самой плоскости. Наконецъ когда разстояніе AE точки E въ пространствѣ, взятое за полупоперечникъ, описываетъ двѣ сферы вокругъ A, B, которыя входятъ одна въ другую, тогда точка E будетъ на сторонѣ полюса B.

Первый случай съ точкой C принадлежитъ разстоянію $AC < BC$; второй съ точкой D, когда $AD = BD$; третій съ E, когда $AE > BE$ (ст. 15). Въ первомъ случаѣ сфера, вокругъ B съ полупоперечникомъ BC, необходимо даетъ общую точку со сферой вокругъ A, которой полупоперечникъ AC, слѣдовательно пересѣкаетъ уже сферу вокругъ A съ полупоперечникомъ равнымъ BC. Второй случай не требуетъ поясненія. Въ случаѣ съ точкой E сфера вокругъ A съ полупоперечникъ BE совсѣмъ не пересѣкаетъ сферу вокругъ B съ полупоперечникомъ BE.

Когда такимъ образомъ всякая точка въ пространствѣ должна принадлежать къ плоскости, либо находиться на той, либо на другой ея сторонѣ, то самая плоскость можетъ продолжаться до безконечности, раздѣляя пространство на двѣ части.

20. *Плоскость покрываетъ сама себя какъ другой стороной, такъ и въ обращеніи вокругъ полюсовъ.*

Когда полюсы A, B (чер. 23) мѣняются мѣстами, то сферы вокругъ ихъ, переходя съ одной стороны плоскости на другую, каждая покроетъ ей равную; слѣдовательно плоскость въ этомъ новомъ положеніи сольется съ плоскостію въ прежнемъ.

Всякая точка C можетъ быть перенесена въ другую точку D на кругѣ происхожденія, покуда центръ A сохраняетъ свое мѣсто. Съ этимъ переносомъ соединено перемѣщеніе точекъ во всѣхъ сферахъ около A, но самыя сферы сливаются въ прежнемъ и новомъ ихъ положеніи; слѣдовательно съ плоскостію случается тоже.

21. *Черезъ двѣ точки въ пространствѣ можно провести плоскость.*

Двѣ точки A, B (чер. 24), чрезъ которыя требуется провести плоскость, принимаемъ сперва за полюсы плоскости, гдѣ пусть CED будетъ одинъ изъ кру-

говъ происхожденія. На немъ каждыя двѣ точки C, D находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ A и B, а потому когда точки C, D беремъ за полюсы, то новая плоскость пройдетъ уже чрезъ данныя двѣ точки A, B.

22. *Началомъ круговъ происхожденія назовемъ такую точку, которая можетъ быть одна только на плоскости и которой разстоянія до всѣхъ точекъ каждаго круга равны.* Эта точка называется *центромъ* каждаго; разстоянія точекъ круга до центра—*полупоперечники круга.*

Когда полюсы A, A' (чер. 25) мѣняются мѣстами, между тѣмъ какъ точка B на кругѣ происхожденія $BCB'C'$ сохраняетъ свое, то на томъ же кругѣ найдется другая точка B', которая также какъ и B, останется на прежнемъ мѣстѣ. Подобныя точки, каковы здѣсь B, B', будемъ называть *противоположными* на кругѣ. Чтобы для B найти противоположную точку B', стоитъ только взять отъ B въ обѣ стороны равныя дуги $B\,C, B\,F$, послѣ чего принимая концы C, F за полюсы, вести плоскость, которая пройдя чрезъ A, A' (ст. 21) пересѣчетъ $BCB'C'$ въ точкѣ B', потому что съ перестановкой A, A' мѣняются также C, F мѣстами, но плоскость и кругъ сливаясь сами съ собой, сохраняютъ общую точку B'. (ст. 20). Если теперь точки B, B' служатъ полюсами, то новая плоскость, проходя чрезъ A, A', разрѣжетъ кругъ $B\,C\,B'\,C'$ въ противоположныхъ точкахъ E, E'. Она съ плоскостію круга раздѣляетъ пространство на четыре части, которыя замѣняютъ одна другую съ обращеніемъ ихъ около E, E', такъ что когда A будетъ въ A', то наоборотъ A' въ A, тогда какъ общія точки двумъ плоскостямъ остаются на своемъ мѣстѣ. Это значитъ, что каждыя двѣ части накрестъ касаются въ линіи $E\,D\,E'$ (ст. 4 и 7), которую называютъ *поперечникомъ* круга $B\,C\,B'\,C'$. Обращая всѣ сферы вокругъ ихъ центровъ A, A', не нарушая впрочемъ связи между ними въ пересѣченіи, даемъ поперечнику $E\,D\,E'$ новое положеніе CDC', такъ что прежнія точки E, E', B, B' теперь будутъ въ C, C', F, F', тогда какъ найдется точка D, которая мѣста своего не перемѣнитъ. Еслибъ E, E' принимались за полюсы, то плоскость прошла бы не только чрезъ A, A', но также чрезъ B, B'. Подобнымъ образомъ если бы C, C' были полюсы, то плоскость прошла бы чрезъ A, A' и чрезъ G, G' на кругѣ. Послѣ такого замѣчанія не трудно видѣть, что всѣ дуги $C\,E, C'\,E', B\,G, B'\,G'$ равны между собой, а слѣдовательно съ обращеніемъ плоскости круга на другую сторону и съ положеніемъ линіи $E\,E'$ на $C\,C$, должна $C\,C'$ лежать на $E\,E'$, будетъ ли E въ C или въ C'. Отсюда заключаемъ, что $C\,D = E\,D = C'\,D = E'\,D$. Такъ какъ линіи $D\,E\,D'$ дано новое положеніе CDC' произвольное, то D, на половинѣ поперечника EE',

должна быть единственной точкой, откуда разстоянія до всѣхъ точекъ круга равны. Впрочемъ пересѣченіе двухъ поперечниковъ въ одной только точкѣ не трудно понять, когда замѣтимъ къ тому, что здѣсь три плоскости раздѣляютъ пространство на восемь частей, изъ которыхъ каждыя двѣ на крестъ и взятыя на противоположныхъ сторонахъ въ отношеніи ко всѣмъ тремъ плоскостямъ, заступаютъ одна мѣсто другой, не теряя своей связи; слѣдовательно своимъ прикосновеніемъ представляютъ единственную точку (ст. 5 и 7).

Разстояніе центра до точекъ круга называютъ *полупоперечникомъ*, которой слѣдовательно составляетъ половину поперечника.

Поперечникъ раздѣляетъ кругъ на двѣ одинаковыя части.

Кругамъ принадлежатъ тѣже свойства на плоскости, какія сферамъ въ пространствѣ. Напримѣръ равенство полупоперечниковъ дѣлаетъ круги одинаковыми; дуги круга сливаются, когда центръ у нихъ общій.

24. *Для круга можетъ быть одинъ только центръ на плоскости.*

Внѣ круга, либо на самомъ кругѣ нельзя допускать центра, котораго бы разстоянія до всѣхъ точекъ круга были равны. Иначе сфера вокругъ такого центра не могла бы раздѣлять того шара на части, которому начало круготь на плоскости служитъ центромъ и котораго поверхность пересѣкаетъ плоскость въ данномъ кругѣ (ст. 15). Если же кромѣ начала A допускаемъ другой центръ B внутри круга (чер. 26), то сфера около A съ полупоперечникомъ AB пересѣчетъ плоскость въ кругѣ BC (ст. 23), гдѣ точка B можетъ быть перенесена всюду на сферѣ съ полупоперечникомъ AB, также какъ точка D на кругѣ, происхожденія DE мѣняется мѣстомъ со всякой другой на сферѣ около начала A съ полупоперечникомъ AD. Итакъ два центра A, B были бы вмѣстѣ двумя центрами той самой сферы, которая пересѣкаетъ плоскость въ данномъ на ней кругѣ; тогда какъ невозможность этаго была доказана (ст. 16).

25. *Прямой* называется та линія, которая между двухъ точекъ покрываетъ сама себя во всѣхъ положеніяхъ. Это свойство принадлежитъ поперечнику круга.

Пусть ACA' (чер. 27) поперечникъ круга $ABA'B'$; пусть C центръ и слѣдовательно начало круговъ той плоскости, которая проходитъ чрезъ C и гдѣ лежитъ кругъ $ABA'B'$ (ст. 22 и 24). Около C воображаемъ сферу съ тѣмъ же полупоперечникомъ AC, который принадлежитъ кругу. Новая плоскость съ ея полюсами A, A' пересѣчетъ сферу въ кругѣ $BDB'D'$, такъ что теперь у двухъ круговъ будутъ общія точки B, B', въ каждомъ противоположныя (ст. 20), потомъ общій и поперечникъ BCB'.

Точки каковы A съ A', B съ B', противоположныя на большомъ кругѣ, называются *противоположными полюсами сферы*, гдѣ кругъ лежитъ. Всякая точка на сферѣ можетъ слѣдовательно почитаться за полюсъ, которому соотвѣтствуетъ другой противоположный. Точки A, A' называются также *противоположными полюсами* того большаго круга $B\,D\,B'\,D'$, котораго плоскость происходитъ отъ пересѣченія равныхъ сферъ около A, A', и который лежитъ вмѣстѣ съ A, A' на той же сферѣ.

Точки B, B' слѣдовательно полюсы для круга $A\,D\,A'\,B'$, который проходитъ чрезъ A, A', пересѣкая кругъ $B\,D\,B'\,D'$ въ полюсахъ D, D' круга $A\,B\,A'\,B'$.

Здѣсь плоскости трехъ круговъ представляютъ три главныя сѣченія (ст. 5), раздѣляя шаръ подъ ихъ сферой на восемь частей, изъ которыхъ каждыя двѣ противоположныя накрестъ, касаются въ общей точкѣ C (ст. 22). Съ обращеніемъ круга $A\,B\,A'\,B'$ на своемъ поперечникѣ $A\,A'$, точки B, B' пробѣгаютъ по кругу $B\,D\,B'\,D'$ такъ, что когда $A\,B$ находится въ части $A\,B\,D$ сферы, напримѣръ когда B придетъ въ E, то дуга $A\,B'$ будетъ въ другой части $A\,B\,D'$, точка B' гдѣ нибудь въ E'. При каждомъ изъ этихъ новыхъ положеній круга нельзя допускать отклоненія въ точкахъ на полупоперечникѣ $A\,C$, потому что полупоперечникъ долженъ себя покрывать, когда съ продолженіемъ обращенія наконецъ E, E' перемѣнятся мѣстами; между тѣмъ какъ отклонившіяся точки въ одну сторону необходимо пришли бы въ другую часть шара.

Прямая $A\,A'$ покрываетъ опять сама себя во всѣхъ положеніяхъ, послѣ того какъ ея концы A, A' перемѣнились мѣстами, потому что съ этой перемѣной всѣ круги напередъ могутъ сливаться, также какъ и линіи въ пересѣченіи плоскостей.

Замѣтимъ, что здѣсь въ пересѣченіи трехъ плоскостей происходятъ прямыя линіи, какъ $A\,A'$, такъ $B\,B'$, $D\,D'$, которыя будучи поперечниками, раздѣляютъ круги на двѣ одинаковыя половины.

Прямая вмѣстѣ съ плоскостями, въ пересѣченіи которыхъ лежитъ, продолжается въ обѣ стороны до безконечности, раздѣляя такимъ образомъ каждую плоскость на двѣ части. Находясь внутри тѣла, ограниченаго со всѣхъ сторонъ поверхностію, либо внутри плоскости, окруженной замкнутою линіей, она пересѣкаетъ покрайней мѣрѣ въ двухъ точкахъ наружную поверхность и линію, входя внутрь и выходя вонъ.

26. *На прямой, которая соединяетъ два полюса, могутъ быть въ равныхъ разстояніяхъ отъ начала круговъ взяты двѣ точки за новые полюсы тойже плоскости.*

Двѣ точки A, A' (чер. 28) принимая за полюсы, полагаемъ что на плоскости начало B, одинъ изъ кругомъ $C\,D\,C'\,D'$ съ противоположнымъ точками C и C', D и D' (ст. 22), вокругъ которыхъ равныя сферы дадутъ плоскость съ прямой линіей $A\,B$ A$'$ въ пересѣченіи (ст. 25). Прямая $A\,A'$ съ распространеніемъ плоскостей продолжается безпредѣльно, такъ что на ней могутъ быть взяты двѣ точки E, E' на произвольныхъ и равныхъ разстояніяхъ $B\,E$, $B\,E'$ отъ начала, ближе либо далѣе точекъ A, A' отъ B. Съ обращеніемъ одной изъ двухъ плоскостей, напримѣръ $E\,C\,E'\,C'$, на общей имъ линіи $E\,E'$, точка C пробѣгаетъ весь кругъ $C\,D\,C'\,D'$, котораго слѣдовательно всѣ точки находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ E, также какъ отъ E', потому что съ оборотомъ плоскости на другую сторону полюсъ A падаетъ въ A', также какъ E въ E'. Сферы вокругъ E, E', когда полупоперечникъ $E\,C$, должны слѣдовательно пересѣкаться въ кругѣ $C\,D\,C'\,D'$. Тоже надобно сказать о каждомъ кругѣ происхожденія, которые такимъ образомъ всѣ, вмѣстѣ съ плоскостію, происходятъ отъ пересѣченія равныхъ сферъ вокругъ E, E'.

27. *Прямыя сливаются, какъ скоро проходятъ чрезъ двѣ точки.*

До сихъ поръ еще различалась на прямыхъ точка, которая въ плоскости служитъ началомъ круговъ. Покажемъ, что теперь это различіе болѣе не нужно. Около произвольной точки C (чер. 29) на прямой воображаемъ сферу съ какимъ бы то ни было полупоперечникомъ $C\,B$. Прямая, продолжаясь отъ центра C въ обѣ стороны, должна пересѣкать сферу по крайней мѣрѣ въ двухъ точкахъ B, B' (ст. 25), которыя взявъ за полюсы, производимъ плоскость и въ пересѣченіи съ ней на сферѣ кругъ $D\,E\,D'\,E'$, гдѣ пусть D съ D', E съ E' противоположныя точки. Наконецъ двѣ плоскости, которымъ D съ D', E съ E' служатъ полюсами, дадутъ въ пересѣченіи прямую, также какъ и прежняя, проведенную чрезъ три точки B, C, B'. Пусть теперь $B\,D\,B'\,D'$ большой кругъ на сферѣ, котораго поперечникомъ будетъ вновь произведенная прямая. Если далѣе предположить, что между B, C, или вообще между какихъ нибудь точекъ на полупоперечникѣ $B\,C$, часть первой прямой отлоняется отъ него, выходя вонъ изъ плоскости круга, либо къ одной сторонѣ на плоскости, то въ томъ и другомъ случаѣ съ обращеніемъ круга $B\,D\,B'\,D'$ на своемъ поперечникѣ $B\,B'$, такая часть первой переходила бы съ одной стороны плоскости на другую, либо съ одной стороны поперечника BB' на противоположную, тогда какъ эта прямая во всѣхъ частяхъ своихъ должна бы сама себя покрывать (ст. 25). Когда черезъ двѣ точки A, B (чер. 30) проходитъ прямая, то продолживъ ее въ одну сторону, напримѣръ за точку B, можемъ

сдѣлать продолженіе $B\,A' = B\,A$, потомъ принимать концы A, A' за полюсы плоскости, гдѣ начало круговъ будетъ слѣдовательно B. Послѣ чего прямая $A\,A'$, какъ и всѣ другія проведенныя между точками A, B, должны быть тѣже, какія произойдутъ въ пересѣченіи плоскостей, которыхъ полюсы помѣщены въ противоположныхъ точкахъ на кругѣ происхожденія первой плоскости. Но всѣ такія прямыя сливаются, какъ уже видѣли выше.

Итакъ *двѣ прямыя линіи либо сливаются, либо пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Прямыя служатъ къ измѣренію разстояній и вообще всѣхъ другихъ линій, какъ увидимъ послѣ.

Прямая можетъ быть продолжаема до безконечности, когда накладывается сама на себя частію, подвигаясь остальною впередъ.

28. *Всякая точка внѣ плоскости можетъ почитаться за полюсъ, которому другой отвѣчаетъ на противоположной сторонѣ.*

Пусть A, A' (чер. 31) полюсы, B начало круговъ на плоскости, CDC' одинъ изъ круговъ на ней отъ пересѣченія равныхъ сферъ около $A\,A'$. Беремъ гдѣ нибудь внѣ плоскости точку E, вокругъ которой всякая сфера должна пересѣкать кругъ $D\,C\,D'\,C'$, какъ скоро входитъ внутрь его, въ двухъ точкахъ $E\,E'$. Съ перемѣщеніемъ полюсовъ A, A' одинъ въ другой и такъ чтобы точка C падала въ C', слѣдовательно наоборотъ C' въ C, точка E будетъ гдѣ нибудь въ E', отчего произойдутъ равныя разстоянія $E\,C = E\,C' = E'\,C = E'\,C'$, тогда какъ поперечникъ $D\,B\,D'$ круга не перемѣнитъ своего мѣста. Если теперь воображаемъ около B сферу съ полупоперечникомъ $B\,D = B\,D'$, на которой для простоты пусть A, A' полюсы круга $D\,C\,D'\,C'$ (ст. 26), то съ обращеніемъ этой сферы на поперечникѣ $D\,B\,D'$ вмѣстѣ съ сферами вокругъ E, E', общія точки первой съ послѣдними должны пробѣгать по линіямъ ихъ пересѣченія, одна другой заступая мѣсто. Съ полуоборотомъ сферъ каждая точка F на половинѣ круга $D\,C\,F\,D'$ займетъ соотвѣтственное мѣсто F' на другой половинѣ круга $D\,C'\,F'\,D'$, подобно прежнимъ точкамъ C, C', кромѣ крайнихъ D, D' на поперечникѣ, которыя мѣста своего не перемѣняютъ. Отсюда надобно заключить, что всѣ точки C, F, C', F' круга, также какъ на немъ и концы D, D' поперечника, принадлежатъ пересѣченію равныхъ сферъ вокругъ точекъ E, E', которыя слѣдовательно могутъ почитаться за полюсы тойже плоскости круга $D\,C\,D'\,C'$.

29. *Всякую точку на плоскости можно принимать за начало круговъ.*

Произвольно взятую точку A (чер. 32) на плоскости соединяемъ прямой AB съ началомъ ея круговъ B. Съ полупоперечникомъ $AC = AC'$ также произвольнымъ, воображаемъ около A сферу L, которая пусть встрѣчаетъ прямую BAC въ точкахъ C, C'. Равныя сферы вокругъ C, C' произведутъ въ пересѣченіи своемъ плоскость, которая раздѣляетъ первую сферу, съ центромъ A, въ кругѣ $DED'E'$, гдѣ точки E, E' общія съ данной плоскостью, будутъ противоположными на кругѣ, потому что полоборота сферы на линіи BC заставляетъ E, E' мѣняться мѣстами. Изъ точекъ E, E' сферы съ равными полупоперечниками произведутъ еще плоскость, которая пересѣчетъ сферу L въ кругѣ $DCD'C'$, а кругъ $DED'E'$ въ противоположныхъ точкахъ D, D', въ чемъ увѣриться можемъ обращая сферу L покуда данная плоскость покроетъ сама себя другой стороной. Итакъ D, D' будутъ полюсы данной плоскости (ст. 28) тогда какъ плоскости круговъ $DCD'C'$ и $DED'E'$ пересѣкаются въ прямой DAD', проведенной отъ D къ D' черезъ точку A, которая слѣдовательно должна быть началомъ круговъ на данной плоскости.

30. *Пересѣченіе сферы съ плоскостію даетъ кругъ.*

Если плоскость проходитъ черезъ центръ сферы, то центръ этотъ можно принимать за начало круговъ происхожденія на плоскости (ст. 29), а слѣдовательно пересѣченіе сферы съ плоскостію будетъ одинъ изъ такихъ круговъ (ст. 23).

Если плоскость не проходитъ черезъ центръ сферы, то можемъ этотъ центръ почитать за полюсъ самой плоскости, представляя себѣ вмѣстѣ другой на противоположной сторонѣ (ст. 28). Тогда пересѣченіе данной сферы съ равной около другаго полюса будетъ линіей общей какъ двумъ сферамъ, такъ и каждой сферѣ съ плоскостію, слѣдовательно будетъ кругъ (ст. 18).

Поперечникъ этого круга находимъ, когда соединяемъ прямой AB (чер. 33) его точки A, B на плоскости, проведенной черезъ полюсы C, D данной плоскости (ст. 25). Какъ поперечникъ AB, такъ и самый кругъ будутъ слѣдовательно тѣже, когда за центръ сферы вмѣсто C беремъ какую нибудь точку E на линіи CD или на продолженіи этой прямой, и когда полупоперечникомъ сферы возьмется разстояніе $AE = BE$ точки E отъ концевъ A, B линіи AB.

31. *Въ пересѣченіи двухъ плоскостей происходитъ прямая линія.*

Если плоскости AB, CD (чер. 34) пересѣкаются, то сфера вокругъ E какой нибудь изъ общихъ точекъ двумъ плоскостямъ, съ произвольнымъ полупоперечникомъ $EF = EF'$, вырѣжетъ изъ каждой плоскости кругъ, котораго центръ

E (ст. 30). Пересѣченіе двухъ этихъ круговъ должно давать прямую линію (ст. 25). Увеличивая полупоперечникъ $E F$, тоже заключеніе можемъ распространить на всѣ точки пересѣченія двухъ плоскостей.

32. *Прямая лежитъ вся въ плоскости, какъ скоро проходитъ на ней черезъ двѣ точки.*

Вокругъ двухъ точекъ A, B на плоскости $C D$ (чер. 35) равныя сферы пересѣкаются въ кругѣ, который черезъ данную плоскость пройдетъ въ двухъ противоположныхъ своихъ точкахъ E, E' (ст. 25). Плоскость, которой E, E' полюсы, должна не только заключать въ себѣ концы A, B прямой $A B$, но даже разрѣзывать плоскость $C D$ въ этой же линіи, потому что двухъ различныхъ прямыхъ не можетъ быть между двухъ точекъ A, B (ст. 27).

Всякій разъ слѣдовательно *прямая, проходя черезъ центръ, раздѣляетъ кругъ пополамъ.*

33. *Черезъ три точки не въ прямой линіи можно провести плоскость, и притомъ одну только.*

Изъ трехъ точекъ одну, напримѣръ A (чер. 36) съ двумя другими B, C соединяемъ прямыми линіями $A B, A C$, которыя можемъ продолжать по произволу Въ случаѣ неравенства линій $A B$, AC и предполагая $AB<AC$, дѣлаемъ $AD=AB$. Изъ точекъ B, D какъ полюсовъ, производимъ плоскость, которая пройдетъ черезъ A, потому что $A B = A D$. Такую плоскость прямая $B D$ пересѣчетъ въ началѣ Q круговъ, около котораго сфера съ полупоперечникомъ $B Q = Q D$ проходитъ черезъ B, D и пересѣкается плоскостію въ кругѣ $E F E' F'$ (ст. 30), гдѣ пусть E, E' противоположныя точки на прямой, проведенной изъ A черезъ начало Q. Когда беремъ теперь E, E' за полюсы, то плоскость пройдетъ черезъ Q и пересѣчетъ кругъ $F E F' E'$ въ противоположныхъ точкахъ F, F' (ст. 25). Наконецъ эти послѣднія точки будутъ полюсами той плоскости, гдѣ лежатъ уже всѣ три точки A, B, C, потому что $B F=F D=F' B=F' D'$, а точка C лежитъ на продолженіи $A D$.

Другой плоскости чрезъ A, B, C провести нельзя, потому что двѣ прямыя $B D$, $D A$ должно бы разсматривать въ такомъ случаѣ какъ одну въ пересѣченіи двухъ плоскостей (ст. 31), слѣдовательно предполагать D и C на продолженіи $A B$.

Отсюда заключаемъ еще, что *двѣ линіи, выходя изъ одной точки и несоставляя одной прямой, должны лежать въ извѣстной плоскости.*

Еще можемъ замѣтить, что *двѣ плоскости сливаются, когда лежатъ одна на другой тремя точками не въ прямой линіи.*

Такъ плоскость продолжаемъ до безконечности, подобно прямой линіи (ст. 29), когда полагаемъ саму на себя частію и выдаваясь вонъ остальною.

34. *Двѣ сферы либо совсѣмъ не встрѣчаются, либо касаются другъ друга въ одной точкѣ, либо пересѣкаются въ кругъ; смотря потому, сумма полупоперечниковъ менѣе, равна, или болѣе разстоянія между центрами. Въ послѣднемъ случаѣ надобно еще, чтобы разность полупоперечниковъ была менѣе разстоянія между центрами.*

Пусть у двухъ сферъ около центровъ A, B (чер. 37) полупоперечники $A\,C$, $B\,C$ таковы, что составляютъ вмѣстѣ разстояніе $A\,B$ центровъ другъ отъ друга. Воображаемъ, черезъ точку C на прямой $A\,B$, плоскость $D\,E$, которой полюсы на равныхъ разстояніяхъ отъ C. Около точки C и всякой другой общей двумъ сферамъ, если бы другая существовала, должны допускать возможность обращенія какъ той, такъ и другой сферы на своихъ поперечникахъ $C\,F$, $C\,G$, проведенныхъ отъ точки прикосновенія C. Тоже движеніе сферъ должно быть возможнымъ въ ихъ соединеніи съ плоскостію $D\,E$, какъ для каждой порознь, такъ обѣихъ сферъ въ связи съ плоскостію (25). Но какъ различныхъ прямыхъ нельзя провести между двухъ точекъ G, F (ст. 26), то двѣ сферы касаются необходимо въ одной только точкѣ C.

Съ оставленіемъ центровъ A, B на своихъ мѣстахъ, и съ уменьшеніемъ одного полупоперечника, напримѣръ $A\,C$, новая сфера помѣщается внутри прежней, а слѣдовательно не касается ни плоскости $D\,E$, ни сферы за такой плоскостію. Это значитъ, что всякій разъ двѣ сферы не встрѣчаются, когда сумма полупоперечниковъ менѣе разстоянія центровъ.

Съ увеличеніемъ $A\,C$, напримѣръ до точки H, но не достигая до точки F, производимъ пересѣченіе двухъ сферъ, которыя частію только входятъ одна внутрь другой. Всякая теперь плоскость, проведенная черезъ центры A, B, даетъ двѣ точки L, L' общія двумъ сферамъ, и которыя принимая за полюсы, производимъ плоскость, гдѣ лежатъ точки A, B и слѣдовательно вся прямая $A\,B$ (ст. 32). Послѣ чего въ этой же плоскости тотъ кругъ происхожденія, къ которому принадлежитъ точка B, пересѣкаетъ линію $G\,F$ гдѣ нибудь въ точкѣ B', такъ что $B\,L = B\,L' = B'\,L = B'\,L'$. Итакъ плоскость съ полюсами B, B' заключаетъ въ себѣ точки L, L', давая слѣдовательно въ пересѣченіи тотъ же кругъ, какъ со сферой около A при полупоперечникѣ $A\,H$, такъ со сферой около B при полупоперечникѣ $B\,C$.

Легко видѣть, что пересѣченіе сферъ въ кругѣ продолжается, покуда разность полупоперечниковъ менѣе разстоянія центровъ между собою. Когдажъ эта разность дѣлается нулемъ, то сферы касаются только въ одной точкѣ; наконецъ далѣе съ возрастаніемъ разности заключаются сферы, меньшая въ большой, уже ни гдѣ не встрѣчаясь. Дѣйствительно, когда A,B центры сферъ (чер. 38), AF одинъ, BF другой полупоперечникъ, то прикосновеніе должно быть въ точкѣ F, гдѣ будетъ оно также съ плоскостію, произведенной изъ полюса B съ противоположнымъ B' на разстояніяхъ $BF = B'F$ отъ конца F и на продолженіи линіи BF за F (ст. 27). Потомъ вокругъ центра A съ увеличеніемъ полупоперечника AF будутъ уже прикладываться къ шару, подъ прежней сферой, такія части, которыя черезъ одну не касаются, слѣдовательно прерываютъ и сообщеніе сферъ вокругъ центровъ A, B.

35. Все что сказано было до сихъ поръ о сферахъ и плоскостяхъ, примѣняется къ кругамъ и прямымъ линіямъ, потому что плоскость, проведенная черезъ центры, пересѣкаетъ сферы въ кругахъ, плоскости въ прямыхъ линіяхъ, а круги въ точкахъ. Такъ прямую линію можно представлять себѣ пересѣченіемъ равныхъ круговъ около двухъ точекъ—*полюсовъ прямой линіи.* Всякая точка на плоскости можетъ почитаться за полюсъ, которому на другой сторонѣ прямой линіи отвѣчаетъ *противоположный.*

Два круга на плоскости либо совсѣмъ не встрѣчаются, либо касаются въ одной, либо пересѣкаются въ двухъ точкахъ, смотря потому, сумма полупоперечниковъ менѣе, равна, или болѣе разстоянія между центрами. Въ послѣднемъ случаѣ предполагается къ тому, что разность полупоперечниковъ менѣе разстоянія центровъ.

36. Плоскость, ограниченная замкнутой линіей, называется вообще *фигурой*, а пограничная линіи—о*кружностію.*

Подъ кругомъ иногда разумѣютъ плоскость, иногда линію, какъ до сихъ поръ это было здѣсь. Чтобы не смѣшивать одно названіе съ другимъ, часто говорятъ окружность круга для различія съ плоскостію круга.

Фигура, которой окружность составлена изъ однѣхъ прямыхъ, называется *прямолинейный многоугольникъ*, а прямыя линіи—*бока* или *стороны.* По числу боковъ многоугольники бываютъ: *треугольникъ*, *четыреугольникъ* и проч.

Фигура называется *отрѣзкомъ круга*, когда граничится дугой и прямой линіей—*хордой* или *тетивой*; *вырѣзкомъ круга*—когда двумя полупоперечниками съ дугой.

Дуги большихъ круговъ на сферѣ составляютъ *сферической многоугольникъ*, ограничивая часть сферы. По числу дугъ—*боковъ* или *сторонъ*—многоугольники бываютъ: *треугольникъ*, *четыреугольникъ* и т. д. подобно прямолинейнымъ. Съ двумя только боками сферическому многоугольнику даютъ названіе *вырѣзка сферы*; а подъ отрѣзкомъ разумѣютъ часть на ней, ограниченную кругомъ.

Часть шара, отдѣленную плоскостію, называютъ *отрѣзкомъ шара*, которую слѣдовательно граничитъ отрѣзокъ сферы и плоскость круга.

Точки гдѣ смыкаются бока многоугольниковъ, прямолинейныхъ или сферическихъ, будемъ называть—*остреями*.

Еще надобно замѣтить названіе *равнобедренныхъ* и *равносторонних* треугольниковъ, когда два, либо всѣ три бока равны. Равные бока называются *бедры*, третій бокъ—*основаніе*, противъ него острее—*вершина*.

Треугольникъ выражаютъ буквами близъ остреевъ и знакомъ △ передъ ними.

ГЛАВА III.

ИЗМѢРЕНІЕ ПРЯМЫХЪ ЛИНІЙ, ЛИНЕЙНЫХЪ И ПЛОСКОСТНЫХЪ УГЛОВЪ.

37. Начиная говорить о величинѣ прямыхъ линій, напередъ припомнимъ (ст. 2), что въ Геометріи мѣрить, значитъ наполнять измѣряемое мѣрой и частями мѣры. Въ случаѣ невозможности мѣрить строго *надобно, чтобы части мѣры могли быть уменьшаемы произвольно; затѣмъ дозволяется почитать остатокъ въ измѣряемомъ менѣе той части, внутри которой онъ весь помѣщенъ, и потому пренебрегать.* Безъ этого положенія, мѣрить и находитъ такимъ образомъ величину всего, было бы не возможно въ Геометріи.

38. Величина прямыхъ линій опредѣляется сравненіемъ съ одной изъ нихъ, взятой за единицу или мѣру. Она выражается дробью, которой знаменатель показываетъ какія, а числитель, сколько такихъ частей берется въ единицѣ. Дробь называютъ здѣсь также *содержаніемъ* двухъ линій—измѣряемой къ мѣрѣ.

Если предположить, что величина линіи a, сравнительно съ другой b, выражается содержаніемъ двухъ цѣлыхъ чиселъ n,m, то взявъ m разъ a должны получить n разъ b. Отсюда видно, на чемъ отыскиваніе чиселъ n, m можетъ быть основано. Именно, линію a должно повторять, покуда въ составной прямой, будетъ другая b укладываться нѣсколько разъ безъ остатка. Числа повтореній той и другой линіи будутъ m, n.

Можетъ однакожъ случиться, что сколько бы разъ ни повторялось a, не будетъ выходить кратной линіи b; даже въ правѣ думать, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ и всегда должно такъ продолжаться. Съ другой стороны какъ невозможно, такъ и безполезно было бы считать такія доли въ линіи, которыя для нашихъ чувствъ изчезаютъ. Итакъ съ выборомъ единицы должно назначать и то, какія

въ ней части за малостію дозволяется пренебрегать. Пусть напримѣръ b принимается за мѣру, гдѣ могутъ быть отброшены части менѣе $m^{ой}$. Тогда стоитъ взять линію въ m разъ болѣе b, на нее полагать всякую a, покуда число n повтореній этой послѣдней дастъ остатокъ менѣе b, которымъ пренебрегая получимъ $\frac{n}{m}$ содержаніе двухъ линій, a къ b.

Отъ произвола зависитъ впрочемъ, какую часть линіи должны пренебрегать, слѣдовательно *точность измѣренія*, также какъ и точность вычисленія можетъ быть доведена до какой угодно степени; по крайней мѣрѣ въ тѣхъ границахъ, которыя полагаетъ недостатокъ нашихъ чувствъ и которыя предоставляется расширять искуству съ непрестаннымъ усовершенствованіемъ его способовъ.

Составленіе линій повтореніемъ одной можетъ представлять иногда неудобство въ исполненіи. Въ такомъ случаѣ стоитъ класть меньшую линію на большую, потомъ остатокъ на меньшую, новый остатокъ на прежній, и такъ далѣе, покуда совсѣмъ не будетъ остатка, либо чрезвычайно малый, который бы дозволялось пренебрегать. Теперь предполагая, что содержаніе меньшой линіи къ большой будетъ дробь съ числителемъ n и знаменателемъ $m > n$ цѣлыми, должны получить тѣже числа повтореній одной линіи въ другой по порядку, какія вышли бы въ частныхъ при дѣленіи m на n, потомъ всякій разъ остатка на прежняго дѣлителя. Итакъ означая числа повтореній, о которыхъ говоримъ, по порядку $p, p', p''..$, получимъ содержаніе меньшой линіи къ большой:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{p + \dfrac{1}{p' + \dfrac{1}{p'' + ..}}}$$

Если теперь въ двухъ послѣднихъ приближенныхъ дробяхъ къ $\frac{n}{m}$ знаменатели Z, Z', то значеніе всей непрерывной будетъ разниться съ содержаніемъ $\frac{n}{m}$ менѣе нежели дробь

$$\frac{1}{Z\,Z'}$$

Эту разность, еслибъ она сама не уничтожалась съ измѣреніемъ безъ остатка, можемъ такимъ образомъ уменьшать вмѣстѣ съ продолженіемъ непрерывной дроби, гдѣ прибавляется всегда новый знаменатель съ каждымъ новымъ измѣреніемъ посредствомъ остатка.

Замѣтимъ однакожъ, что *строгость* измѣренія составляютъ его *точность* и *вѣрность*. Чѣмъ оно болѣе продолжается, тѣмъ дѣлается точнѣе; но съ другой стороны, чѣмъ болѣе повторяется неизбѣжныхъ ошибокъ, тѣмъ вѣрность его становится менѣе. Въ двухъ этихъ отношеніяхъ должно судить о всякомъ способѣ который служитъ къ измѣренію на самомъ дѣлѣ. Преимущество каждаго будетъ слѣдовательно зависѣть отъ того, до какой степени вознаграждаетъ онъ недостатокъ чувствъ, и какъ велико бываетъ повтореніе въ немъ ошибокъ. Но какой бы способъ измѣренія ни былъ придуманъ, всегда существуетъ предѣлъ, за который строгость уже не переходитъ. Въ теоріи предполагаютъ эту границу необходимой, но вмѣстѣ неопредѣленной и даже произвольной, а потому соображаясь съ дѣйствительнымъ измѣреніемъ, почитаютъ всякую Геометрическую величину за содержаніе двухъ цѣлыхъ чиселъ; но не прежде, какъ уже способъ измѣренія будетъ извѣстенъ.

39. Дуги сливаются съ ихъ кругомъ (ст. 22), вырѣзки сферы съ полной сферой (ст. 14). Это свойство дугъ въ отношеніи къ ихъ кругамъ, частей сферы къ полнымъ сферамъ, такое же какъ и прямыхъ линій въ отношеніи другъ къ другу, представляютъ одинакій способъ измѣренія.

Всякая дуга на кругѣ, также какъ и часть на сферѣ, могутъ быть приняты за единицу. Чтобъ оставить этотъ выборъ произвольнымъ, будемъ означать π половину круга въ измѣреніи дугъ и половину сферы въ измѣреніи частей ея. Число π принимаютъ иногда 200, но чаще 180, слѣдуя новому *десятичному*, либо старому *шестидесятичному* дѣленію. Въ томъ и другомъ случаѣ единицу дугъ на кругѣ, или вырѣзковъ на сферѣ называютъ *градусъ*, который раздѣляютъ по старому на 60 *минутъ*, минуту на 60 *секундъ*; по новому на 100 минутъ, минуту на 100 секундъ. Съ новымъ дѣленіемъ дуги выражаются слѣдовательно десятичными дробями. Однакожъ эта выгода, собственно вычисленія, не такъ велика, чтобы для нея должно было жертвовать удобностію стараго дѣленія. Иногда подъ π разумѣютъ число, которое можно находить только приближеніемъ и которое весьма мало разнится съ дробью $\frac{355}{113}$.

Величина дуги или части сферы, выраженная въ градусахъ и доляхъ градуса, даже вообще по сравненію съ тѣмъ же кругомъ или съ тою же сферой, называется *уголъ*, который бываетъ *прямой*, когда равенъ $\frac{1}{2}\pi$, *острый* $< \frac{1}{2}\pi$, *тупой* $> \frac{1}{2}\pi$ и $< \pi$.

Углы называются *линейными*, когда выражаютъ величину дуги на кругѣ; *плоскостными*—величину вырѣзка на сферѣ; другаго рода части на сферѣ даютъ

тѣлесные углы. Въ линейныхъ углахъ прямыя, проведенныя изъ центра къ концами дуги, а въ плоскостныхъ и тѣлесныхъ плоскости, которыя выходятъ изъ центра и вырѣзываютъ часть сферы, называются *боками* угла.

40. *Линейный уголъ не зависитъ отъ величины полупоперечника въ кругѣ, но служитъ только къ опредѣленію взаимнаго положенія двухъ прямыхъ.*

Взаимное положеніе двухъ прямыхъ линій, которыя встрѣчаются, называютъ ихъ *наклоненіемъ.* Пусть линіи $A\,B$, $A\,C$ выходятъ изъ одной точки A (чер. 39), которую принимая за центръ, описываемъ круги полупоперечниками $A\,B{=}AC$, $A\,B'{=}A\,C'$, $A\,B''{=}A\,C''$. Величина дуги $B'\,C'$ на кругѣ $B'\,C'\,D'$, котораго составляетъ часть, будетъ линейнымъ угломъ или наклоненіемъ линіи AB къ $A\,C$, также какъ и $A\,C$ къ $A\,B$. Этотъ уголъ находимъ, полагая $B'C'$ по кругу $B'\,C'\,D'$, покуда конецъ ея сомкнется съ другимъ впереди. Такъ узнаемъ, сколько разъ должна повторятся дуга, чтобъ составить одинъ или нѣсколько полныхъ круговъ, а слѣдовательно будемъ знать самую величину дуги въ отношеніи къ ея кругу (ст. 38). Въ то время, какъ одинъ конецъ C' дуги сомкнется съ другимъ B', два бока $A\,B$, $A\,C$, проходя черезъ двѣ точки $A\,B'$, сливаются (ст. 27), отчего величина дуги $B'\,C'$ будетъ выходить таже, какая всѣхъ дугъ $B\,C$, $B''\,C''$ на своихъ кругахъ, съ увеличеннымъ $A\,C$ или съ уменьшеннымъ $A\,C'$ полупоперечникомъ противъ прежняго $A\,C$. Увеличеніе полупоперечника покуда возможно, разумѣется, доставляетъ здѣсь болѣе вѣрности, дѣлая размѣръ дугъ болѣе.

Еслибъ измѣреніе не могло быть строгимъ, то надобно приходить къ остатку, который за малостію дозволяется пренебрегать и который столько же будетъ малъ съ дугами на другихъ кругахъ.

Вершиной или *остреемъ* угла называется точка, откуда бока выходятъ. Линейный уголъ выражаютъ знакомъ $\angle$ впереди буквъ, которыя указываютъ на бока.

Прямая, проходя черезъ центръ, дѣлитъ кругъ на двѣ равныя части (ст. 25), слѣдовательно двѣ прямыя, соединяясь въ одну, дѣлаютъ уголъ π.

Положеніе двухъ линій бываетъ *отвѣсное,* когда уголъ ихъ прямой *косвенное*—когда уголъ острый или тупой. Отвѣсныя линіи называются также *перпендикулами.* Прямая, встрѣчаясь съ другой, дѣлаетъ въ обѣ стороны углы, которые будемъ называть *смѣжные* и которые слѣдовательно вмѣстѣ составляютъ π. Когда смѣжные углы равны, то каждый $\frac{1}{2}\pi$, а линіи перпендикулярны.

Въ прямолинейныхъ многоугольникахъ углы между боковъ, обращенные внутрь фигуры, называются *углами многоугольника.* Ихъ число тоже, что боковъ.

Треугольникъ называется *прямоугольнымъ*, когда въ немъ одинъ уголъ прямой. Здѣсь бокъ противъ прямаго угла—*гипотенуза*; два другіе, перпендикулярные другъ къ другу—*катеты*.

41. Продолженіе двухъ боковъ угла за вершину производитъ уголъ, который первому равенъ и называются съ нимъ *вершинными*.

Если прямыя $A\,C$, $B\,C$ (чер. 40) составляютъ уголъ a, ихъ продолженія $C\,D$, $C\,E$ уголъ b, то c смѣжный съ a будетъ смѣжнымъ съ b, слѣдовательно $a+c=\pi, b+c=\pi$ (ст. 40), послѣ чего $a=b$.

42. *Плоскостной уголъ не зависитъ отъ полупоперечника сферы, ни отъ мѣста для центра на линіи пересѣченія двухъ плоскостей*, опредѣляя такимъ образомъ одно только наклоненіе плоскости къ другой.

Взаимное положеніе двухъ плоскостей, проведенныхъ черезъ одну линію, называютъ ихъ *наклоненіемъ* другъ къ другу. Опредѣляетъ его плоскостной уголъ которому данныя плоскости служатъ боками, тогда какъ центръ сферы берется гдѣ нибудь на линіи пересѣченій двухъ плоскостей. Представляя себѣ, какимъ образомъ этотъ плоскостной уголъ долженъ быть найденъ повтореніемъ вырѣзка на своей сферѣ, должно тоже сказать здѣсь о плоскостяхъ, что было сказано въ измѣреніи дугъ о прямыхъ линіяхъ (ст. 40), слѣдовательно какъ линейный уголъ не зависитъ отъ полупоперечника круга, такъ плоскостной отъ полупоперечника сферы.

Пусть теперь на линіи $A\,B$ (чер. 41) пересѣченія двухъ плоскостей $A\,C$, $B\,D$ центры сферъ взяты гдѣ нибудь въ точкахъ E, F, вокругъ которыхъ полупоперечникомъ $A\,E=B\,F$. описаны такъ сферы, чтобъ онѣ пересѣкались въ кругѣ (ст. 34). Его дуга $G\,H$ между плоскостями $A\,C$, $B\,D$ должна сама себя поркывать, когда центры F, E перемѣнятся мѣстами (ст. 20). Тогда плоскости также сами себя покроютъ потому что проходятъ чрезъ тѣ же три точки A, H, B и A, G, B (ст. 33), слѣдовательно два сферическіе вырѣзка между плоскостями равны.

Знакъ плоскостныхъ угловъ передъ буквами будемъ употреблять тотъ же, какой для линейнаго (ст. 40). Названія: *прямые углы*, *перпендикулярныя* плоскости, *смѣжные и вершинные углы*, здѣсь тѣ же, что для линейныхъ угловъ (ст. 41).

Вершинные плоскостные углы равны, потому что для нихъ находится третій, смѣжный обоимъ, какъ и для линейныхъ угловъ (ст. 41).

Подъ *угломъ двухъ дугъ* на сферѣ будемъ разумѣть уголъ ихъ плоскостей (ст. 30), будутъ ли плоскости проходить черезъ центръ или нѣтъ; но всякій разъ надобно понимать дуги большихъ круговъ, если не будетъ сказано противное.

Линію пересеченія двухъ плоскостей назовемъ *ребромъ угла*; самыя плоскости—*боками* или *пòлами*.

43. *Плоскостной уголъ равенъ линейному между перпендикулами къ ребру въ полахъ.*

На линіи пересѣченія $A\,B$ (чер. 42) двухъ плоскостей $A\,C$, $B\,D$ принимая концы A, B за полюсы, производимъ плоскость, которой одинъ изъ круговъ происхожденія пусть будетъ $b\,c\,d$ съ центромъ a на линіи $A\,B$ (ст. 25). Плоскости $A\,C, B\,D$ вырѣзываютъ на кругѣ $b\,c\,d$ дугу $b\,c$, которой величину находимъ повтореніемъ, когда конецъ съ концемъ сомкнутся или когда промежутокъ при большомъ числѣ повтореній можемъ пренебречь (ст. 39). Повтореніямъ дуги $b\,c$ по кругу $b\,c\,d$ будутъ отвѣчать повторенія вырѣзка $A\,c\,B\,b\,A$ между плоскостями изъ сферы съ полупоперечникомъ $A\,a = a\,B$ (ст. 20), слѣдовательно таже величина будетъ выходить для плоскостнаго угла $A\,b\,B\,c\,A$, какая для линейнаго bac. Между тѣмъ обращая плоскость круга bcd на линіи AB, увѣряемся, что $\llcorner baB = \llcorner caB$ (ст. 20); далѣе плоскость круга $b\,a\,c$ должна сама себя покрывать, когда полюсы A, B мѣняются мѣстами (ст. 18), при чемъ дуга $b\,c$ можетъ сливаться сама съ собою такъ, что c будетъ въ b и наоборотъ b въ c (ст. 20). Отсюда заключаемъ, что $\llcorner A\,a\,c = \llcorner b\,a\,B = \llcorner c\,a\,B = \llcorner A\,a\,B$, слѣдовательно всѣ такіе углы прямые (ст. 39), а линія $A\,B$ перпендикулярна къ $a\,c$ и къ $a\,b$.

Этому же предложенію даемъ еще другой видъ, когда скажемъ, что *въ сферическомъ треугольникѣ бокъ равенъ противоположному углу, когда каждый изъ другихъ боковъ* $\frac{1}{2}\pi$.

44. Когда тѣлесный уголъ составляется на сферѣ дугами большого круга, то долженъ онъ вмѣстѣ происходить отъ пересѣченія плоскостей, проведенныхъ черезъ центръ сферы (ст. 23). Принадлежности такого угла: плоскости, проведенныя черезъ центръ сферы—*грани*; общая точка пересѣченія граней и которая служитъ центромъ сферы—*вершина* или *острее* тѣлеснаго угла; линіи пересѣченія граней—*ребра*; плоскостные углы граней—*углы сферическаго многоугольника*, которые берутся по порядку, не переходя на другую сторону плоскости. Наконецъ *поверхность сферическаго многоугольника* простирается въ туже сторону граней, по которую считаются углы. Такимъ образомъ одной окружности сфери-

ческаго многоугольника принадлежатъ всегда два тѣлесныхъ угла, которыхъ сумма 2π.

Тѣлесные углы по числу граней называются: *трегранными*, *четырегранными* и т. д.; *многогранными* съ неопредѣленнымъ числомъ граней. Знакъ тѣлесныхъ угловъ ставимъ тотъ же, что для плоскостныхъ и линейныхъ (ст. 40 и 42).

Продолженіе граней тѣлеснаго угла чрезъ вершину производитъ новый тѣлесный уголъ, который вмѣстѣ съ первымъ назовемъ *вершинными*. Имъ принадлежатъ *оборотные* сферическіе многоугольники, гдѣ бока и углы соединяются въ томъ же порядкѣ, но слѣдуютъ одинъ за другимъ въ противномъ направленіи.

45. Углы въ прямолинейномъ треугольникѣ считаются въ ту сторону, гдѣ плоскость ограничена боками. Они называются *внутренніе*, тогда какъ *внѣшній* по другую сторону двухъ боковъ съ его внутреннимъ составляютъ 2π. Продолженіе бока не можетъ входить внутрь треугольника, потомъ что не должно пересѣкать въ другой разъ туже прямую (ст. 27), слѣдовательно внѣшній уголъ треугольника всегда болѣе π, тогда какъ внутренній менѣе π.

Уголъ между бокомъ и продолженіемъ другаго назовемъ *уголъ внѣшній отъ продолженія*, который такимъ образомъ бываетъ смѣжный съ угломъ внутреннимъ.

46. Изъ трехъ боковъ сферическаго треугольника два необходимо менѣе π, чтобъ они не пересѣкаясь, могли достигать третьяго. Два такіе бока должны слѣдовательно заключаться въ одной изъ двухъ половинъ, на которыя большой кругъ отъ продолженія третьяго раздѣляетъ сферу.

Итакъ поверхность сферическаго треугольника будемъ почитать менѣе π, разумѣя ту самую, которая помѣщается въ одной половинѣ сферы. Послѣ чего *углы, противоположные бокамъ* $< \pi$, *должны быть также* $< \pi$, *тогда какъ третій уголъ бываетъ вмѣстѣ съ бокомъ противъ него* $< \pi, = \pi, > \pi$. Дѣйствительно, когда точку пересѣченія тѣхъ двухъ боковъ, изъ которыхъ каждый $< \pi$, представляемъ неподвижной, то третій будетъ расти вмѣстѣ съ его противоположнымъ угломъ и вмѣстѣ съ нимъ дѣлаться π.

Г Л А В А IV.

О ЛИНІЯХЪ И ПЛОСКОСТЯХЪ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХЪ.

47. *Перпендикулъ изъ точки на линіи можетъ быть одинъ только.*

Разумѣется, что продолженіе перпендикула за точку пересѣченія бываетъ перпендикуломъ къ той же линіи на противоположной сторонѣ, какъ это слѣдуетъ изъ равенства вершинныхъ угловъ (ст. 40). Но всякая другая линія выходя съ перпендикуломъ изъ общей точки, дѣлаетъ въ одну сторону тупой, въ другой острый уголъ, слѣдовательно не можетъ быть сама вторымъ перпендикуломъ.

48. *Перпендикулъ изъ точки къ линіи можетъ быть одинъ только, тогда какъ изъ этой точки всякая другая прямая встрѣчаетъ данную подъ острымъ угломъ на сторонѣ перпендикула.*

Пусть $A\,B$ (чер. 43) перпендикулъ изъ A къ линіи $B\,C$; пусть $A\,C$ прямая изъ той же точки A къ другой точкѣ C на линіи $B\,C$. Продолжаемъ $A\,B$ по другую сторону $B\,C$, дѣлая $B\,A' = B\,A$, и соединяемъ точки A', C прямою. Съ перекладываніемъ концовъ A, A', одного на мѣсто другаго, середина B линіи $A\,A'$ будетъ оставаться по прежнему, также какъ и вся линія BC, потому что $\angle ABC = \angle A'\,B\,C = \frac{1}{2}\pi$ (ст. 47). Отсюда заключаемъ, что $\angle\, A\,C\,B = \angle A'\,C\,B$; а какъ уголъ $A\,C\,A'$ менѣе π (ст. 46), то $\angle\, A\,C\,B$ острый.

Итакъ *два перпендикула къ одной линіи не могутъ пересѣкаться.*

Если по другую сторону точки B дѣлаемъ продолженіе $B\,C' = B\,C$, то съ обращеніемъ треугольника $A\,C\,A'$ на боку $A\,A'$ точка C придетъ въ C', потому что $\angle\, A\,B\,C = \angle\, A\,B\,C' = \frac{1}{2}\pi$. Послѣ чего разстоянія $A\,C' = A\,C = A'C = A'C'$, слѣдовательно A,A' полюсы прямой CC', а перпендикуль соединяетъ всегда противоположные полюсы прямой линіи.

49. *Въ треугольникѣ можетъ быть одинъ уголъ прямой или тупой, тогда какъ два другіе въ такомъ случаѣ бываютъ острые.*

Если въ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 43) уголъ $A\,B\,C$ прямой, то мы видѣли сейчасъ, что $\angle A\,C\,B$ и по той же причинѣ другой уголъ $B\,A\,C$ должны быть острые.

Если въ $\triangle A\,B\,C$ (чер. 44) уголъ $A\,B\,C$ тупой, то внѣшній уголъ $A\,B\,D$ отъ продолженія $B\,C$ за точку B будетъ острый. Перпендикулъ $A\,D$ изъ A къ $B\,D$ упадетъ куда нибудь въ D на линіи $B\,D$ внѣ треугольника (ст. 48). Такъ произойдетъ прямоугольный треугольникъ $A\,D\,C$ съ прямымъ угломъ при D, слѣдовательно съ острымъ при C. Подобнымъ образомъ доказывается, что другой уголъ $C\,A\,B$ также острый.

50. *Въ равнобедренномъ треугольникѣ противъ равныхъ боковъ углы равны. Обратно въ треугольникѣ противъ равныхъ угловъ бока равны.*

Равнобедренный треугольникъ $A\,B\,C$ (чер. 45), гдѣ A вершина, полагаемъ самого на себя другой стороной, такъ чтобъ $A\,C$ бокъ шелъ по $A\,B$ и слѣдовательно $A\,B$ по $A\,C$. Равенство боковъ $A\,B$, $A\,C$ заставитъ точки B,C перемѣниться мѣстами, линію $B\,C$ покрывать саму себя. Это значитъ что $\angle B = \angle C$.

Если же предположимъ $\angle B = \angle C$, то снова треугольникъ $A\,B\,C$ покроетъ самъ себя другой стороной, когда разсуждаемъ, что съ перемѣщеніемъ B въ C и C въ B бокъ $C\,A$ долженъ идти по $B\,A$, таже какъ $B\,A$ по $C\,A$, и слѣдовательно два бока опять встрѣтятся въ той же точкѣ A. Это значитъ, что $A\,B = A\,C$.

Итакъ *треугольникъ съ двумя равными углами бываетъ равнобедренный*, именно съ двумя бедрами противъ равныхъ угловъ. Въ треугольникѣ равностороннемъ всѣ три угла равны; наоборотъ съ тремя равными углами треугольникъ долженъ быть равностороннимъ. *Въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи острые*, потому что будучи равны не могутъ уже быть ни прямые, ни тупые (ст. 49).

51. *Прямая линія встрѣчаясь съ кругомъ или пересѣкаетъ кругъ въ двухъ только точкахъ, или бываетъ касательной къ кругу въ одной точкѣ, когда перпендикулярна къ поперечнику.* Здѣсь разумѣется прямая съ кругомъ въ одной плоскости.

Если прямая входитъ въ кругъ, а слѣдовательно продолжаясь и выходитъ вонъ (ст. 25), то въ третій разъ уже не должна пересѣкать круга, потому что прямая внутри круга составляетъ съ полупоперечникомъ острый уголъ (ст. 50);

его смѣжный тупой не можетъ быть угломъ бедра съ основаніемъ въ другомъ равнобедренномъ треугольникѣ (ст. 50).

Если прямая перпендикулярна къ поперечнику, то не можетъ уже входить внутрь круга. Иначе составился бы равнобедренный треугольникъ изъ двухъ полупоперечниковъ къ общимъ точкамъ прямой съ кругомъ при вступленіи внутрь и при выходѣ вонъ (ст. 25). Въ этомъ треугольникѣ противъ одного полупоперечника прямой уголъ по предположенію, противъ другаго слѣдовательно также былъ бы прямой уголъ (ст. 50) и такимъ образомъ произошло бы два перпендикула къ одной прямой изъ центра круга (ст. 48).

Тоже можно доказывать еще другимъ образомъ. Когда продолжаемъ полупоперечникъ $A\,B$ (чер. 45) вонъ изъ круга, дѣлая продолженіе $A'\,B = A\,B$, потомъ около A' описываемъ кругъ полупоперечникомъ $A'\,B$, то два круга будутъ касаться въ одной точкѣ B (ст. 35). Прямая BC, которой полюсы въ A, A' должна быть перпендикулярна къ $A\,B$ (ст. 48). Всякая точка C будетъ происходить на линіи $B\,C$ отъ пересѣченія равныхъ круговъ около полюсовъ A, A', когда полупоперечники $A\,C = A'\,C$, такъ что $A\,C$ растетъ вмѣстѣ съ $B\,C$. Отсюда слѣдуетъ, что перпендикулъ AB кратчайшее разстояніе точки A отъ линіи BC, тогда какъ прочія разстоянія $A\,C$ тѣмъ болѣе, чѣмъ точка C далѣе отъ конца B перпендикула $A\,B$. Если же линія $B\,C$ встрѣчаетъ кругъ не перпендикулярно къ полупоперечнику $A\,C$, то пересѣкаетъ его необходимо въ двухъ точкахъ C, C' и потомъ остается внѣ круга, какъ скоро разстоянія точекъ до центра сдѣлаются болѣе $A\,C$.

53. *Въ равнобедренномъ треугольникѣ перпендикулъ изъ вершины къ основанію дѣлитъ какъ уголъ при вершинѣ, такъ и основаніе пополамъ.*

Пусть $C\,A\,C'$ (чер. 43) равнобедренный треугольникъ, гдѣ $A\,C = A\,C'$. Оставляя точки C, C' на своихъ мѣстахъ, перекладываемъ треугольникъ по другую сторону основанія $C\,C'$ и пусть теперь вершина A падаетъ въ точку A', которую съ точкой A можемъ принимать за полюсы линіи $C\,C'$, по равенству разстояній $A\,C, A\,C', A'\,C, A'\,C'$. Прямая $A\,A'$ между двухъ полюсовъ A, A' должна быть перпендикулярна къ основанію $C\,C'$ (ст. 48) и приходить внутри двухъ равнобедренныхъ треугольниковъ $C\,A\,C', C\,A'\,C'$, пересѣкая основаніе гдѣ нибудь въ B между C и C', такъ какъ уголъ бедра съ основаніемъ острый (ст. 48). Концы C, C' основанія можемъ почитать за полюсы прямой A, A' по равенству разстояній $C\,A, C\,A', C'\,A, C'\,A'$. Итакъ обращая всю связь на линіи $A\,A'$, полагаемъ

C въ C', наоборотъ C' въ C, отчего $C\,B$ покроетъ $C'\,B$, уголъ $C\,A\,B$ покроетъ $C'\,A\,B$. Это значитъ, что $C\,B = C'\,B$, $\angle\, C\,A\,B = \angle\, C'\,A\,B$.

Замѣтимъ къ этому, что вершины всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ съ основаніемъ $C\,C'$ должны лежать на линіи $A\,A'$, перпендикулярной къ основанію въ срединѣ, или все равно, проведенной черезъ вершины двухъ равнобедренныхъ треугольниковъ съ общимъ основаніемъ $C\,C'$. Въ такомъ свойствѣ равнобедренныхъ треугольниковъ заимствованъ способъ дѣлить уголъ и линіи пополамъ. Когда требуется раздѣлить уголъ $C\,A\,C'$ пополамъ, то берутъ отъ вершины равные бока $A\,C$, $A\,C'$. Около концовъ C, C' описываютъ равными полупоперечниками $C\,A'$, $C'\,A'$ дуги круговъ. Ихъ точку пересѣченія A' соединяютъ прямой $A\,A'$. Если требуется раздѣлить линію $C\,C'$ пополамъ, то равными разстояніями $C\,A$, $C'\,A$ описываютъ дуги круговъ; ихъ двѣ точки пересѣченія A, A' соединяютъ линіей $A\,A'$. Изъ двухъ точекъ A, A' можно замѣнять одну точкой пересѣченія какихъ бы то ни было равныхъ круговъ около C, C' по ту, либо другую сторону линіи $C\,C'$.

Изъ доказаннаго здѣсь предложенія слѣдуютъ обратныя. Прямая бываетъ перпендикулярна къ основанію, когда соединяетъ вершину равнобедреннаго треугольника съ серединой основанія. Она должна дѣлить уголъ при вершинѣ пополамъ. Справедливость всѣхъ этихъ предложеній дѣлается ясной, когда замѣтимъ, что перпендикулъ изъ вершины къ основанію можетъ быть одинъ только (ст. 48), слѣдовательно нѣкоторыя уже свойства такого перпендикула, опредѣляя достаточно положеніе линіи, предполагаютъ остальныя.

Итакъ если требуется на прямой $C\,C'$ возставить перпендикулъ $B\,A$ изъ точки B, то стоитъ только сдѣлать отъ данной точки B въ обѣ стороны $BC = BC'$, потомъ около концовъ C,C' описывать равные круги, которыхъ точку пересѣченія A соединять прямою линіей съ B.

Если же требуется перпендикулъ AB опустить къ прямой CC' изъ точки A, взятой внѣ линіи; то надобно чертить кругъ около A произвольнымъ разстояніемъ AC и такъ, чтобы данную линію пересѣчь въ двухъ точкахъ C,C'. Вокругъ этихъ точекъ описывать дуги по ту, либо другую сторону линіи $C\,C'$. Наконецъ точку A' пересѣченія послѣднихъ круговъ соединять прямою съ данной точкой A.

53. *Уголъ внѣшній отъ продолженія бока въ треугольникѣ болѣе каждаго изъ двухъ угловъ внутреннихъ съ нимъ несмѣжныхъ.*

Въ $\triangle\, A\,B\,C$ (чер. 46) продолжаемъ бокъ $A\,C$: внѣшній уголъ $B\,C\,D$ между продолжіеенмъ $C\,D$ и бокомъ BC будетъ болѣе какъ угла B, такъ и другаго при

точкѣ A въ треугольникѣ. Ведемъ изъ A линію AEF черезъ середину E бока BC, дѣлая $AE = EF$. Соединяемъ F, C прямой FC. Такъ произойдутъ треугольники AEB, CEF одинаковые, которые другъ друга покрываютъ, когда при равенствѣ боковъ BE съ EC, AE съ EF и угловъ BEA съ FEC (ст. 40) кладемъ одинъ треугольникъ на другой равными боками, напримѣръ обращая $\triangle ABE$ вокругъ E, покуда BE сольется съ EC. Отсюда слѣдуетъ равенство угловъ ABC съ BCF. Замѣтимъ къ тому, что прямая FA не можетъ встрѣтить линіи AD въ другой точкѣ, кромѣ A, откуда выходитъ; слѣдовательно точка F лежитъ въ отверстіи внѣшняго угла BCD, который раздѣляетъ она на два: одинъ FCD, другой $\angle BCF = \angle ABC$, какъ сейчасъ видѣли. Это значитъ, что $\angle ABC$ менѣе $\angle BCD$. Также бы доказали, что другой уголъ BAC менѣе угла BCD съ нимъ несмѣжнаго.

54. *Въ треугольникѣ противъ большаго бока лежитъ уголъ больше. Наоборотъ противъ большаго угла лежитъ бокъ больше.*

Въ $\triangle ABC$ (чер. 47) пусть бокъ $AB > AC$. Дѣлаемъ $AD = AC$ и ведемъ прямую DC. Произойдетъ равнобедренный треугольникъ ADC, гдѣ противъ равныхъ боковъ углы $ADC = ACD$ (ст. 50), слѣдовательно уголъ $ACB > ADC > ABC$ (ст. 53).

Отсюда само собой слѣдуетъ обратное предложеніе. Когда въ треугольникѣ уголъ болѣе другаго, то противъ нихъ бока не могутъ быть равны (ст. 50); не можетъ быть также противъ большаго угла бокъ менѣе, послѣ того какъ сейчасъ доказали, что противъ меньшаго бока долженъ быть уголъ всегда менѣе.

55. *Въ треугольникѣ сумма двухъ боковъ больше третьяго.*

Треугольникъ не можетъ иначе составиться какъ съ пересѣченіемъ двухъ круговъ, которыхъ центры помѣщены въ концахъ одного бока, а полупоперечниками служатъ два другіе. Между тѣмъ круги пересѣкаются только въ томъ случаѣ, когда сумма полупоперечниковъ болѣе, нежели разстояніе центровъ (ст. 35).

Впрочемъ это же можемъ доказывать здѣсь иначе. Когда въ треугольникѣ BDC (чер. 47) продолжаемъ одинъ бокъ, напримѣръ BD, дѣлая продолженіе AD равнымъ другому боку DC, то произойдетъ равнобедренный треугольникъ ADC, гдѣ при точкахъ A, C углы равны, слѣдовательно въ $\triangle ABC$ уголъ при C болѣе угла при A, а потому бокъ $AB = BD + DC > BC$.

Вообще бокъ многоугольника менѣе суммы прочихъ, потому что многоугольникъ происходитъ постепенно, начинаясь съ треугольника, когда бокъ замѣняемъ двумя, которыхъ сумма болѣе.

Итакъ въ этомъ смыслѣ говорятъ справедливо, что *прямой линіей измѣряется кратчайшее разстояніе двухъ точекъ.*

56 .*Перпендикуломъ къ плоскости* называется линія, которая встрѣчаетъ плоскость перпендикулярно къ двумъ линіямъ на ней *Онъ бываетъ перпендикуломъ и ко всѣмъ линіямъ, проведеннымъ отъ встрѣчной точки по плоскости.*

Это свойство принадлежитъ прямой, которая соединяетъ два полюса плоскости. Пусть A, A' (чер. 27) полюсы, $B\,D\,B'\,D'$ кругъ происхожденія на плоскости, гдѣ C центръ круга $B\,D\,B'\,D'$ и начало всѣхъ круговъ. Когда полюсы A, A' мѣняются мѣстами, то всякая точка E круга можемъ сохранять свое. Это значитъ, что $\angle\, E\,C\,A = \angle\, E\,C\,A' = \frac{1}{2}\pi$. Такъ и всѣ линіи на плоскости, проведенныя въ C, будутъ перпендикулярны къ линіи $A\,A'$.

Если теперъ обратно предположимъ линію $A\,B$ (чер. 48) перпендикулярной къ двумъ $B\,C$, $B\,D$, которыя не составляютъ одной прямой, то продолжая $A\,B$ за точку B, дѣлая продолженіе $B\,A' = B\,A$, потомъ $B\,C = BD$ и соединяя концы C,D прямыми съ A,A', получимъ связь линій, гдѣ $A\,C = A\,D$, $A'\,C = A'\,D$, потому что $\triangle ACA'$ покрываетъ $\triangle ADA'$, какъ по равенству прямыхъ угловъ $A'C$,ABD такъ и по равенству линій BC,BD. Въ этой связи линіи замѣняютъ одна другую, когда точки A съ A', C съ D перекладываются, потому что плоскости треугольниковъ $A\,D\,A'$, $A\,C\,A'$ падаютъ другъ на друга, равенство AB съ AB' заставляетъ точку B сохранять свое мѣсто, равенство прямыхъ угловъ требуетъ, чтобы линія BC шла по $B\,D$, наоборотъ $B\,D$ по $B\,C$, и наконецъ равенство $B\,C = B\,D$ приводитъ точку C въ D, D въ C, слѣдовательно $A\,C = A\,D = A'\,C = A'\,D$.

Итакъ плоскость, которой A, A' служатъ полюсами, пройдетъ черезъ точки D, C на равныхъ разстояніяхъ отъ A, A', также черезъ точку B, какъ начало круговъ на плоскости (ст. 22). Черезъ три точки $B\,C$, D, взятыя не въ прямой линіи, другой плоскости провести нельзя (ст. 33). Линія AA', соединяя полюсы, будетъ перпендикулъ къ этой плоскости.

57. *Изъ точки на плоскости можетъ выходить одинъ только перпендикулъ, также какъ изъ точки внѣ плоскости падаетъ одинъ только перпендикулъ къ этой плоскости.*

Само по себѣ разумѣется, что продолженіе перпендикула по другую сторону плоскости будетъ также перпендикуломъ къ плоскости (ст. 47).

Пусть теперь двѣ линіи, не будучи продолженіемъ одна другой, выходятъ изъ одной точки. Воображаемъ черезъ нихъ плоскость (ст. 33) и линію пересѣ-

ченія съ данной. Двѣ первыя линіи не могутъ къ этой послѣдней быть перпендикулярны (ст. 47 и 48), слѣдовательно не должны быть вмѣстѣ перпендикулами къ плоскости (ст. 56).

58. *Изъ всякой точки можно возставить перпендикулъ къ плоскости.*

Возможность поставить перпендикулъ изъ всякой точки на плоскости, слѣдуетъ изъ того, что всякая точка служитъ началомъ круговъ на плоскости (ст. 29), потомъ къ этому началу пріискиваются два полюса, между которыми прямая пройдетъ черезъ данную точку перпендикулярно къ плоскости (ст. 56).

Если бы требовалось возставить перпендикулъ, употребляя къ тому черченіе прямыхъ линій и круговъ на плоскостяхъ то называемъ A данную плоскость, a на ней данную точку, черезъ которую ведемъ произвольно линію α въ плоскости A потомъ черезъ α произвольно, новую плоскостъ B, наклоненную подъ какимъ нибудь угломъ къ прежней A. Ведемъ изъ a перпендикулы къ α: одинъ β въ плоскости A, другой γ въ плоскости, B; наконецъ въ плоскости, гдѣ лежатъ β и γ, перпендикулъ δ изъ a къ β, который и будетъ перпендикуломъ къ даной плоскости A. Здѣсь a перпендикулъ къ β и γ, слѣдовательно къ самой плоскости такихъ линій и въ ней къ δ (ст. 56), который будетъ уже перпендикуломъ къ α и β, а потому къ плоскости A, гдѣ лежатъ α и β.

59. *Плоскость перпендикулярна къ другой, проходя черезъ перпендикулъ къ послѣдней.*

Обратно, *перпендикулъ къ линіи пересѣченія двухъ перпендикулярныхъ плоскостей, находясь въ одной бываетъ перпендикуломъ къ другой.*

Пусть $a\ b$ (чер. 50) перпендикулъ къ плоскости AB. Черезъ $a\ b$ проходитъ плоскость $C\,D$, разрѣзывая первую въ линіи $B\,C$, перпендикулярной къ $a\,b$ въ точкѣ b (ст. 56). На плоскости $A\,B$ ведемъ отъ конца b къ линіи $B\,C$ перпендикулъ $b\ c$, который слѣдовательно долженъ съ ab составлять прямой уголъ, равный плоскостному (ст. 42).

Еслижъ обратно плоскости AB,CD предполагаются перпендикулярными, то перпендикулы $a\,b, b\ c$ въ этихъ плоскостяхъ къ линіи пересѣченія $B\,C$, будутъ и между собой перпендикулярны (ст. 42). Такимъ образомъ $a\,b$ дѣлается къ $B\,C$ и къ $b\ c$ перпендикуломъ, слѣдовательно къ самой плоскости $A\,B$.

Отсюда заключаемъ, что *двѣ плоскости, перпендикулярныя къ третьей, пересѣкается въ перпендикулъ къ послѣдней*, потому что къ третьей плоскости

перпендикулъ изъ общей точки пересѣченія долженъ быть въ той и другой плоскости, слѣдовательно быть ихъ линіей пересѣченія.

60. *Изъ всякой точки можно перпендикулъ опустить къ плоскости.*

Всякую точку внѣ плоскости можно почитать за полюсъ этой плоскости, находя противоположный на другой сторонѣ (ст. 28). Между двухъ полюсовъ прямая будетъ изъ данной точки перпендикулъ къ плоскости (ст. 56).

Если бы требовалось опустить перпендикулъ, употребляя къ тому только прямыя линіи съ кругами въ плоскостяхъ, то пусть A данная точка (чер. 49), откуда перпендикулъ долженъ падать на плоскость $B\,C$. Ведемъ здѣсь произвольно линію $D\,E$; къ ней изъ данной точки A перпендикулъ $F\,A$, потомъ изъ F, куда падаетъ этотъ перпендикулъ, ведемъ еще другой $F\,G$ къ $E\,D$ въ данной плоскости; наконецъ къ $F\,G$ опускаемъ изъ A перпендикулъ $A\,G$, который будетъ перпендикуломъ плоскости. Здѣсь $D\,E$ перпендикулъ къ $F\,G$ и $F\,A$, слѣдовательно къ плоскости треугольника $F\,A\,G$, которая такимъ образомъ дѣлается перпендикулярной къ плоскости BC (ст. 59). Прямой уголъ двухъ плоскостей будетъ также прямымъ угломъ линіи $G\,A$ съ $G\,K$, проведенной въ плоскости $B\,C$ перпендикулярно къ $F\,G$. Итакъ $A\,G$ перпендикулъ къ $B\,G$ и $G\,K$, слѣдовательно къ плоскости $B\,C$.

61. *Два перпендикула къ плоскости заключаются въ одной плоскости.*

Пусть $A\,B$, $C\,D$ (чер. 51) перпендикулы къ одной плоскости $F\,E$, гдѣ концы B, D соединяемъ прямою $B\,D$, черезъ которую воображаемъ плоскость, перпендикулярную къ $E\,F$. Въ ней должны заключаться перпендикулы къ плоскости $F\,E$, возставленные въ точкахъ B, D (ст. 59) и слѣдовательно самыя линіи $A\,B$, $C\,D$ (ст. 57).

На плоскости ту линію, куда падаютъ всѣ перпендикулы другой, назовемъ *слѣдъ* или *проекція*. *Отбрасывать* линію на плоскость будетъ значить, опускать перпендикулы, чтобы вести слѣдъ. Такъ здѣсь $D\,B$ слѣдъ линіи $C\,A$ на плоскости $F\,E$.

Уголъ линіи съ плоскостью значитъ уголъ, который линія дѣлаетъ съ своимъ слѣдомъ на плоскости.

62. На сферѣ дуга большаго круга *перпендикулъ* къ другой, когда дѣлаетъ съ этой послѣдней въ обѣ стороны прямой уголъ.

Изъ данной точки на дугу можно возставить одинъ только перпендикулъ, потому что дуги большихъ круговъ происходятъ отъ пересѣченія со сферою пло-

скостей, проведенныхъ черезъ центръ. По тойже причинѣ, изъ точки *къ данной дугѣ можетъ быть опущенъ одинъ только перпендикулъ*, который однакожъ съ полнымъ кругомъ, гдѣ была взята дуга, какъ и со всѣми большими кругами на сферѣ, пересѣкается въ двухъ точкахъ. Это пересѣченіе происходитъ въ концахъ поперечника сферы, слѣдовательно два перпендикула къ одному кругу составляютъ π.

Разстояніе точки на сферѣ будемъ измѣрять дугой большаго круга, проведенной къ другой точкѣ, либо къ дугѣ другаго большаго круга перпендикулярно. Разстояніе полюса до точекъ его круга, вездѣ равное, составляетъ $\frac{1}{2}\pi$, потому что поперечникъ между полюсами перпендикулярен къ плоскости круга (ст. 56). Разстояній до круга всякой другой точки, кромѣ полюса, бываетъ два, которыя составляютъ вмѣстѣ полкруга, слѣдовательно изъ нихъ всегда одно $< \frac{1}{2}\pi$, другое $> \frac{1}{2}\pi$.

63. *Оборотные равнобедренные треугольники на сферѣ бываютъ одинаковы.*

Пусть $A\,B\,C$ сферическій треугольникъ, гдѣ бокъ $A\,B = A\,C$. Пусть $A'\,B'\,C'$ оборотный его треугольникъ, такъ что здѣсь A', B', C' представляютъ концы поперечниковъ, проведенныхъ отъ A, B, C (ст. 43), слѣдовательно $A\,B = A'\,B'$, $AC = A'\,C'$, $B\,C = B'\,C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Если теперь у двухъ этихъ треугольниковъ центры сферъ сносимъ вмѣстѣ, потомъ точки A, A', накладывая бокъ $A\,B$ на $A'\,C'$, то по равенству плоскостныхъ угловъ при точкахъ A, A' и по равенству боковъ $A\,B$ съ $A'\,C'$, $A\,C$ съ $A'\,B'$ точка C' будетъ въ B, B' въ C.

64. *Въ сферическомъ треугольникѣ противъ равныхъ боковъ углы равны; наоборотъ противъ равныхъ угловъ бока равны.*

Пусть два треугольника $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ (чер. 52) оборотные въ отношеніи другъ къ другу, такъ что точки A, B, C отвѣчаютъ въ другомъ треугольникѣ точкамъ A', B', C'. Если предположимъ къ тому $A\,B = A\,C$, то два треугольника будутъ покрывать другъ друга, когда накладываемъ ихъ точкой B въ C', C въ B' (ст. 63). Это значитъ $\angle B = \angle C' = \angle C$.

Если же предположимъ $\angle B = \angle C$ и слѣдовательно $\angle B = \angle C'$, $\angle C = \angle B'$, то надобно накладывать треугольники другъ на друга точкой B' въ C, C въ B'. По равенству плоскостныхъ угловъ бокъ $C'\,A'$ пойдетъ по $B\,A$, $B'\,A'$ по $C\,A$, пересѣкаясь въ общей точкѣ A', послѣ чего $B\,A = C'\,A' = C\,A$.

65. *Въ равнобедренномъ сферическомъ треугольникѣ перпендикулъ изъ вершины дѣлитъ основаніе пополамъ.*

Пусть въ $\triangle ABC$ бокъ $AB = AC$, дуга AD соединяетъ вершину A съ серединой D основанія BC. Когда теперь $\triangle ABC$ покроемъ оборотнымъ его треугольникомъ, полагая на BC соотвѣтственный бокъ, то на точки D, A придутъ ихъ соотвѣтственныя (ст. 63), тогда какъ уголъ ADC займетъ мѣсто смѣжнаго съ нимъ ADB. Это значитъ, $\angle ADC = \angle ADB = \frac{1}{2}\pi$.

66. *Дуга, проходя черезъ вершины двухъ равнобедренныхъ треугольниковъ, бываетъ перпендикулярна къ ихъ общему основанію, которое раздѣляетъ также пополамъ*, кромѣ того случая, когда бока въ одномъ треугольникѣ служатъ продолженіемъ боковъ въ другомъ.

Пусть ABC, BDC два равнобедренныхъ треугольника съ общимъ основаніемъ BC, изъ середины котораго ведемъ дуги къ вершинамъ A, D. Онѣ должны быть перпендикулярны къ BC (ст. 65), а потому сливаться въ одну дугу ADE (ст. 62), будутъ ли вершины A, D лежать на той же, или на различныхъ сторонахъ основанія BC. Если къ тому двѣ вершины съ центромъ сферы не находятся въ одной прямой линіи, то другой плоскости черезъ эти три точки, слѣдовательно также другой дуги черезъ A, D, провести нельзя (ст. 33); а потому дуга ADE должна быть перпендикуломъ къ BC. Напротивъ когда равные бока AB, AC служатъ продолженіемъ въ другомъ равнобедренномъ треугольникѣ $BA'C$, то вершины A, A' съ центромъ сферы будутъ въ одной прямой, слѣдовательно можетъ быть и много проведено дугъ отъ A къ A'.

Вообще замѣтимъ, что когда въ равнобедренномъ треугольникѣ вершина не будетъ вмѣстѣ полюсъ того круга, къ которому принадлежитъ основаніе, то перпендикулъ изъ вершины къ основанію можетъ быть одинъ только (ст. 62), слѣдовательно положеніе такого перпендикула достаточно опредѣлено, а потому два свойства дуги въ числѣ четырехъ: перпендикулярность къ основанію, проходить черезъ вершину, дѣлить уголъ при вершинѣ пополамъ, дѣлить основаніе пополамъ, предполагаютъ два другія какъ необходимыя послѣдствія.

Такъ если требуется дугу BC раздѣлить пополамъ, то вокругъ концовъ B, C описываютъ произвольнымъ разстояніемъ AB дугу, потомъ тоже другимъ разстояніемъ BD, наконецъ точки пересѣченія A, D равныхъ круговъ соединяютъ дугой AD, которая по крайней мѣрѣ въ продолженіи своемъ, пройдетъ черезъ середину E основанія. Можно точки A, D сыскать такимъ образомъ на одной или на противоположныхъ сторонахъ дуги BC, избѣгая того случая, когда дуги однихъ круговъ выходили бы продолженіемъ другихъ.

Если требуется раздѣлить уголъ *B A C* пополамъ, то дѣлаютъ бока *A B*, *A C* равными, потомъ изъ концовъ *B*, *C* чертятъ равные круги, которыхъ точку пересѣченія *D* соединяютъ съ остреемъ *A* дугой *A D*.

Перпендикулъ изъ точки *A* будетъ опущенъ къ дугѣ *B C*, когда пересѣкутъ *B C* въ двухъ точкахъ *B*, *C* кругомъ около *A*, потомъ изъ точекъ *B*, *C* начертятъ равные круги какою нибудь другой *B D* = *C D*, наконецъ ихъ точку пересѣченія соединятъ съ точкой *A* дугой *A D*, которую продолжаютъ, если бы понадобилось, до встрѣчи съ *B C*.

Чтобы на дугѣ *B C* возставить перпендикулъ изъ точки *E*, берутъ отъ *E* въ обѣ стороны равныя дуги *B E* = *EC*; изъ концовъ *B*, *C* чертятъ равные круги произвольною дугой *B A* = *A C*, и соединяютъ ихъ точку пересѣченія *A* съ точкой *E* дугой *A E*.

Одною дугой начерченную на сферѣ линію мы называли здѣсь кругомъ. Онъ дѣйствительно будетъ тотъ самый, который происходитъ отъ пересѣченія данной сферы съ тою, гдѣ неподвижный конецъ дуги берется за центръ, а хорда за полупоперечникъ. Этотъ кругъ называютъ *параллельнымъ* къ тому большому, которому неподвижный конецъ дуги служитъ полюсомъ на сферѣ. Онъ также происходитъ отъ пересѣченія сферы съ плоскостію, поставленной перпендикулярно на томъ поперечникѣ, который соединяетъ полюсы.

Большой кругъ на сферѣ въ отношеніи къ прочимъ представляетъ подобныя свойства, какія принадлежатъ прямой линіи со всѣми кругами на плоскости. Такъ около двухъ неподвижныхъ точекъ на сферѣ равные круги пересѣкаются въ большомъ кругѣ, къ которому самое меньшое и самое большое разстояніе точки будутъ перпендикулярны, послѣ того какъ ими начерченные круги не должны пересѣкать уже, но только касаться большаго круга, чтобы не могъ составиться равнобедренный треугольникъ и въ немъ черезъ середину основанія пройти новый перпендикулъ (ст. 62 и 65).

67. *Правильный многоугольникъ*, прямолинейный и сферическій, называется тотъ, гдѣ какъ всѣ бока, такъ углы, равные.

Внутри правильнаго многоугольника находится точка—*центръ*, отъ которой какъ разстоянія всѣхъ остреевъ, такъ и боковъ, равные. Въ прямолинейномъ треугольникѣ центръ назначаютъ своимъ пересѣченіемъ тѣ линіи, которыя дѣлятъ углы пополамъ. Въ центръ сферическаго многоугольника сходятся дуги, въ которыхъ сферу пересѣкаютъ плоскости, раздѣляя пополамъ углы. Напримѣръ

въ прямолинейномъ многоугольникѣ линіи $A\,C, B\,C$ (чер. 55), раздѣливъ углы при точкахъ A, B пополамъ, приходятъ въ центръ, составляя равнобедренный треугольникъ $A\,C\,B$, который прикладываясь къ самому себѣ производитъ уже правильный многоугольникъ. Ясно, что всякій разъ $A\,C, B\,C$ пересѣкаются, раздѣляя каждая въ продолженіи своемъ ограниченную плоскость на двѣ части, которыя должны выходить отъ той и другой линіи одинаковыя. Тоже надобно сказать о правильныхъ многоугольникахъ изъ дугъ большаго круга на сферѣ. Итакъ если число боковъ n въ правильномъ многоугольникѣ, то каждый уголъ при центрѣ, между линій, проведенныхъ сюда отъ концевъ бока, долженъ быть $\frac{2\pi}{n}$. Кругъ, описанный разстояніемъ центра до конца бока, пройдетъ слѣдовательно чрезъ острея всѣхъ угловъ; а кругъ, описанный перпендикуломъ, или, все тоже, разстояніемъ до средины бока будетъ касаться всѣхъ боковъ въ ихъ серединѣ.

ГЛАВА V.

ИЗМѢРЕНІЕ ТѢЛЕСНЫХЪ УГЛОВЪ ПОМОЩІЮ ПЛОСКОСТНЫХЪ.

68. *Трегранный тѣлесный уголъ равенъ половинѣ суммы плоскостныхъ безъ прямаго.*

Къ тому началу, которое приняли для Геометрическихъ измѣреній (ст. 37), прибавимъ еще новое, столько же необходимое, какъ уже было замѣчено, при случаѣ, выше (ст. 2). *Двѣ величины почитаются равными, когда можемъ обѣ составить изъ однѣхъ частей, хотя бы въ другомъ порядкѣ.* Послѣ чего будетъ оставаться только, вымѣрить самыя части.

Пусть въ сферическомъ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 56) каждый бокъ $<\pi$. Раздѣляемъ $A\,B$, $A\,C$ пополамъ въ точкахъ D, E, черезъ которыя ведемъ дугу $F\,D\,E\,G$. Пусть на нее падаетъ изъ точки B перпендикулъ $B\,H$ внутри треугольника $A\,B\,C$. Въ такомъ случаѣ къ тойже дугѣ перпендикулы изъ точекъ A, C должны быть внѣ треугольника $A\,B\,C$, составляя треугольники AFD, CEG одинаковые съ $D\,B\,H$, $B\,E\,H$. Увѣриться въ этомъ можемъ, обращая напримѣръ $\triangle D\,B\,H$ около точки D, покуда $B\,D$ покроетъ $D\,A$. Тогда равенство вершинныхъ угловъ заставитъ бокъ $H\,D$ идти по $D\,F$ и здѣсь окончиться въ точкѣ F, потому что дуга $D\,E<\pi$ (ст. 46), слѣдовательно перпендикулъ $A\,F$ изъ A къ дугѣ $F\,D$ можетъ быть одинъ только (ст. 62). Итакъ основываясь на томъ началѣ, которое теперь приняли, величину треугольника $A\,B\,C$ должны почитать равною съ четыреугольникомъ $A\,F\,G\,C$. Замѣтимъ къ этому, что когда сумму всѣхъ угловъ треугольника ABC называемъ S, она въ четыреугольникѣ $AFGC$ будетъ $S+\pi$, потому что здѣсь къ угламъ $B\,A\,C$, $B\,C\,A$ прибавляются $FAD+ECF=A\,B\,C$, да сверхъ того $AFD+EHC=\pi$.

Если перпендикулъ изъ B къ DE падаетъ въ E (чер. 57), то здѣсь $\triangle BDE$ одинаковъ съ $\triangle AFD$, слѣдовательно поверхность треугольника ABC снова будетъ таже, что четыреугольника $AFEC$, гдѣ сумма всѣхъ угловъ опять $S+\pi$.

Если перпендикулъ BH изъ B къ DE падаетъ внѣ треугольника ABC (чер. 58), то здѣсь, какъ и въ первомъ случаѣ, $\triangle AFD$ одинаковъ съ $\triangle DCH$, $\triangle BGE$ съ $\triangle ECH$, слѣдовательно снова поверхность четыреугольника $AFEB$ равна съ $\triangle ABC$, къ которому придается $\triangle AFD$, равный суммѣ двухъ отнятыхъ DCE, BGE. Въ четыреугольникѣ $ABGF$ опять сумма всѣхъ угловъ $S+\pi$, потому что съ треугольниками придается уголъ FAD вмѣсто суммы двухъ угловъ ACB, GBC, да сверхъ того прибавляются прямые углы при точкахъ F, G.

Итакъ во всякомъ случаѣ поверхность треугольника ABC (чер. 56) таже, что поверхность четыреугольника $AFGC$, который ограничивается бокомъ $AC<\pi$ въ треугольникѣ и перпендикулами AF, CG изъ концовъ его къ дугѣ, проведенной черезъ середины двухъ остальныхъ боковъ. Въ этомъ четыреугольникѣ сумма всѣхъ угловъ будетъ болѣе двумя прямыми противъ суммы угловъ въ треугольникѣ. Отсюда слѣдуетъ, что сумма угловъ и величина поверхности остаются тѣже во всѣхъ треугольникахъ, поставленныхъ на томъ же боку $AC<\pi$, тогда какъ ихъ острее въ третьемъ углѣ на равномъ разстояніи отъ дуги, проведенной черезъ середины боковъ этаго третьяго угла.

Въ данномъ треугольникѣ ABC (чер. 59), черезъ точки D, E, взятыя на серединѣ боковъ AB, BC, ведемъ дугу DE, а къ ней паралельный кругъ BF покуда встрѣтитъ точку F на продолженіи въ ту же сторону бока ACF. Послѣ чего перпендикулъ FG изъ F къ кругу DEG будетъ равенъ перпендикулу къ той же дугѣ изъ точки B (ст. 66), слѣдовательно поверхность и сумма угловъ въ треугольникѣ ABC тѣже, что въ треугольникѣ, который получимъ, соединяя точку F дугами съ точками A, C. Между тѣмъ этотъ послѣдній треугольникъ обращается въ вырѣзокъ $AHFCA$ вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ уголъ при C дѣлается π. Въ этомъ вырѣзкѣ сумма двухъ угловъ $S-\pi$, слѣдовательно величина треугольника ABC должна быть $\frac{1}{2}(S-\pi)$.

Пусть опять въ треугольникѣ сумма всѣхъ угловъ S, но гдѣ предположимъ одинъ бокъ болѣе полкруга. Замѣнивъ этотъ бокъ дополненіемъ его къ цѣлому кругу, составляемъ съ двумя другими новый треугольникъ, гдѣ слѣдовательно сумма трехъ угловъ $4\pi - S$, а величина поверхности $\frac{1}{2}(3\pi - S)$ должна составлять π съ величиною поверхности въ прежнемъ треугольникѣ. Отсюда находимъ поверхность даннаго треугольника снова $\frac{1}{2}(S-\pi)$.

Это предложеніе доказываютъ обыкновенно другимъ образомъ. Называемъ A, B, C углы сферическаго треугольника $A\,B\,C$ (чер. 60), гдѣ бокъ $A\,B$ продолжаемъ, покуда составится полный кругъ, потомъ и другіе два бока чрезъ ихъ общую точку C до встрѣчи съ этимъ кругомъ. Кромѣ даннаго треугольника, который означимъ L, произойдутъ еще три M, N, P, такъ что сумма всѣхъ $L+M+N+P=\pi$. Между тѣмъ $L+P=C$, $L+M=A$, $L+N=B$, послѣ чего $L=\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)$. Недостатокъ этого доказательства заключается въ томъ, что величину треугольниковъ надобно предполагать, оставляя способъ измѣренія неизвѣстнымъ; да къ тому въ уравненіи $P+L=C$ собственно долженъ быть вмѣсто P оборотный его треугольникъ.

Изъ нашего предложенія слѣдуетъ уже само собой, что въ оборотныхъ треугольникахъ поверхности равны. Впрочемъ къ этому заключенію можно придти другой дорогой, не принимая въ разсужденіе самой величины треугольниковъ. Въ сферическомъ треугольникѣ ABC (чер. 61) дуги $A'\,D$, $B'\,D$, $C'\,D$, выходя перпендикулярно къ бокамъ изъ серединъ A', B', C', встрѣчаются въ общей точкѣ D, на равныхъ разстояніяхъ $A\,D$, $B\,D$, $C\,D$ отъ остреевъ. Дѣйствительно, когда вмѣсто треугольника $B\,D\,A'$ беремъ оборотный его, котораго бокъ $B\,A'$ полагаемъ на $A'\,C$ отъ точки A', то перпендикулярность $D\,A'$ въ обоихъ треугольникахъ заставитъ $B\,D$ покрывать $C\,D$. Подобнымъ образомъ можемъ доказывать, что $B\,D=A\,D$, когда въ точкѣ D пересѣкаются два перпендикула $A'\,D$, $C'\,D$. Въ эту же точку долженъ приходить и перпендикулъ $B'\,D$ (ст. 65). Такъ данный треугольникъ $A\,B\,C$ раздѣляется на равнобедренные $A\,D\,B$, $B\,D\,C$, $C\,D\,A$, которымъ отвѣчаютъ тѣже въ оборотномъ. Доказательство не перемѣняется также въ томъ случаѣ, когда точка D внѣ треугольника; но только для составленія треугольника потребуется либо вычитать одинъ равнобедренный треугольникъ изъ суммы двухъ другихъ, либо наоборотъ сумму двухъ вычитать изъ третьяго.

69. Сферическій многоугольникъ можно составить изъ треугольниковъ, когда ведемъ дуги ко всѣмъ остреямъ отъ произвольно взятой точки на сферѣ. Послѣ такого замѣчанія легко видѣть, что величина многоугольника зависитъ отъ суммы въ немъ угловъ.

Отъ точки A (чер. 62), взятой гдѣ нибудь внутри многоугольника, ведемъ дуги $A\,B$, $A\,C$, $A\,D$, $A\,E$, къ концамъ боковъ a, b, c многоугольника. Можетъ случиться, что вновь проведенная дуга, напримѣръ $A\,D$, прибавляетъ къ прежнему треугольнику $A\,B\,C$ другой $A\,C\,D$. Это будетъ тогда, какъ съ новой дугой $A\,D$ уголъ вокругъ A растетъ отъ прибавленія $D\,A\,C$. Можетъ еще случиться, что вновь праведенная дуга, напримѣръ $A\,E$, отъ прежней поверхности отнима-

етъ треугольникъ AED. Это будетъ съ тѣмъ вмѣстѣ, какъ изъ угла вокругъ A вычтется DAE. Наконецъ иногда дуга къ новому острею сливается съ проведенной прежде, какъ напримѣръ AE съ AF: тогда ни къ поверхности многоугольника, ни къ углу вокругъ A, ничего не прибавиться. Пусть теперь n число боковъ многоугольника, гдѣ сумма всѣхъ угловъ S; m число треугольниковъ, которые прикладываются, и M сумма въ нихъ угловъ; p число вычитаемыхъ треугольниковъ и P сумма въ нихъ угловъ; слѣдовательно $n - m - p$ число боковъ которые сливаются съ дугами, проведенными къ остреямъ изъ точки A. Поверхность всѣхъ треугольниковъ, которые прикладываются, должна быть $\frac{1}{2}(M - m\pi)$; подобнымъ образомъ, какъ и поверхность тѣхъ, которые вычитаются, будетъ $\frac{1}{2}(P - p\pi)$; послѣ чего величину всего многоугольника находимъ

$$\tfrac{1}{2}(M - P) - \tfrac{1}{2}(m - p)\pi.$$

Между тѣмъ когда растетъ уголъ вокругъ A, то къ угламъ многоугольника прибываютъ углы треугольниковъ, что составитъ во всѣхъ такихъ треугольникахъ M. Далѣе, съ уменьшеніемъ угла вокругъ A, изъ угловъ многоугольника вычитаются углы треугольниковъ, но съ прибавленіемъ на каждый 2π, слѣдовательно въ составъ всей суммы войдетъ $2p\pi - P$. Наконецъ всякій разъ, когда дуга, проведенная къ острею, сливается съ бокомъ, то къ угламъ многоугольника прибавляется π, всего же $(n - m - p)\pi$; да кромѣ того надобно вычесть уголъ 2π вокругъ A, непринадлежащій къ угламъ многоугольника, гдѣ сумма всѣхъ должна, слѣдовательно, быть

$$\begin{aligned} S &= M + 2p\pi - P + (n - m - p)\pi - 2\pi \\ &= M - P + (n - m + p - 2)\pi. \end{aligned}$$

Отсюда вставляя значеніе $M - P$, получимъ величину сферическаго многоугольника

$$\tfrac{1}{2}\left\{S - (n - 2)\pi\right\}.$$

Тоже бы самое нашли, когда бы взяли точку A внѣ многоугольника, или на боку между двухъ остреевъ, или въ самомъ остреѣ. Во второмъ изъ этихъ случаевъ надобно число треугольниковъ принимать единицей менѣе, вычитая въ треугольникахъ изъ суммы всѣхъ угловъ π, который при точкѣ A къ многоугольнику не принадлежитъ. Два другіе случая не требуютъ перемѣнять въ треугольникахъ сумму всѣхъ угловъ; но когда точка взята внѣ многоугольника, то съ послѣднимъ треугольникомъ не должно къ угламъ прибавлять 2π, потому что хотя здѣсь уголъ вокругъ A уменьшается, но треугольникъ лежитъ весь внѣ многоугольника. Если же точка A взята съ самомъ остреѣ, то число треугольниковъ надобно почитать менѣе двумя.

Итакъ *тѣлесный уголъ не можетъ составиться, какъ скоро число плоскосныхъ* n *и сумма всѣхъ ихъ* S *таковы, что* $S - (n - 2)\pi$ *не будетъ положительнымъ числомъ.*

Сказанное до сихъ поръ относится къ многоугольникамъ съ одинакой окружностію. Еслижъ она двойная, то соединивъ линіей наружную со внутренней, въ правѣ почитать окружность одинакой, принимая соединительную линію за бокъ, по которому должно переходить отъ одной окружности къ другой, потомъ опять возвращаться къ первой. Итакъ въ общемъ выраженіи для поверхности, число n теперь уже замѣняется на $n + 2$. Къ этому же заключенію приходимъ, разсматривая данный многоугольникъ за разность двухъ. Пусть n' число боковъ наружной окружности, n''—внутренней; пусть S' сумма угловъ въ большомъ, S'' въ меньшомъ многоугольникѣ; слѣдовательно

$$n = n' + n''$$

$$S = S' + 2n''\pi - S''.$$

Поверхность большаго многоугольника

$$\tfrac{1}{2}\{S' - (n' - 2)\pi\}$$

меньшаго

$$\tfrac{1}{2}\{S'' - (n'' - 2)\pi\}.$$

Ихъ разность даетъ поверхность многоугольника съ двойной окружностію

$$\tfrac{1}{2}\{S - n\pi\}.$$

Говоря здѣсь о раздѣленіи сферическихъ многоугольниковъ на треугольники, кстати замѣтимъ, что раздѣленіе прямолинейныхъ таковоже. Даже какъ тѣ, такъ и другіе могутъ быть раздѣлены на треугольники, которые всѣ складываются. Бокъ a въ произвольно взятомъ углѣ, продолживъ если бы понадобилось, отклоняемъ къ другому b, покуда встрѣтимъ острее гдѣ нибудь на разстояніи c отъ общей точки линій a, b. Можетъ случиться, что конецъ бока b будетъ вмѣстѣ тѣмъ самымъ остреемъ, которое встрѣчаемъ въ первый разъ, обращая линію a: тогда слѣдовательно c будетъ тоже, что b. Теперь къ двумъ бокамъ a, c третья линія между концовъ вырѣзываетъ треугольникъ, внутри котораго нѣтъ другихъ остреевъ и боковъ многоугольника. Еслибъ a, b принадлежали къ одной, тогда какъ линія c встрѣчалась бы съ другой окружностію въ многоугольникѣ, то съ отнятіемъ треугольника не нужно дѣлать уже различія между двухъ окружностей,

которыя такимъ образомъ соединяются въ одну. Еще замѣтимъ, что линія c всегда многоугольникъ съ одной окружностію раздѣляетъ на два, гдѣ въ каждомъ уже менѣе боковъ, нежели въ данномъ. Такъ слѣдовательно продолжая, можемъ наконецъ весь многоугольникъ раздѣлить на треугольники. Если полагаемъ m ихъ число, а боковъ въ многоугольникѣ n, то въ числѣ $3\,m$ всѣхъ боковъ у треугольниковъ необходимо заключается n боковъ многоугольника, которые входятъ въ треугольники по одиначкѣ, тогда какъ прочіе $3\,m - n$ въ нихъ общіе по два. Между тѣмъ многоугольникъ съ одной окружностію дѣлится на m такихъ треугольниковъ, у которыхъ общихъ боковъ должно быть $m - 1$. Послѣ чего

$$\tfrac{1}{2}(3\,m - n) = m - 1$$

откуда $m = n - 2$ самое меньшое число треугольниковъ, на которое дѣлится многоугольникъ съ n боками. Напротивъ въ многоугольникѣ съ двойной окружностію m его треугольниковъ должны быть съ m общими боками слѣдовательно здѣсь $3\,n - m = 2\,m$, откуда $m = n$. Углы всѣхъ этихъ треугольниковъ въ томъ и другомъ случаѣ составляютъ углы самаго многоугольника; а какъ въ сферическомъ треугольникѣ удвоенная поверхность равна суммѣ угловъ безъ π, то въ сферическомъ многоугольникѣ, съ n боками въ одинакой окружности, удвоенная поверхность должна быть равна суммѣ всѣхъ угловъ безъ $(n - 2)\,\pi$, какъ и выше было доказано.

70. Грани *правильнаго тѣлеснаго угла* пересѣкаютъ сферу, для которой вершина служитъ центромъ, въ правильномъ многоугольникѣ (ст. 67). *Ось* въ этомъ углѣ будетъ изъ вершины проведенная линія черезъ центръ правильнаго многоугольника. *Правильное тѣло* называется то которое граничатъ одинаковыя правильныя многоугольники, смыкаясь въ равномъ числѣ для составленія правильныхъ тѣлесныхъ угловъ. *Центръ* этихъ тѣлъ отстоитъ на равныхъ разстояніяхъ отъ остреевъ и бываетъ въ точкѣ пересѣченія какъ осей, такъ и перпендикуловъ къ гранямъ изъ ихъ центровъ. Воображаемъ двѣ смѣжныя грани A, B; ведемъ изъ центровъ перпендикулы: p, q къ плоскостямъ граней; a, b къ общему ребру c въ средину (ст. 52). Плоскость, гдѣ лежатъ a, b, пеппендикуѣярна къ c (ст. 56) и къ гранямъ A, B (ст. 59). Она должна также заключать перпендикулы p, q къ гранямъ изъ центровъ, (ст, 59), пересѣкая поверхность тѣла въ многоугольникѣ когда встрѣчаетъ всѣ ребра граней перпендикулярно въ ихъ срединѣ, либо поперемѣнно проходитъ чрезъ острее грани, потомъ уже черезъ середину ребра перпендикулярно. Первый случай тотъ, когда число боковъ у граней чотное; вто-

рой—когда нечотное. Въ первомъ случаѣ плоскость перпендикуловъ p, q, слѣдуя направленію линій a, b, встрѣчаетъ бока граней всякій разъ одинаково, разрѣзывая такимъ образомъ поверхность тѣла въ правильномъ многоугольникѣ, къ центру котораго должны сходиться прямыя p, q, (ст. 67). Если же число боковъ у граней нечотное, то плоскость по направленію линій a, b пройдетъ напередъ чрезъ острее двухъ граней A, B, такъ какъ чрезъ всѣ вершины правильныхъ тѣлесныхъ угловъ и чрезъ ихъ оси, которыхъ слѣдъ на граняхъ дѣлитъ здѣсь углы пополамъ и такимъ образомъ, приходя въ центръ, бываетъ продолженіемъ линій a, b. Далѣе плоскость, вступая въ смѣжную грань, опять проходитъ черезъ центръ и снова потомъ черезъ середину ребра перпендикулярно. Такъ въ пересѣченіи плоскости съ поверхностію тѣла происходитъ многоугольникъ, гдѣ всѣ бока равные поперемѣнно смыкаются подъ тѣмъ и другимъ угломъ. Теперь всякій разъ, когда прямая дѣлитъ который нибудь изъ этихъ угловъ пополамъ, раздѣляетъ вмѣстѣ многоугольникъ на двѣ одинаковыя части; послѣ чего такія линіи должны необходимо сходиться къ общей точкѣ, въ чемъ увѣриться легко, полагая многоугольникъ самого на себя боками равныхъ угловъ. Доказавъ это, разсматриваемъ въ многоугольникѣ три бока α, β, γ сряду (чер. 63). На нихъ должны быть центры граней въ равныхъ разстояніяхъ отъ остреевъ, какъ видѣли выше. Изъ центровъ воображаемъ перпендикулы къ бокамъ α, β, γ въ самой плоскости многоугольника. Пусть къ α, β будутъ они тѣ самые, которые называли до сихъ поръ p, q; а перпендикулъ къ третьему γ назовемъ r. Означимъ n, m линіи, которыя дѣлятъ углы пополамъ между α и β, между β и γ. Перпендикулъ q будетъ слѣдовательно выходить изъ бока β въ треугольникѣ, котораго два другіе бока n, m. Если q встрѣчаетъ m, то встрѣчаетъ въ этой же точкѣ перпендикулъ r, потому что центры граней на β, γ въ равныхъ растояніяхъ отъ общей точки β съ γ. Если же q встрѣчаетъ n, то въ этой же точкѣ встрѣчаетъ p, потому что центры граней на α, β въ равныхъ разстояніяхъ отъ общей точки α съ β. До сихъ поръ слѣдовательно справедливо, что можно сыскать двѣ смѣжныя грани, къ которымъ перпендикулы изъ центровъ пересѣкаются. Теперь, какія бы то ни были двѣ смѣжныя грани, съ общимъ ли бокомъ или только съ общей точкой, онѣ всегда принадлежатъ къ одному тѣлесному углу, находясь въ одной плоскости съ осью, на которой и могутъ только пересѣкаться. А какъ одна грань замѣняетъ другую безъ различія, тогда какъ и перпендикулъ одной заступаетъ мѣсто перпендикула другой, то всѣ вообще перпендикулы къ гранямъ этого тѣлеснаго угла должны приходить въ одну точку. Удержавъ двѣ грани съ общимъ бокомъ, можемъ перейти въ другой тѣлесный уголъ и такъ до послѣдняго. Отсюда заключаемъ, что

всѣ перпендикулы къ гранямъ изъ центровъ сходятся въ общей точкѣ, которая также будетъ общею точкой осей, въ равныхъ разстояніяхъ какъ отъ всѣхъ граней, такъ отъ всѣхъ остреевъ на тѣлѣ.

71. Тѣлесный уголъ, который составляется плоскостями черезъ бока граней къ центру, будемъ называть *угломъ при центрѣ внутри правильнаго тѣла*. Онъ долженъ быть слѣдовательно всегда кратное число отъ 2π. Пусть n число граней каждая съ m боками; пусть r число, по скольку граней смыкаются въ одинъ тѣлесный уголъ на поверхности правильнаго тѣла. Значеніе тѣлеснаго угла при центрѣ находимъ изъ его плоскостныхъ (ст. 69) и такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$\frac{2\pi}{n} = \tfrac{1}{2}\left\{ m.\frac{2\pi}{r} - (m-2)\pi \right\}$$

которое даетъ

$$n = \frac{4r}{4-(m-2)(r-2)}$$

Здѣсь какъ m число боковъ въ грани, такъ r число, по скольку граней сомкнуто, не могутъ быть менѣе 3. Съ другой стороны n не должно быть отрицательнымъ или безконечно великимъ, а слѣдовательно ни m, ни r нельзя принимать болѣе 5. Затѣмъ испытывая въ этихъ границахъ цѣлыя числа m, r, находимъ всѣ случаи:

$m=3, r=3, n=4$, тѣло называется *четыреграннникъ* (тетраедръ)

$m=3, r=4, n=8$ . . . . . *осьмигранникъ* (октаедръ)

$m=3, r=5, n=20$. . . . . *двадцатигранникъ* (икосаедръ)

$m=4, r=3, n=6$ . . . . . *шестигранникъ* (кубъ)

$m=5, r=3, n=12$. . . . . *двѣнадцатигранникъ* (додекаедръ).

Итакъ число правильныхъ тѣлъ не переходитъ за 5, тогда какъ число правильныхъ многоугольниковъ безконечно. Въ послѣднихъ число боковъ такое же, какъ угловъ тогда какъ въ правильныхъ тѣлахъ, кромѣ четырегранника, число граней съ числомъ тѣлесныхъ угловъ различны. Пусть t число въ нихъ угловъ, слѣдовательно число всѣхъ плоскостныхъ въ тѣлесныхъ при центрѣ должно быть nm тоже, что tr вокругъ осей. Такимъ образомъ находимъ

$$t = \frac{4m}{4-(m-2)(r-2)}$$

откуда число всѣхъ остреевъ:

въ четырегранникѣ	4
— кубѣ.	8
— осьмигранникѣ.	6
— двѣнадцатигранникѣ . . .	20
— двадцатигранникѣ	12

72. Предполагаемъ вообще тѣло, гдѣ число граней n, тѣлесныхъ угловъ t и всѣхъ реберъ p. Пусть внутри можетъ быть отыскана такая точка, куда плоскости черезъ бока граней приходятъ, не пересѣкая поверхность тѣла два раза, и составляя такимъ образомъ отъ каждой грани вокругъ общей точки тѣлесные углы, которыхъ сумма всѣхъ будетъ слѣдовательно 2π. Называемъ α число граней съ a боками, β съ b, γ съ c и т. д. Послѣ чего

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$$

$$2p = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots$$

Замѣчая, что сумма всѣхъ плоскостныхъ угловъ вокругъ остреевъ тѣла $2\pi t$, находимъ другое выраженіе для суммы тѣлесныхъ угловъ вокругъ общей точки внутри тѣла (ст. 69). Такъ получимъ уравненіе

$$4\pi = 2\pi t - \alpha(a-2)\pi - \beta(b-2)\pi - \gamma(c-2)\pi - \cdots$$

Отсюда съ помощію значеній n, p заключаемъ

$$p = n + t - 2 \qquad (5)$$

Правильныя тѣла принадлежатъ къ тому случаю, который мы здѣсь разсматривали. Въ нихъ уже знаемъ, какое можетъ быть число граней и тѣлесныхъ угловъ. Послѣ чего находимъ число реберъ:

Въ четырегранникѣ	6
— кубѣ	12
— осьмигранникѣ.	12
— двѣнадцатигранникѣ . . .	30
— двадцатигранникѣ	30

Зависимость между собой въ тѣлѣ числа граней съ числомъ реберъ и тѣлесныхъ угловъ первый Эйлеръ сдѣлалъ извѣстнымъ въ запискахъ С. Петербургской

Академіи 1758 года; потомъ другое доказательство далъ Лежандръ (Elémens de Géomètrie); наконецъ Коши (Journal de l' école polyt. Tome IX, p. 76). Между тѣмъ не должно принимать это предложеніе во всей обширности. Напримѣръ тѣла гдѣ находятся грани съ двойной окружностію, представляетъ исключеніе. Если поверхность тѣла состоитъ изъ шести полныхъ треугольниковъ: $A\,B\,C$, $A\,B\,D$, $A\,C\,D$, $A'\,B'\,C'$, $A'\,B'\,D'$, $A'\,C'\,D'$ (чер. 64), съ однимъ неполнымъ $B\,C\,D$, гдѣ внутренняя окружность означаетъ вырѣзанный треугольникъ $B'\,C'\,D'$, то здѣсь числа $p=12, n=7, t=8$ не повѣряютъ уравненія (5).

74. Чтобы найти во всякомъ тѣлѣ, какъ число реберъ опредѣляется числомъ граней и тѣлесныхъ угловъ, надобно составлять многоугольникъ изъ треугольниковъ, а многогранникъ изъ четырегранниковъ. Такъ можно прямо придти къ уравненію (5) для правильныхъ.

Прямолинейный многоугольникъ раздѣляется на треугольники, которые, вокругъ одной точки на тойже плоскости, частію складываются, частію вычитаются, какъ мы видѣли подобное составленіе на сферѣ (ст. 70), будетъ ли многоугольникъ съ одной наружной окружностію или также съ внутренними. Стоитъ только соединять изъ этихъ послѣднихъ каждую съ наружной и потомъ разсматривать соединительныя прямыя за сомкнутые бока тогоже многоугольника (ст. 69). Подобно тому какъ многоугольникъ раздѣляется на треугольники, всѣ многогранныя тѣла дѣлятся на четырегранники. Предполагаемъ тѣло съ одной только наружной поверхностію, раздѣленной на треугольники. Ведемъ черезъ ихъ бока плоскости къ одной, гдѣ нибудь взятой точкѣ, составляя такимъ образомъ вокругъ нея тѣлесные углы, а съ треугольниками на поверхности четырегранники, которыхъ соединеніе производитъ также тѣло, какъ треугольники даютъ его поверхность. Если грань раздѣлена на треугольники линіями, проведенными къ остреямъ отъ точки въ тойже плоскости, то четырегранники составляются сложеніемъ и вычитаніемъ ихъ, вмѣстѣ съ треугольниками, такъ что съ возрастаніемъ линейнаго угла вокругъ точки на плоскости, прибываетъ плоскостной уголъ вокругъ линіи, которая соединяетъ общую точку треугольниковъ съ общей точкой четырегранниковъ. Какъ изъ треугольниковъ слѣдовательно происходитъ грань на поверхности, такъ и четырегранники соединяются въ одно тѣло, которое называютъ *пирамида*, гдѣ треугольники—*бока*, смыкаются въ одну точку—*вершину*, прилагая затѣмъ всѣ къ остальной грани—*основанію*. Четырегранникъ тоже принадлежитъ къ пирамидамъ и называется *трехстороннеи*, тогда какъ прочія пирамиды по числу боковъ бываютъ: *четыреугольная*, *пятиугольная* и т. д. Теперь когда пирамиды

составились, то слѣдуетъ ихъ соединеніе, которое бы производило данное тѣло. Ясно, что здѣсь надобно складывать или вычитать пирамиды, смотря по тому, растутъ или уменьшаются тѣлесные углы при вершинѣ. Отсюда заключаемъ: *тѣло съ гранями происходитъ отъ соединенія трехсторонних пирамидъ* вокругъ ихъ общей вершины, когда вновь прибавленная къ связи прежнихъ пирамида всякій разъ покрываетъ одинъ, два или три бока, выходя своимъ основаніемъ на поверхность, гдѣ треугольникъ ея прилегаетъ однимъ, двумя или всѣми боками къ связи прежнихъ. Даже раздѣлить многограникъ можно на такія пирамиды, которыя всѣ складываются, подобно тому какъ это бываетъ въ раздѣленіи многоугольника на треугольники (ст. 69). Именно, начиная съ какого нибудь плоскостнаго угла, надобно грань отклонять къ другой, покуда встрѣтимъ острее, которое принявъ за вершину, а самую грань въ прежнемъ ея положеніи за основаніе, выдѣляемъ уже пирамиду. Такъ продолжая, наконецъ и все тѣло раздѣляемъ на пирамиды, которыя, вмѣстѣ съ тѣмъ какъ ихъ основанія дѣлятся на треугольники, сами подраздѣляются на трехсторонніе.

Означаемъ n число граней, p реберъ и t тѣлесныхъ угловъ, разумѣя здѣсь подъ гранями всѣ безъ исключенія треугольники на поверхности тѣла, подъ ребрами всѣ бока треугольниковъ, а подъ тѣлесными углами всѣ тѣ, которые происходятъ отъ соединенія треугольниковъ вокругъ одной точки. Далѣе, допускаемъ уменьшеніе въ числахъ n, p, t только то, которое должно быть необходимымъ слѣдствіемъ отъ покрытія боковъ у пирамиды во всякомъ случаѣ. Когда теперь новую пирамиду прикладываемъ однимъ бокомъ, то число граней n увеличивается двумя, число тѣлесныхъ угловъ t однимъ, число реберъ p тремя, слѣдовательно $p—n—t$ остается тоже. Когда пирамиду прикладываемъ двумя гранями вмѣстѣ, то p, t, n не перемѣняются. Когда наконецъ пирамиду прикладываемъ тремя гранями, то n, t, p дѣлаются $n—2$ $t—1$, $p—3$, такъ что $p—n—t$, будучи постоянной съ прибавленіемъ пирамиды, не должна слѣдовательно перемѣняться также съ отнятіемъ пирамидъ. Въ четыреграннике разность эту находимъ 2, послѣ чего во всѣхъ уже тѣлахъ съ треугольными гранями должны принимать $p—n—t=2$. Остается разсмотрѣть соединеніе нѣсколькихъ треугольниковъ въ одну грань. Когда два треугольника принадлежатъ къ одной плоскости, то числа n, p дѣлаются $n—1, p—1$, тогда какъ число t не перемѣняется, Вообще когда нѣсколько смѣжныхъ треугольниковъ случатся въ одной плоскости, то число тѣлесныхъ угловъ t останется тоже, тогда какъ n, p уменьшатся равно. Если же всѣ m треугольниковъ вокругъ точки составляютъ одну плоскость, то числа n, t, p дѣлаются $n — m + 1, t — 1, p — m$. Наконецъ. если m треугольниковъ на плоскости состав-

ляютъ многоугольникъ съ двойной окружностію, то числа n, t, p въ этотъ разъ будутъ $n - m + 1, t, p - m$.

Итакъ уравненіе (5) справедливо для всякаго тѣла, какъ скоро въ немъ нѣтъ граней съ двойной окружностію, или когда не составляютъ его два тѣла прикосновеніемъ только своихъ остреевъ и реберъ.

Къ уравненію (5) присоединивъ другое (ст. 71)

$$n\,m = t\,r$$

къ тому замѣчая, что въ правильномъ тѣлѣ $2\,p = n\,m$, легко находимъ опять уравненіе (4).

74. *Сумма двухъ угловъ въ сферическомъ треугольникѣ бываетъ вмѣстѣ съ суммою двухъ противоположныхъ боковъ* $> \pi, = \pi, < \pi$.

Въ $\triangle A\,B\,C$ (чер. 65) пусть сумма двухъ боковъ $A\,B + A\,C = \pi$. Продолжаемъ ихъ черезъ точки B, C до новой встрѣчи въ A', Такъ составится другой треугольникъ $A'BC$ изъ равныхъ боковъ съ прежнимъ, именно бокъ BC общій; далѣе $A'\,B = A\,C, A'\,C = A\,B$ (ст. 33). Треугольники $A\,B\,C, A'\,B\,C$ одинаковы, въ чемъ можемъ увѣриться, наложивъ одинъ на другой равными углами при точкахъ A, A'. Отсюда слѣдуетъ равенство двухъ угловъ $A\,C\,B, A'\,B\,C$ потомъ $\angle\,A\,C\,B + \angle\,A\,B\,C = \angle\,A'\,B\,C + \angle\,A\,B\,C = \pi$.

Вмѣсто точки B беремъ другую B' на томъ же боку $A\,B$ ближе къ A. Составится треугольникъ $AB'C$, гдѣ $A\,C + AB' < \pi$. Между тѣмъ углы $ACB' + A\,B'\,C = A\,C\,B - B\,C\,B' + \pi - B\,B'\,C = 2\,\pi - A\,B\,C - B\,C\,B' - B\,B'\,C < \pi$ (ст. 68).

На дугѣ $A\,C\,A'$ беремъ точку C' ближе къ A', нежели C. Произойдетъ треугольникъ $A\,B\,C'$, гдѣ сумма боковъ $A\,B + A\,C' < \pi$. Имъ противоположные углы $A\,C\,B + A\,B\,C' = A\,C\,B + A\,B\,C' + C\,B\,C' = A\,C'\,B + B\,C\,C' + CBC' > \pi$ (ст. 68).

Отсюда слѣдуетъ:

Въ сферическомъ треугольникѣ внѣшній уголъ отъ продолженія бока бываетъ болѣе, равенъ или менѣе внутренняго, смотря по тому, сумма двухъ боковъ, за исключеніемъ имъ общаго, $> \pi, = \pi, < \pi$. Въ $\triangle A\,B\,C$ (чер. 66) пусть $B\,D$ продолженіе бока $B\,C$ черезъ точку B. Произойдетъ уголъ $A\,B\,D > ACB$, когда $A\,B + A\,C > \pi$; $A\,B\,D = A\,C\,B$, когда $A\,B + A\,C = \pi$, $A\,B\,D < A\,C\,B$, когда $A\,B + A\,C < \pi$. Также $A\,B\,D > B\,A\,C$, когда $A\,C + B\,C > \pi$; $A\,BD = B\,A\,C$, когда $A\,C + B\,C = \pi$; $A\,B\,D < B\,A\,C$, когда $A\,C + B\,C < \pi$.

Когда въ сферическомъ треугольникѣ сумма каждыхъ двухъ боковъ $<\pi$, *то прямой или тупой уголъ можетъ быть одинъ только.* Напримѣръ это бываетъ въ треугольникахъ, гдѣ каждый бокъ менѣе $\frac{1}{2}\pi$.

75. *Когда въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ* $<\pi$, *то другой вмѣстѣ съ противоположнымъ угломъ* $>\frac{1}{2}\pi, =\frac{1}{2}\pi, <\frac{1}{2}\pi$.

Пусть въ $\triangle ABC$ (чер. 67) бокъ $AB<\pi$, при немъ углы CAB, CBA прямые, слѣдовательно два другіе бока $AC=\frac{1}{2}\pi, BC=\frac{1}{2}\pi$ (ст. 59). Дуга AC отклонившись къ AB, покуда выходитъ изъ тойже точки A, не можетъ пересѣкать бокъ AB, не встрѣтивъ напередъ дуги BC гдѣ нибудь въ C'. Отклонившись по другую сторону, пересѣчетъ она продолженіе дуги BC гдѣ нибудь въ C'', прежде нежели достигнетъ продолженіе дуги AB. Итакъ въ $\triangle ABC'$ бокъ $BC'<\frac{1}{2}\pi$ вмѣстѣ съ противоположнымъ угломъ; въ $\triangle ABC$ бокъ $BC=\frac{1}{2}\pi$, тогда какъ противоположный уголъ $CAB=\frac{1}{2}\pi$, въ $\triangle ABC''$ бокъ $BC''>\frac{1}{2}\pi$, когда противоположный уголъ $BAC'>\frac{1}{2}\pi$.

Отсюда слѣдуетъ, что *перпендикулъ* $<\frac{1}{2}\pi$ *падаетъ въ острый уголъ; перпендикулъ* $>\frac{1}{2}\pi$ — *въ отверстіе тупаго.*

76. *Въ сферическомъ треугольникѣ противъ большаго бока бываетъ уголъ болѣе либо менѣе, смотря по тому, третій бокъ* $<\pi$ *или* $>\pi$.

Называемъ a, b, c бока въ треугольникѣ (чер. 68) противъ угловъ A, B, C, полагая $c>a, b<\pi$. Продолжаемъ b, c черезъ острея B, C покуда встрѣтятся въ точкѣ A'. Такъ произойдетъ $\triangle A'BC$, сумма двухъ боковъ $a+\pi-c<\pi$, слѣдовательно уголъ $BA'C=A<C$ (ст. 74).

Если же бокъ $b>\pi$, то замѣнивъ его дополненіемъ къ цѣлому кругу, получимъ треугольникъ, гдѣ противъ боковъ a, c будутъ углы $\pi-A, \pi-C$, а третій бокъ $2\pi-b<\pi$, слѣдовательно $\pi-C>\pi-A$, откуда $A>C$.

Обратное предложеніе подразумѣвается здѣсь уже само собою. *Въ сферическомъ треугольникѣ противъ большаго угла бокъ болѣе, когда къ тому третій бокъ* $<\pi$, вопервыхъ потому, что неравенство боковъ должно быть вмѣстѣ съ неравенствомъ угловъ (ст. 64); далѣе потому, что всякое другое предположеніе было бы противно доказанному выше.

77. *Въ сферическомъ треугольникѣ сумма двухъ боковъ болѣе того третьяго, который самъ менѣе* π.

Въ $\triangle ABC$ (чер. 69) называемъ a, b, c бока противъ остреевъ A, B, C полагая къ тому $b<\pi$, слѣдовательно также уголъ $B<\pi$ (ст. 46). Продолжаемъ

a черезъ точку C, покуда продолженіе $C\,C'$ сдѣлается b. Такъ составится треугольникъ $A\,C\,C'$, гдѣ противъ боковъ b углы $C\,A\,C'$, $A\,C'\,C$ равны (ст. 64), слѣдовательно уголъ $B\,A'\,C > B\,C'\,A$; потомъ въ $\triangle\,A\,B\,C'$ бокъ $A\,C < \pi$ (ст. 46), бокъ $B\,C > A\,B$ (ст. 76), или $a + b > c$.

Такъ какъ разстояніе двухъ точекъ на сферѣ, взятыхъ не на концахъ одного поперечника, менѣе полкруга, то замѣняя всегда дугу двумя другими между тѣми же точками, должны заключить, что *дуга большаго круга представляетъ самое меньшое разстояніе на сферѣ двухъ точекъ.*

78. *Перпендикулъ на сферѣ, будучи менѣе* $\frac{1}{2}\pi$, *даетъ кратчайшее разстояніе точки до круга, такъ что всякая дуга между точкой и кругомъ тѣмъ болѣе, чѣмъ она ближе къ противоположному перпендикулу, который измѣряетъ самое большое разстояніе до круга и бываетъ всегда* $> \frac{1}{2}\pi$.

Пусть, $A\,B\,C$ полкруга (чер. 70), на которомъ стоитъ еще половина круга $C\,D\,A$ перпендикулярно, такъ что часть его $D\,A < \frac{1}{2}\pi$, другая $C\,D > \frac{1}{2}\pi$. Вершину перпендикула $D\,A$ съ какой нибудь точкой B на первомъ полукругѣ соединяемъ дугой $D\,B$. Составится прямоугольный треугольникъ $D\,B\,A$, гдѣ бока $B\,A < \frac{1}{2}\pi$, $B\,D < \frac{1}{2}\pi$, уголъ $D\,B\,A < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 75), слѣдовательно бока $D\,B > D\,A$ (ст. 76). Теперь когда возьмемъ другую точку B' на томъ же полукругѣ $A\,B\,C$, но далѣе нежели B отъ A, то произойдетъ $\triangle\,B\,D\,B'$, гдѣ углы $D\,B\,B' > \frac{1}{2}\pi$, $D\,B'\,B < \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $B'\,D > B\,D$. Такимъ образомъ дуга $B\,D$ растетъ, подвигаясь отъ A по кругу до противоположной точки C, которой разстояніе CD до точки D самое большое дѣлается перпендикулярнымъ къ кругу $C\,B\,A$.

Это предложеніе непосредственно заключается въ одномъ изъ тѣхъ, которыя были доказаны выше (ст. 66); но здѣсь можемъ прибавить еще новое. *Кратчайшее разстояніе до круга бываетъ вмѣстѣ самый меньшой уголъ, который изъ данной точки дуга дѣлаетъ съ кругомъ.* Пусть $D\,B''$ дуга перпендикулярная къ $D\,A$, встрѣчаетъ кругъ $A\,B\,C$ въ точкѣ B''; а потому $D\,B'' = \frac{1}{2}\pi$, $A\,B'' = \frac{1}{2}\pi$ уголъ $D\,B''\,A$ равенъ дугѣ $A\,D$ (ст. 43). Теперь въ $\triangle\,D\,B\,B''$ сумма боковъ $D\,B + D\,B'' < \pi$, слѣдовательно углы $D\,B\,A > D\,B''\,A$ (ст. 74). Въ $\triangle\,D\,B''\,B'$ напротивъ $D\,B' + D\,B'' > \pi$, слѣдовательно углы $D\,B''\,A < D\,B'\,A$ (ст. 74).

Отсюда слѣдуетъ. *Если въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ катетъ* $< \frac{1}{2}\pi$, *то другой вмѣстѣ съ гипотенузой бываетъ* $< \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$, $> \frac{1}{2}\pi$. *Если же катетъ* $> \frac{1}{2}\pi$, *то другой или менѣе* $\frac{1}{2}\pi$, *когда гипотенуза* $> \frac{1}{2}\pi$; *или равенъ* $\frac{1}{2}\pi$ *вмѣстѣ съ гипотенузой, или наконецъ болѣе* $\frac{1}{2}\pi$, *когда гипотенуза* $< \frac{1}{2}\pi$. Въ $\triangle\,D\,B'\,A$ катетъ $D\,A < \frac{1}{2}\pi$, другой $A\,B' > \frac{1}{2}\pi$, гипотенуза

$DB' > \frac{1}{2}\pi$. Въ $\triangle DCB'$ катетъ $DC > \frac{1}{2}\pi$, другой $CB' < \frac{1}{2}\pi$, гипотенуза $DB' > \frac{1}{2}\pi$, и т. д.

79. *Когда въ сферическомъ треугольникѣ каждый бокъ менье полкруга, то можно составить треугольникъ, гдѣ бока будутъ дополненіями до полукруга къ угламъ въ данномъ, и наоборотъ углы дополненіями къ бокамъ въ данномъ.*

Предложеніе состоитъ въ томъ, что когда $a < \pi$, $b < \pi$, $c < \pi$ бока въ треугольникѣ; A, B, C имъ противоположные углы, то можно составить треугольникъ, гдѣ $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ бока, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ углы противъ нихъ.

Замѣтимъ, что когда составленъ треугольникъ изъ боковъ A, B, $\pi - C$ съ углами противъ нихъ a, b, $\pi - c$, то стоитъ только продолжать бока A, B по другую сторону бока $\pi - C$ до встрѣчи другъ съ другомъ, чтобы получить треугольникъ съ боками $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ и съ углами противъ нихъ $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. Отъ этого послѣдняго треугольника переходимъ обратно къ треугольникамъ: или съ боками A, $\pi - B$, C и съ углами противъ нихъ a, $\pi - b$, c; или съ боками $\pi - A$, B, C и съ углами противъ нихъ $\pi - a$, b, c.

Полагаемъ напередъ $C < \frac{1}{2}\pi$, $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $c < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 78). Продолжаемъ a, c по другую сторону b, покуда продолженія сдѣлаются $\frac{1}{2}\pi - a$, $\frac{1}{2}\pi - c$ (чер. 71), которыхъ концы соединяемъ дугой B. Теперь продолжаемъ дуги b, B по другую сторону $\frac{1}{2}\pi - c$ до взаимной встрѣчи. Здѣсь составится прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой $\frac{1}{2}\pi - b$, катетами $\frac{1}{2}\pi - c$, $\frac{1}{2}\pi - B$, съ углами противъ нихъ $\frac{1}{2}\pi - a$, A. Въ этомъ треугольникѣ продолжаемъ бока $\frac{1}{2}\pi - b$, $\frac{1}{2}\pi - c$ по другую сторону бока $\frac{1}{2}\pi - B$, дѣлаемъ продолженія b, c и соединяемъ ихъ концы дугой A, которую ведемъ далѣе вмѣстѣ съ бокомъ $\frac{1}{2}\pi - B$ по другую сторону b, покуда встрѣтясь, составятъ прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой B, катетами b, $\frac{1}{2}\pi - A$, съ углами противъ нихъ c, $\frac{1}{2}\pi - a$. Не нужно принимать въ разсужденіе самое направленіе, въ которомъ слѣдуютъ здѣсь бока другъ за другомъ, потому что направленіе перемѣняется всегда въ противное съ переходомъ треугольника въ оборотный (ст. 44).

Пусть вообще $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \pi$ (чер. 72). Въ такомъ треугольникѣ должны найтись два угла острыхъ (ст. 74), напримѣръ A, B, которые по необходимости таковы въ случаѣ $c > a$, $> b$. Изъ острея C ведемъ перпендикулъ $p < \frac{1}{2}\pi$ къ боку c, который раздѣлится такимъ образомъ на двѣ части: x подъ a, $c - x$ подъ b (ст. 75), противъ частей X, $C - X$ въ углѣ C. Замѣтимъ къ этому, что здѣсь $x < \frac{1}{2}\pi$, $c - x < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 78), также $X < \frac{1}{2}\pi$, $C - X < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 75). Основываясь на доказанномъ впереди, можемъ составить два прямоугольныхъ треуголь-

ника: въ одномъ катеты $p, \frac{1}{2}\pi - X$, противъ нихъ углы $a, \frac{1}{2}\pi - x$, гипотенуза B; въ другомъ катеты $p, \frac{1}{2}\pi - C + X$, противъ нихъ углы $b, \frac{1}{2}\pi - c + x$, гипотенуза A. Прикладывая треугольникъ къ другому катетомъ p, получимъ такой, гдѣ бока $A, B, \pi - C$, углы противъ нихъ $a, b, \pi - c$. Отъ этого треугольника переходимъ, какъ замѣтили выше, къ другому, гдѣ бока будутъ $\pi - A, \pi - B, \pi - C$, углы противъ нихъ $\pi - a, \pi - b, \pi - c$, также какъ можемъ составить треугольникъ съ боками $A, \pi - B, C$ и съ углами $a, \pi - b, c$; или съ боками $\pi - A, B, C$, съ углами противъ нихъ $\pi - a, b, c$; такъ что всѣ вновь составленные здѣсь треугольники должно допускать, какъ скоро въ данномъ найдутся два бока, каждый $< \frac{1}{2}\pi$, лишь бы третій былъ $< \pi$.

Пусть $a = \frac{1}{2}\pi, b < \frac{1}{2}\pi, c = \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $A = \frac{1}{2}\pi, C = \frac{1}{2}\pi, B = b$. Продолживъ a, b по другую сторону c до пересѣченія, получимъ здѣсь треугольникъ гдѣ бока $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi - B$; углы противъ нихъ $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi - b$. Предложеніе такимъ образомъ въ этомъ случаѣ повѣряется.

Пусть $a = \frac{1}{2}\pi, b < \frac{1}{2}\pi, c > \frac{1}{2}\pi, < \pi$. На бокъ c полагаемъ отъ острея B дугу $\frac{1}{2}\pi$ (чер. 73), которой конецъ соединяемъ съ остреемъ C. Составится треугольникъ, гдѣ бока $b, B, c - \frac{1}{2}\pi$; противъ нихъ углы $\frac{1}{2}\pi, A, C - \frac{1}{2}\pi$. Къ тому здѣсь $c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi, B < \frac{1}{2}\pi, A < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 75), слѣдовательно можетъ быть и такой прямоугольный треугольникъ, гдѣ гипотенуза A, катеты $B, \pi - C$ съ углами противъ нихъ $b, \pi - c$. Продолживъ A, B по другую сторону $\pi - C$ до пересѣченія, получимъ треугольникъ съ боками $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ и съ углами противъ нихъ $\frac{1}{2}\pi, \pi - b, \pi - c$.

Пусть $a > \frac{1}{2}\pi, < \pi; b < \pi; c > \frac{1}{2}\pi, < \pi$. Продолжаемъ a, c до пересѣченія по другую сторону b. Произойдетъ треугольникъ (чер. 74) съ боками $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \pi, \pi - c < \frac{1}{2}\pi$, съ углами противъ нихъ $\pi - A, B, \pi - C$. Отъ этого треугольника можемъ слѣдовательно перейти къ другому съ боками $A, \pi - B, C$ и съ углами противъ нихъ $b, \pi - b, c$; потомъ къ треугольнику съ боками $\pi - A, \pi - B$, $\pi - C$, съ углами противъ нихъ $\pi - a, \pi - b, \pi - c$.

Такъ предложеніе доказано во всѣхъ случаяхъ для боковъ $a < \pi, b < \pi$, $c < \pi$. Отсюда легко заключить, что *въ такомъ треугольникѣ сумма всѣхъ боковъ бываетъ всегда менѣе полнаго круга* (ст. 68).

80. *Поверхность сферическаго треугольника всегда менѣе самаго меньшаго бока, когда сумма каждыхъ двухъ менѣе полукруга.*

Въ $\triangle ABC$ (чер. 75) пусть изъ трехъ боковъ a, b, c, въ случаѣ неравенства, c самый большой, a самый меньшой, или вообще c не менѣе, a не болѣе другихъ;

при томъ сумма каждыхъ двухъ $< \pi$, а слѣдовательно противъ a, b углы A, B острые (ст. 74). Перпендикулъ p изъ острея C къ боку c менѣе $\frac{1}{2}\pi$ (ст. 75); и дѣлитъ c на двѣ части: x подъ b, $c - x$ подъ a (ст. 75); далѣе b съ x, a съ $c - x$ менѣе четверти круга; $a > p$ (ст. 78). Два полукруга, $A' A B B'$, $A' C B'$ перпендикулярные къ p въ концахъ, ограничиваютъ вырѣзокъ, котораго поверхность p и въ которомъ помѣщается данный треугольникъ $A B C$, слѣдовательно поверхность этого треугольника менѣе p, тѣмъ еще менѣе нежели a.

Итакъ съ уменьшеніемъ одного бока, когда сумма двухъ другихъ $< \pi$, поверхность уменьшается въ треугольникѣ безпредѣльно, а сумма всѣхъ угловъ подходитъ къ π такъ близко, какъ угодно.

Съ уменьшеніемъ двухъ боковъ уменьшается третій бокъ безпредѣльно, потому что сумма двухъ первыхъ дѣлается болѣе послѣдняго, а сумма каждыхъ двухъ становится наконецъ постоянно $< \pi$. Отсюда заключаемъ, что съ уменьшеніемъ двухъ боковъ поверхность треугольника можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой, а сумма въ немъ угловъ какъ угодно близкой къ π.

ГЛАВА VI.

ОДИНАКОВОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

81. Одинаковость двухъ треугольниковъ требуетъ какъ одинаковаго расположенія, такъ и равенства всѣхъ угловъ и боковъ въ одномъ съ углами и боками въ другомъ. Однакожъ иногда, при томъ же расположеніи, равенство только нѣкоторыхъ *частей*—такъ будемъ называть вообще въ треугольникахъ и многоугольникахъ бока съ углами—предполагаетъ уже равенство прочихъ, и производитъ одинаковость самыхъ треугольниковъ. Изслѣдованіе подобныхъ случаевъ составляетъ предметъ этой главы, гдѣ для краткости будемъ всегда говорить, какихъ и сколько частей дается равныхъ, разумѣя собственно, что всѣ такія части въ одной фигурѣ равны такимъ же частямъ въ другой. Различая къ тому фигуры буквами, станемъ одинаковость выражать знакомъ $\cong$.

Въ прямолинейномъ многоугольникѣ все равно, какому направленію ни слѣдуютъ бока въ своемъ порядкѣ, потому что направленіе переходитъ одно въ другое съ обращеніемъ плоскости на противоположную сторону. Въ сферическихъ многоугольникахъ это направленіе мѣняется въ переходѣ къ оборотпому многоугольнику, который отвѣчаетъ вершинному тѣлесному углу, когда плоскости продолжаютси черезъ центръ сферы. Говоря здѣсь объ одинаковости будемъ однакожъ изъ двухъ оборотныхъ многоугольниковъ безъ различія брать одинъ вмѣсто рдругаго.

Составленіе многоугольниковъ, прямолинейныхъ и сферическихъ, представляемъ себѣ, когда прикладываемъ всякій разъ подъ извѣстнымъ угломъ одинъ бокъ за другимъ покуда наконецъ послѣдній сомкнется съ первымъ. Бока съ углами такимъ образомъ должны быть тѣ существенныя части, которыя производятъ одинаковость и съ ней опредѣляютъ всѣ прочія принадлежности, также какъ и всѣ вообще свойства многоугольника. Ясно, что послѣдній изъ боковъ съ его на-

клоненіями къ двумъ сосѣднимъ въ многоугольникѣ, опредѣляется величиною всѣхъ другихъ угловъ и боковъ.

Составленіе многоугольниковъ, изъ его боковъ съ углами по порядку, приводитъ такимъ образомъ къ предложеніямъ.

Многоугольники одинаковы, когда въ числѣ всѣхъ n *боковъ будутъ* n—1 *равныхъ съ* n—2 *углами при нихъ.*

Многоугольники одинаковы, когда въ числѣ всѣхъ n *боковъ,* n—2 *равныхъ съ* n—1 *углами при нихъ.*

О треугольникахъ, прямолинейныхъ и сферическихъ, въ особенности должно сказать.

Треугольники одинаковы, когда два бока съ угломъ между ними равны.

Треугольники одинаковы, когда бокъ съ углами при немъ равны.

Отсюда слѣдуетъ.

Прямоугольные треугольники одинаковы, когда катеты равны, потому что равенство прямыхъ угловъ подразумѣвается.

Прямоугольные треугольники одинаковы, когда катетъ и при немъ уголъ равны.

Въ кругѣ противъ равныхъ хордъ углы равны, потому что равенство полупоперечниковъ дополняетъ здѣсь одинаковость треугольниковъ.

82. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда три бока равны.*

Въ треугольникахъ $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ (чер. 76) предполагаемъ бока $A\,B = A'\,B'$, $A\,C = A'\,C'$, $B\,C = B'\,C'$. Пусть $A\,B$ тотъ изъ нихъ, при которомъ углы A, B острые (ст. 49). Прикладываемъ $\triangle A'\,B'\,C'$ къ $\triangle A\,B\,C$, бокомъ $A'\,B'$ къ равному съ нимъ $A\,B$, точкой A' въ A, B' въ B. Соединяемъ теперь острея C, C' линіей, которая должна проходить между концовъ A, B перпендикулярно къ боку $A\,B$, потому что служитъ основаніемъ въ двухъ равнобедренныхъ треугольникахъ $A\,C\,C'$, $B\,C\,C'$, гдѣ бокъ $A\,B$ проходитъ чрезъ вершины (ст. 52). Въ треугольникахъ $A\,C\,B$, $A\,C'\,B$ углы при точкахъ C, C' равны, составляясь изъ равныхъ частей (ст. 50), слѣдовательно самые треугольники одинаковы (ст. 81), это значитъ $\triangle A\,C\,B \cong \triangle A'\,C'\,B'$.

83. *Сферическіе треугольники одинаковы, когда три бока равны.*

Въ треугольникахъ $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ (чер. 77) полагаемъ бока $A\,B = A'\,B'$ $A\,C = A'\,C'$, $B\,C = B'\,C'$ Прикладываемъ $\triangle A'\,B'\,C'$ къ $\triangle A\,B\,C$, точкой A' въ

A, B' въ B, потомъ острея C, C' соединяемъ дугою, которая пусть пересѣкаетъ бокъ AB. Составятся два равнобедренныхъ треугольника $A\,C\,C', B\,C\,C'$, гдѣ при точкахъ C, C' углы равны (ст. 64), слѣдовательно въ треугольникахъ $ACB, AC'B$ тоже; какъ и всякій разъ, будетъ ли дуга проходить внутри треугольниковъ, или внѣ (чер. 78), или на конецъ сливаясь съ однимъ изъ боковъ (чер. 79). Во всѣхъ случаяхъ дѣлается $\triangle A\,B\,C \cong \triangle A\,B\,C' \cong A'\,B'\,C'$ (ст. 81).

84. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны два бока съ угломъ противъ большаго.*

Пусть въ треугольникахъ $A\,B\,C, A'\,B'\,C'$ (чер. 80) бока $A\,B = A'\,B', AC = A'\,C', A\,C > B\,C$, углы $B = B'$. Полагаемъ $\triangle A'\,B'\,C'$ на $\triangle A\,B\,C$ меньшимъ бокомъ $B'\,C'$ на $B\,C$, точкой B' въ B, C' въ C. Тогда бокъ $A'\,B'$ слѣдуя направленію $B\,A$ долженъ окончиться въ A, потому что точка A' не можетъ быть ни по ту, ни по другую сторону. Иначе составился бы $\triangle A\,C\,A'$ равнобедренный съ острыми углами при основаніи $A\,A'$, изъ которыхъ къ одному смѣжный тупой принадлежалъ бы треугольнику $A\,BC$, либо треугольнику $A'BC$, гдѣ былъ бы вмѣстѣ самымъ большимъ угломъ (ст. 49), тогда какъ онъ лежитъ противъ меньшаго бока $B\,C$, либо $B'\,C'$ (ст. 54).

Отсюда слѣдуетъ, что *прямоугольные треугольники одинаковы, когда катетъ и гипотенуза равны*, потому что прямой уголъ не только равенъ, но лежитъ еще противъ большаго бока.

85. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны два бока съ угломъ противъ меньшаго; при томъ оба треугольники вмѣстѣ остроугольные, либо тупоугольные.*

Пусть въ треугольникъ $A\,B\,C, A'\,B'\,C'$ (чер. 81) бока $AC = A'C', BC = B'C'$, $A\,C > B\,C$, углы $A = A'$. Должно предполагать углы: либо всѣ острые либо которой нибудь тупой а два другихъ острые. Въ первомъ случаѣ треугольники покрываютъ другъ друга, когда переносимъ точкой A' въ A, C' въ C. Третья B' не можетъ помѣщаться ни между двухъ A, B, ни по другую сторону B на продолженіи $A\,B$. Иначе произошелъ бы треугольникъ $C\,B\,B'$ равнобедренный съ острыми углами при основаніи $B\,B'$, изъ которыхъ одинъ былъ бы смѣжный съ тупымъ либо въ $\triangle A\,B\,C$, либо въ $\triangle A\,B'\,C$.

Если въ треугольникахъ $A\,B\,C, A'\,B'\,C'$ одинъ уголъ тупой, такъ онъ долженъ быть противъ самаго большаго бока, слѣдовательно либо противъ $AC = AC'$, либо противъ $A\,B$ и $A'\,B'$. Въ томъ и другомъ случаѣ при наложеніи треуголь

никовъ точка B' не можетъ приходить въ другое мѣсто, кромѣ B, чтобы не составился равнобедренный треугольникъ $B\,C\,B'$, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ принадлежитъ либо треугольнику $A\,B\,C$ противъ $A\,C$, либо треугольнику $A\,B'\,C$ противъ $A\,C$, либо производитъ смѣжный уголъ тупой въ данномъ треугольникѣ, сверхъ тупаго угла при точкахъ C, C'.

Итакъ если треугольники $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ не должны быть одинаковы, хотя въ нихъ бока $A\,C = A'\,C'$, $B\,C = B'\,C'$, $< A = < A'$, то разность ихъ произойти можетъ отъ того только, что въ одномъ противъ большаго бока тупой уголъ, тогда какъ въ другомъ острый. Пусть напримѣръ уголъ $B < \frac{1}{2}\pi$ въ $\triangle A\,B\,C$, тогда какъ $A\,C > B\,C$. Описывая кругъ около C полупоперечникомъ $C\,B$, находимъ еще точку B пересѣченія между концовъ A, B (ст. 51). Такъ составится треугольникъ $AB'C$, который долженъ быть одинаковъ съ $\triangle A'\,B'\,C'$ и гдѣ слѣдовательно B' тупой уголъ.

86. *Сферическіе треугольники одинаковы, когда равны два бока съ угломъ противъ равныхъ боковъ, но подъ условіемъ, чтобъ углы противъ другихъ равныхъ боковъ были вмѣстѣ* $< \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$, $> \frac{1}{2}\pi$.

Пусть въ треугольникахъ $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ (чер. 82) бока $A\,B = A'\,B'$, $B\,C = B'C'$, $\angle A = \angle A'$. Полупоперечникомъ $B\,C$ чертимъ на сферѣ кругъ около точки B. Онъ можетъ коснуться дуги AC въ одной только точкѣ C, либо кромѣ C пересѣкать еще въ одной тотъ кругъ, котораго AC составляетъ часть (ст. 66). Въ первомъ случаѣ $B\,C$ перпендикулярна къ AC, также какъ и въ $\angle A'B'C'$ бокъ $B'C'$ къ $A'C'$. Въ другомъ случаѣ, будетъ ли точка пересѣченія C' между концовъ $A'\,C$ или въ C'' на продолженіи AC чрезъ острее C, всегда произойдетъ равнобедренный треугольникъ $B\,C\,C'$ или $B\,C\,C''$, гдѣ углы при основаніи равны. Далѣе треугольникъ $A\,B\,C'$ не можетъ быть одинаковъ съ $\triangle A'\,B'\,C'$, потому что когда уголъ $B'\,C'\,A' = B\,C'\,A$, то $\angle B'\,C'\,A' + \angle B\,C\,A = \angle B\,C'\,A + \angle B\,C\,A = \pi$. Треугольникъ $A'\,B'\,C'$ также не можетъ быть одинаковъ съ $\triangle A\,B\,C''$, потому что какъ скоро $\angle B'\,C'\,A' = \angle B\,C''\,A$, то $\angle B'\,C'\,A' + \angle BCA = \angle BC''A + \angle BCA = \pi$. Остается необходимой одинаковость только треугольниковъ $A'\,B'\,C'$ съ $A\,B\,C$.

Отсюда слѣдуетъ *одинаковость треугольниковъ, когда равны два бока съ угломъ прямымъ или тупымъ противъ одного изъ этихъ боковъ, которыхъ сумма предполагается менѣе полкруга*, потому что противъ другаго бока въ обоихъ треугольникахъ долженъ быть острый уголъ (стр. 74).

87. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны бокъ, при немъ уголъ и другой противъ него.*

Пусть въ треугольникахъ $A\,B\,C, A'\,B'\,C'$ (чер. 83) бокъ $A\,C = A'\,C'$, углы $A = A', B = B'$. Когда переносимъ $\triangle A'\,B'\,C'$ на $\triangle A\,B\,C$ равными боками $A\,C = A'C'$, точкой A' въ A, то бокъ $A'B'$ пойдетъ по направленію AB и долженъ окончиться въ точкѣ B. Иначе составится треугольникъ $B\,C\,B'$, гдѣ одинъ изъ равныхъ угловъ B, B' будетъ при линіи BB' внутренній, а другой внѣшній, который однакожъ всегда болѣе внутренняго (ст. 53).

Итакъ *прямоугольные треугольники одинаковы, когда равны гипотенуза съ однимъ острымъ угломъ, либо катетъ съ противоположнымъ угломъ*, потому что равенство прямыхъ угловъ дополняетъ одинаковость.

88. *Сферическіе треугольники одинаковы, когда въ нихъ равны: бокъ, при немъ уголъ и другой противъ него, подъ условіемъ, чтобы сумма двухъ другихъ боковъ противъ равныхъ угловъ не составляла полкруга.*

Пусть въ треугольникахъ $A\,B\,C, A'\,B'\,C'$ (чер. 84) бокъ $A\,B = A'\,B'$, углы $A = A', C = C'$. Когда полагаемъ $\triangle A'\,B'\,C'$ на $\triangle A\,B\,C$ равными боками $A'B'$ на $A\,B$, то бокъ $A'\,C'$ начинаясь въ A, пойдетъ по $A\,C$ и не можетъ оканчиваться ни въ C' по сю, ни въ C'' по ту сторону точки C на продолженіи $A\,C$. Иначе составится либо треугольникъ $C\,B\,C'$, либо $C\,B\,C''$, гдѣ по равенству угловъ внѣшняго съ внутреннимъ при дугѣ $A\,C'$ надобно, чтобы сумма противоположныхъ боковъ, слѣдовательно $B\,C + B'\,C'$, составляла π (ст. 74).

Если при томъ уголъ $C = \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $C' = \frac{1}{2}\pi$, то треугольники $B\,C\,C', B\,C\,C''$ дѣлаясь равнобедренными, требуютъ, чтобы $B\,C = B'\,C' = \frac{1}{2}\pi$, также $A\,B = A'\,B' = \frac{1}{2}\pi$, наконецъ уголъ $A = A' = \frac{1}{2}\pi$ (ст. 62). Итакъ *прямоугольные сферическіе треугольники одинаковы, когда равны гипотенуза съ однимъ острымъ угломъ.*

89. *Сферическіе треугольники одинаковы съ тремя равными углами.*

Пусть въ треугольникахъ $A\,B\,C, A'\,B'\,C'$ (чер. 85) углы $A = A', B = B', C = C'$. Это предполагаетъ поверхности треугольниковъ равныя (ст. 68), слѣдовательно когда переносимъ $\triangle A'\,B'\,C'$ на $\triangle ABC$ боками двухъ равныхъ угловъ, напримѣръ угловъ A, A', то неодинаковость треугольниковъ требуетъ, что бы каждый выходилъ вонъ изъ другаго. Пусть $A'\,B' < A\,B$, слѣдовательно $A'\,C' > AC$, такъ что $B\,C'$, начинаясь на боку AB внутри треугольника, пересѣкаетъ BC въ точкѣ D, потомъ уже въ точкѣ C' встрѣчаетъ продолженіе AC за точку C. Произойдутъ два треугольника $B\,D\,B', C\,D\,C'$, гдѣ $B\,D + B'\,D = \pi, C\,D + C'\,D' = \pi$ (ст. 74), слѣдовательно $B\,C + B'\,C' = 2\,\pi$; но какъ $B\,C, B'C'$ вмѣстѣ съ угломъ

A должны быть либо $\angle \pi$, либо $= \pi$, либо $> \pi$ (ст. 46), то можно допускать только $B\,C = B'\,C' = \pi$. Однакожъ и въ этомъ послѣднемъ случаѣ треугольники $A\,B\,C, A'\,B'\,C'$, дѣлаясь вырѣзками сферы, бываютъ одинаковы при равенствѣ плоскостныхъ угловъ.

90. *Въ прямолинейномъ треугольникѣ сумма всѣхъ угловъ не можетъ быть* $> \pi$.

Называемъ въ треугольникѣ сумму всѣхъ угловъ S. Въ случаѣ неравенства полагаемъ A самый меньшій или вообще не болѣе двухъ другихъ. Мы видѣли (ст. 53), что всякій треугольникъ $A\,B\,C$ (чер. 46) можетъ быть обращенъ въ другой $A\,F\,C$, гдѣ сумма всѣхъ угловъ остается таже, тогда какъ сумма которыхъ нибудь двухъ $A\,B\,C + A\,C\,B$ изъ перваго треугольника, составляетъ одинъ уголъ $A\,C\,F$ въ новомъ, слѣдовательно третій $B\,A\,C$ переходитъ сюда раздѣляясь на два $A\,F\,C, F\,A\,C$. Итакъ пусть $A\,B\,C$ тотъ самый треугольникъ, гдѣ сумма всѣхъ угловъ S; затѣмъ уголъ $B\,A\,C = A$ не болѣе двухъ другихъ. Въ новомъ треугольникѣ $A\,F\,C$ сумма всѣхъ угловъ опять S; одинъ изъ угловъ при точкахъ A, F долженъ быть $\leqq \frac{1}{2} A$. Между тѣмъ въ треугольникѣ $A\,C\,F$

$$\begin{aligned} S &= \angle A\,C\,F + \angle F\,C\,A + \angle A\,F\,C \\ &= \pi - \angle F\,C\,D + A \\ &< \pi + A. \end{aligned}$$

Раздѣляя въ послѣднемъ треугольникѣ бокъ пополамъ противъ угла $\leqq \frac{1}{2} A$, и продолжая такимъ образомъ все превращать одинъ треугольникъ въ другой, должны заключить вообще, что

$$S < \pi + 2^{-n} . A;$$

гдѣ n цѣлое положительное число можетъ быть какъ угодно велико, съ этимъ вмѣстѣ $2^{-n} . A$ какъ угодно мало; послѣ чего нельзя допускать чтобъ $S - \pi$ былъ какой нибудь положительный уголъ, но дозволяется только принимать или $S = \pi$, или $S < \pi$.

Это предложеніе первый доказывалъ Лежандръ въ своей Геометріи (Elémens de Géometrie), замѣчая напередъ, что въ треугольникѣ бокъ растетъ вмѣстѣ съ противоположнымъ угломъ. Такъ въ $\triangle A\,B\,C$ (чер. 84) пусть бокъ $B\,C \gtreqless A\,B$, слѣдовательно уголъ $B\,C\,A$ острый. Даемъ боку BC новое положеніе BD уменьшивъ уголъ $A\,B\,C$. Произойдутъ два треугольника: равнобедренный $B\,C\,D$ съ острымъ угломъ $B\,D\,C$, да треугольникъ $B\,D\,A$ съ острымъ угломъ $B\,D\,A$ про-

тивъ бока AB, слѣдовательно сумма угловъ $ADB + BDC < \pi$. Это значитъ, что точки B,D находятся на противоположныхъ сторонахъ линіи AC, которая съ AD и съ CD составляетъ такимъ образомъ треугольникъ ADC, гдѣ уголъ $ACD = BDC - BCA < ADC$; послѣ чего бокъ $AD < AC$ (ст. 54). Теперь называемъ b, c, бока въ треугольникѣ ABC противъ остреевъ B, C. Бокъ b продолжаемъ въ одну сторону черезъ точку C, а на продолженіи кладемъ непрерывно b, подвигая вмѣстѣ $\triangle ABC$ по направленію отъ A къ C, такъ что во всѣхъ одинаковыхъ треугольникахъ $ABC, CB'C', C'B''C''$... бока $AC = CC', = C'C''$..., также $AB = CB' = C'B''$..; $BC = B'C' = B''C''$..; углы $BAC = BCC' = B''C'C''$...; $BCA = B'C'C = B''C''C''$.. Соединивъ вершины всѣхъ этихъ треугольниковъ по порядку линіями $BB', B'B''$.., получимъ еще треугольники $BCB', B'CB''$..; гдѣ при точкахъ C, C'..., углы должны быть менѣе, нежели ABC, если предположимъ сумму трехъ угловъ болѣе π въ $\triangle ABC$. Тогда всѣ бока $BB', B'B''$... выдутъ равны между собой и каждый $< b$. Означивъ буквой a бокъ BB' и буквой n число такихъ боковъ, должны получить (ст 55)

$$2c > n(b - a),$$

что не возможно для всякаго цѣлаго положительнаго n.

Отсюда слѣдуетъ, что *внѣшній уголъ отъ продолженія бока можетъ быть или равенъ, или болѣе суммы двухъ угловъ внутреннихъ съ нимъ не смѣжныхъ въ треугольникѣ.*

91. *Если въ одномъ треугольникѣ сумма всѣхъ угловъ* π, *то во всякомъ другомъ также.*

Въ треугольникѣ ABC (чер. 85) полагаемъ углы A, C острые, а сумму всѣхъ π. Изъ острея B опускаемъ перпендикулъ p къ боку AC, который раздѣлится такимъ образомъ на двѣ части q, r, а самый треугольникъ на два прямоугольныхъ: одинъ съ катетами p, q, гдѣ сумма трехъ угловъ положимъ $\pi - \alpha$; другой съ катетами p, r, гдѣ пусть эта сумма $\pi - \beta$. Въ данномъ треугольникѣ ABC сумма всѣхъ угловъ должна быть $\pi - \alpha - \beta = \pi$, но какъ α, β нельзя принимать отрицательными числами (ст. 90), то $\alpha = o, \beta = o$. Это значитъ, что въ томъ и другомъ прямоугольномъ треугольникѣ сумма трехъ угловъ π, а сумма двухъ острыхъ $\frac{1}{2}\pi$. Къ треугольнику съ катетами p, q приставляя такойже, гипотенузу къ гипотенузѣ, при томъ еще такъ, что бы равныя линіи не смыкались, но были другъ противъ друга, получимъ четыреугольникъ съ прямыми углами (чер. 86), который отъ этого называютъ *прямоугольникъ.* Изъ n такихъ пря-

моугольниковъ, прикладывая бокъ p къ p, составляемъ новый $ABCD$, гдѣ бокъ $AD = BC = p$, $AB = DC = nq$. Подобнымъ образомъ приходимъ къ прямоугольнику $ABFE$, гдѣ бока $AB = EF = nq$, $AE = BF = mp$, разумѣя подъ n, m произвольныя цѣлыя числа. Линіей BE раздѣляемъ прямоугольникъ $ABCD$ на два прямоугольныхъ одинаковыхъ треугольника ABE, BEF (ст. 81), гдѣ сумма трехъ угловъ въ томъ и другомъ равны, слѣдовательно въ каждомъ π. Теперь какой бы треугольникъ ABC (чер. 87) съ прямымъ угломъ ABC ни былъ данъ, всегда можемъ взять такъ велики цѣлыя числа n, m, что бы катетъ $AB < mp$, $AC < nq$. Послѣ чего продолжая AB, AC за точки B, C, и дѣлая $AD = mp$, $AE, = nq$, получимъ треугольникъ DAE, гдѣ сумма всѣхъ угловъ π, и гдѣ внутри помѣщается треугольникъ ABC, такъ что проведя линію DC раздѣлимъ треугольникъ ADE на три: DCE, BCD, ABC. Если въ этихъ послѣднихъ треугольникахъ полагаемъ суммы угловъ $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$, то въ треугольникѣ ABC должна бы выходить она $\pi - \alpha - \beta - \gamma = \pi$, такъ какъ послѣ соединенія всѣхъ угловъ отнимается 2π при точкахъ B, C. Между тѣмъ α, β, γ не могутъ быть отрицательными, слѣдовательно $\alpha = o, \beta = o, \gamma = o$. Увѣрившись, что $\gamma = o$, съ этимъ вмѣстѣ доказали, что во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ сумма трехъ угловъ π; а какъ и всякій вообще треугольникъ раздѣляется на два прямоугольныхъ, то сумма трехъ угловъ должна быть π во всѣхъ треугольникахъ.

Это предложеніе доказывалъ также Лежандръ (Elémens de Géometrie); но мы кромѣ того, продолжая теперь Геометрію, будемъ допускать какъ то, такъ и другое предположеніе, которыя до сихъ поръ остаются еще возможными. *Употребительная Геометрія*, согласно съ измѣреніями на самомъ дѣлѣ, принимаетъ сумму трехъ угловъ въ треугольникахъ равною двумъ прямымъ. Основаніемъ *Воображаемой Геометріи*, которую можемъ постигать только въ нашемъ умѣ, служитъ другое предположеніе, что сумма трехъ угловъ во всякомъ треугольникѣ должна быть менѣе двухъ прямыхъ. Эта сумма въ такомъ случаѣ растетъ съ уменьшеніемъ боковъ въ треугольникѣ; напримѣръ какой бы ни былъ уголъ BAC (чер. 87), если сумма всѣхъ трехъ угловъ будетъ $\pi - \alpha$ въ $\triangle ABC$, $\pi - \beta$ въ $\triangle BCD$, $\pi - \gamma$ въ $\triangle DCE$, то находимъ ее $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ въ $\triangle ADE$.

Если же во всѣхъ треугольникахъ принимаемъ π сумму трехъ угловъ, то въ многоугольникѣ съ одной окружностью и съ n боками будетъ она $(n-2)\pi$, такъ какъ $n-2$ самое меньшее число треугольниковъ, на которыя данный многоугольникъ можетъ раздѣляться (ст. 69). Это слѣдуетъ также изъ выраженія для поверхности сферическаго треугольника (ст. 69), которую должно теперь почитать нулемъ.

92. *Прямолинейные треугольники одинаковы съ равенствомъ трехъ угловъ, которыхъ сумму не принимаемъ* π.

Пусть въ прямолинейныхъ треугольникахъ $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ (чер. 88) углы $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $A + B + C < \pi$. Если полагаемъ $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$, боками равныхъ угловъ A, A', то треугольники не могутъ одинъ помѣщаться въ другомъ (ст. 91). Еслижъ одинъ будетъ выходить частію только вонъ изъ другаго, напримѣръ точка B' упадетъ на боку $A\,B$ между концовъ A, B, тогда какъ точка C' выдетъ вонъ изъ треугольника $A\,B\,C$ на продолженіи $A\,C$, то бокъ $B'\,C'$ пересѣкая $B\,C$ въ точкѣ D, произведетъ два треугольника $B\,D\,B'$, $C\,D\,C'$, гдѣ сумма трехъ угловъ въ каждомъ $\pi + \angle B\,D\,B'$, что невозможно (ст. 90).

Съ предположеніемъ суммы трехъ угловъ π, треугольники могутъ быть неодинаковы, не смотря на равенство трехъ угловъ, которое значитъ собственно равенство двухъ только, тогда какъ одинъ бокъ остается произвольнымъ (ст. 81).

ГЛАВА VII.

ПАРАЛЕЛЬНЫЯ ЛИНІИ.

93. Линіи, выходя изъ одной точки, либо пересѣкаютъ данную прямую въ тойже плоскости, либо никогда съ ней не встрѣчаются, сколько бы ни продолжались. Надобно слѣдовательно различать между такими линіями въ отношеніи къ одной данной: *встрѣчныя* или *сводныя*, и *невстрѣчныя* или *несводныя*, къ которымъ принадлежатъ *паралельныя*, составляя переходъ отъ однихъ къ другимъ— *разводнымъ*. Двѣ паралельныя къ данной раздѣляютъ плоскость на четыре части: въ двухъ противоположныхъ заключаются сводныя, въ двухъ остальныхъ— разводныя линіи.

Пусть AB прямая (чер. 89) дана съ точкой C въ одной плоскости, гдѣ всѣ линіи, выходя изъ точки C, должны либо пересѣкать AB, какъ напримѣръ перпендикулъ CD къ AB; либо не встрѣчаться съ AB, какъ напримѣръ перпендикулъ CE на CD (ст. 48). Эта линія CD, обращаясь около точки C, переходитъ отъ сводныхъ въ углѣ FCG' къ несводнымъ въ углѣ FCG потомъ опять въ углѣ GCF' къ такимъ, которыхъ продолженіе за точку C пересѣкаетъ AB; наконецъ къ несводнымъ въ углѣ $F'CG'$. Здѣсь бока четырехъ угловъ происходятъ отъ пересѣченія двухъ линій FF', GG', которыя представляя переходъ отъ сводныхъ къ несводнымъ, будутъ паралельны съ AB. Замѣтимъ къ этому, что всѣ линіи остаются по прежнему сводными, либо несводными, когда подъ тѣмъ же угломъ переходятъ на другую сторону перпендикула CD. Итакъ обѣ паралельныя будутъ извѣстны, какъ скоро знаемъ положеніе CF одной изъ нихъ въ прямомъ углѣ ECD. Тогда CG подъ тѣмъ же угломъ $GCE = ECF$ на противоположной сторонѣ EC даетъ другую паралельную съ AB. Наконецъ двѣ паралельныя

CF, EG съ ихъ продолженіями CF', EG' за точку C составляютъ два вершинныхъ угла $GCF, G'CF'$, гдѣ заключаются всѣ разводны линіи съ AB.

Говоря, что линія паралельна другой, мы будемъ разумѣть въ послѣдствіи только тотъ случай, когда обѣ проведены въ одну сторону какой нибудь третьей соединительной ихъ линіи. Такъ CF паралельна къ DA, CG' къ DB, находясь на одной сторонѣ линіи CD. Изъ данной точки ко всякой линіи можетъ слѣдовательно быть одна только паралельная, которой отличительное свойство заключается въ томъ, чтобы съ малѣйшимъ отклоненіемъ въ одну сторону дѣлалась сводной, а въ другую разводной. Напримѣръ если CF паралельна къ AD, то CH сводная, CK разводная съ AD, какъ бы при томъ углы FCH, FCK малы ни были.

Подъ этимъ видомъ паралельность уже разсматривается во всей обширности. Эвклидъ, не будучи въ состояніи дать удовлетворительное доказательство, допускалъ въ Употребительной Геометріи тотъ частный случай, когда двѣ паралельныя должны быть вмѣстѣ перпендикулами къ одной прямой. Такимъ образомъ уголъ ECF, какъ и весь уголъ GCF, съ его вершиннымъ $F'CG'$ здѣсь уничтожаются, слѣдовательно всѣ линіи, кромѣ паралельной, должны пересѣкать AB, достаточно продолжаясь въ ту, либо другую сторону. Эвклидовы послѣдователи затрудняли только предметъ дополнительными положеніями, либо произвольными, либо совсѣмъ темными, стараясь убѣждать въ справедливости принятой истины, которую по существу самой Геометріи доказывать невозможно.

Наклоненіе линіи къ опущенному перпендикулу на другую, съ первой паралельную, будемъ называть *уголъ паралельности къ этому перпендикулу*. Самый уголъ означимъ $\Pi(p)$, когда p перпендикулъ. Замѣтимъ однакожъ, что выраженіе $\Pi(p)$ не представляетъ покуда ни какой аналитической функціи, но только служитъ знакомъ, который указываетъ на принадлежность угла $\Pi(p)$ къ линіи p.

94. *Двѣ линіи несходятся, когда третья встрѣчаетъ ихъ на тойже сторонѣ подъ однимъ угломъ.*

Пусть прямая AB (чер. 90) встрѣчаетъ двѣ линіи CD, BE на одной сторонѣ подъ угломъ $ACD = ABE$, который если будетъ прямой, то CD, BE не должны сходиться (ст. 48); еслижъ острый, то съ нимъ смѣжный будетъ тупой. Итакъ полагаемъ ABE острый уголъ, въ отверстіе котораго падаетъ перпендикулъ FG къ BE изъ средины F линіи BC, тогда какъ изъ тойже средины FH приходитъ въ точку H перпендикулярно къ продолженію DC. Соста-

вятся два прямоугольныхъ треугольника $CHF \cong GFB$, потому что $CF = FB$, $\angle FCH = \angle FBG$ (ст. 87); слѣдовательно два равныхъ угла CFH, BFG, какъ вершинные, должны происходить отъ пересѣченія прямыхъ BC, GH; изъ этихъ къ послѣдней GH двѣ перпендикулярныя DH, GE не могутъ сходиться.

95. *На линіи всякую точку можно почитать за начало, откуда выходитъ она паралельно другой.*

Пусть AB (чер. 91) перпендикулъ къ прямой BC изъ точки A, откуда выходитъ линія AD паралельная съ BC. Это значитъ, что всякая другая линія AC, отъ A проведенная въ углѣ паралельности, пересѣкаетъ BC. Должно доказывать, что будетъ ли взята гдѣ нибудь точка E по ту, либо точка E' по другую сторону точки A на линіи AD съ ея продолженіемъ AE' за точку A, всегда перпендикулы $EF, E'F'$ къ BC съ $E'D$ составляютъ уголъ паралельности $DEF, DE'F'$, въ отверстіи котораго линія проведенная изъ острея E, E', пересѣкаетъ $F'C$.

Въ отверстіи угла DEF ведемъ изъ острея E какую нибудь линію EG. Конецъ ея G, покуда не пересѣкаетъ она BC, соединяемъ съ A прямою AG, которая въ продолженіи должна встрѣтить EF гдѣ нибудь въ H, потомъ и BC гдѣ нибудь въ C. Составится треугольникъ FHC, куда войдетъ EG, но по невозможности пересѣкать въ другой разъ ни HF, ни HC, должна пройти чрезъ FC гдѣ нибудь въ K.

Въ отверстіи угла $DE'F'$ ведемъ изъ острея E' произвольно линію $E'K'$, которая внутри четыреугольника $ABF'E'$ не можетъ пересѣкать въ другой разъ ни $E'F'$, ни $E'A$, но должна пройти либо черезъ бокъ BF', либо черезъ AB гдѣ нибудь въ точкѣ H'. Этотъ послѣдній случай разсматривая, полагаемъ что въ $\triangle ABC$, куда входитъ линія $E'H'$, бокъ AC наклоненъ къ паралельной AD подъ угломъ $DAC = DE'K'$, такъ какъ первый изъ нихъ совершенно произвольный. Теперь $E'K'$, не пересѣкая болѣе AC (ст. 94), ни въ другой разъ AB, должна сойтись съ бокомъ BC треугольника въ какой нибудь точкѣ K'.

Итакъ полагая $p = AB, EF, E'F'$, получимъ уголъ $\Pi(p) = DAB, DEF, DE'F'$, гдѣ бы точки A, E, E' ни были взяты на паралельной.

96. *Когда линія паралельна другой, то наоборотъ эта вторая также паралельна первой.*

Пусть изъ точки A (чер. 92) проведены линіи, AB паралельная, AC перпендикулярная къ CD. Ясно, что всякая линія CE, отклонившись отъ CD не

въ ту сторону, гдѣ лежитъ AB, не можетъ и пересѣкать AB. Остается доказывать, что всякая линія CF отклонившись отъ CD въ противную сторону, непремѣнно встрѣтитъ AB, какъ бы малъ ни былъ уголъ отклоненія DCF.

Опускаемъ изъ точки A перпендикулъ AF къ CF; дѣлаемъ $AG = AF$, ставимъ перпендикулъ HG къ AC въ концѣ G линіи AG, потомъ изъ A ведемъ AH къ AG подъ угломъ $HAG = BAF$. Линія AH должна пересѣкать CD (ст. 93), слѣдовательно пересѣкать и GH также гдѣ нибудь въ точкѣ H. Составится прямоугольный треугольникъ AHG, гдѣ гипотенуза AH назначаетъ разстояніе AB, на которомъ CF въ продолженіи встрѣчаетъ AB, потому что $\triangle ABF \cong \triangle AHG$ (ст. 81).

Итакъ *паралельность двухъ линій бываетъ всегда взаимной.*

97. *Двѣ паралельныя бываютъ паралельны третьей. въ которой пересекаются плоскости, проведенныя черезъ двѣ первыя.*

Пусть пararельныя AB, CD (чер. 93) лежатъ въ плоскостяхъ, которыхъ линія пересѣченія FE. Отъ произвольной ея точки E ведемъ перпендикулъ EA къ AB въ A, потомъ отсюда другой перпендикулъ AC къ CD и наконецъ линію CE, которая съ двумя перпендикулами составитъ треугольникъ ACE. Уголъ BAC между линій AB, AC можетъ быть острый или прямой (ст. 93), слѣдовательно перпендикулъ изъ C къ AB долженъ падать куда нибудь въ точку G, которая будетъ или таже точка A, или на какомъ нибудь разстояніи AG отъ A. Соединительная линія GE точекъ G, E также либо должна не различаться съ AE, либо проходитъ въ отверстіи угла AEF. Теперь паралельность линій EF съ AB надобно доказывать, увѣряясь въ томъ, что всякая линія пересѣкаетъ AB, какъ скоро выходитъ изъ острея E въ углѣ FEA. Ясно, что не можетъ быть иначе въ той части AEG всего угла AEF, которая принадлежитъ треугольнику AEG. Въ остальной части FEG проведя линію EH, потомъ воображая черезъ нее съ другой EC плоскость, получимъ въ пересѣченіи съ плоскостью BAC линію CH, которая въ углѣ DCG должна встрѣчать AB паралельную съ CD гдѣ нибудь въ точкѣ H, куда слѣдовательно придетъ и линія EH, какъ бы малъ уголъ HEF ни былъ. Подобнымъ образомъ доказывается паралельность EF съ CD.

Итакъ если на плоскости можетъ быть проведена паралельная линія съ данной внѣ плоскости, то всякая другая плоскость, проходя черезъ данную линію, въ пересѣченіи съ данной плоскостію, производитъ паралельную къ данной линіи.

Въ такомъ случаѣ говорятъ, что данная *плоскость и линія* другъ къ другу *паралельны.*

98. *Отъ точки всегда можно провести линію такъ, что бы съ данной составился какъ угодно малый уголъ.*

Пусть $A\,B$ (чер. 94) перпендикулъ изъ точки A къ линіи $B\,C$. Мы знаемъ уже, что точка D чѣмъ далѣе взята будетъ отъ конца B перпендикула $A\,B$, тѣмъ уголъ $A\,D\,B$ выдетъ менѣе (ст. 53). Теперь остается доказывать, что съ возрастаніемъ $B\,D$ можетъ онъ сдѣлаться менѣе, нежели всякій данный уголъ. На боку $D\,C$ внѣшняго угла $A\,D\,C$ отъ продолженія бока $B\,D$ въ $\triangle A\,B\,D$ беремъ $D\,D' = A\,D$, отчего произойдетъ равнобедренный треугольникъ $A\,D\,D'$, гдѣ углы при $A\,D'$ равны, слѣдовательно уголъ $A\,D\,B \geqq 2\,A\,D'\,D$ (ст. 91). Дѣлая $C\,D' = A\,D$ получимъ уголъ $A\,C\,D \leqq \frac{1}{4} B\,D\,A$. Такъ продолжая можемъ уменьшать безпредѣльно тотъ уголъ, который BC составляетъ съ линіей, проведенный отъ нея къ данной точкѣ A.

99. *Двѣ линіи паралельныя съ третьей, паралельны между собой.*

Разсматриваемъ сперва три линіи $A\,B, C\,D, E\,F$ (чер. 95) въ одной плоскости. Предполагая крайнюю $A\,B$ паралельной съ двумя другими, ведемъ изъ точки A, взятой произвольно на $A\,B$, перпендикулы $A\,C$ къ $C\,D$, $A\,E$ къ $E\,F$. Послѣдній пересѣчетъ среднюю линію CD гдѣ нибудь въ G либо между концовъ C, D если уголъ $D\,G\,E < \frac{1}{2}\pi$, либо въ точкѣ C, сливаясь съ $A\,C$, если уголъ $D\,G\,E = \frac{1}{2}\pi$. Изъ точки G пусть выходитъ линія $G\,G'$ въ отверстіи угла $D\,G\,E$ подъ какимъ нибудь угломъ $D\,G\,G'$ къ $D\,G$. На $D\,C$ можемъ взять точку A' такъ отъ C далеко, чтобъ уголъ $A\,A'\,C$ былъ менѣе $D\,G\,G'$ (ст. 98). Не смотря на то продолженіе линіи $A\,A'$ за точку A' должно пересѣчь $E\,F$ гдѣ нибудь въ F', такъ какъ $A\,B$ съ $E\,F$ паралельны. Послѣ чего произойдетъ треугольникъ $A\,E\,F'$, котораго бокъ $A\,F'$ наклоненъ къ линіи $A'\,D$ подъ угломъ $D\,A'\,F' < D\,G\,G'$. Если же дѣлаемъ уголъ $D\,A'\,F'' = D\,G\,G'$, то $A'\,F''$ при невозможности пересѣкать $G\,E$, не встрѣчаясь съ $G\,G'$, пройдетъ гдѣ нибудь чрезъ F'' между F', E на $F\,E$, ограничивая такимъ образомъ четыреугольникъ $A'\,G\,E\,F''$, гдѣ $G\,G'$ не пересѣкая $A'\,F''$ (ст. 94), должна сойтись съ EF'' въ какой нибудь точкѣ G'.

Если же двѣ крайнія $A\,B, E\,F$ паралельны къ средней DC, то всякая линія $A\,A'$, проведенная въ отверстіи угла $B\,A\,E$ острея A, должна пересѣкать DC гдѣ нибудь въ точкѣ A', отъ которой пусть перпендикулъ къ $F\,E$ будетъ $A'\,K$. Теперь продолженіе $A'\,F'$ линіи $A\,A'$ внѣ четыреугольника $A\,A'\,K\,E$, слѣдовательно

въ отверстіи угла $DA'K$, будетъ пересѣкать FE, паралельную съ DA' (ст. 96) какъ бы малъ уголъ BAA' ни былъ.

Наконецъ предполагая AB, DC паралельными съ EF въ разныхъ плоскостяхъ, можемъ AB почитать за линію пересѣченія двухъ плоскостей $BACD$, $BAEF$, проведенныхъ черезъ двѣ паралельныя DC, EF, слѣдовательно третья AB должна быть также паралельна къ DC (ст. 97)

100. *Когда три плоскости пересѣкаются въ паралельныхъ линіяхъ, то сумма плоскостныхъ угловъ* π.

Пусть три плоскости пересѣкаются въ паралельныхъ линіяхъ $AA', BB' CC'$ (чер. 96). Беремъ на каждой произвольно точки A, B, C, которыя соединяемъ линіями AB, AC, BC и воображаемъ чрезъ нихъ плоскость, потомъ еще другую $AB'C$ черезъ точки A, C и B' гдѣ нибудь на BB'; наконецъ описываемъ сферы вокругъ этихъ трехъ точекъ и чертимъ ихъ дуги пересѣченія на плоскостяхъ $A'AB', AB'C, BCC', A'ACC'$. Называемъ α, β, γ плоскостные углы первыхъ трехъ плоскостей вокругъ паралельныхъ AA', BB', CC'; означаемъ δ уголъ отклоненія плоскости $AB'C$ отъ $AACC'$; $p\ q, r$ тѣлесные углы $d\,e\,f, d'\,e'\,f', a\,b\,c$, которыхъ вершины въ A, C, B'. Плоскостной уголъ $d\,e\,f$ находимъ (ст. 68)

$$2p + \pi - \alpha - \delta$$

уголъ $d'\,e'\,f'$

$$2q + \pi - \gamma - \delta.$$

Послѣ чего тѣлесный уголъ

$$r = p + q - \delta + \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Уголъ δ можно взять какъ угодно малымъ, а съ нимъ уменьшать безпредѣльно дуги $d\,e, e'f'$, удаляя точку B' отъ B (ст. 93). Съ этимъ движеніемъ вершины B' изчезаютъ наконецъ дуги ab, bc, слѣдовательно самый тѣлесный уголъ r (ст. 80), плоскостной δ и тѣлесные $p < \delta, q < \delta$, такъ что

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma.$$

101. *Если въ треугольникахъ сумма трехъ угловъ* π, *то два перпендикула къ одной линіи между собой паралельны.*

Пусть AB, CD (чер. 97) перпендикулы къ одной линіи AC, которой конецъ A соединяемъ линіей AD съ какой нибудь точкой D на CD. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ACD сумма двухъ острыхъ угловъ $\frac{1}{2}\pi$, также какъ углы

$CAD + DAB = \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно уголъ $BAD = ADC$; но послѣдній можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малымъ (ст. 98), слѣдовательно AD, какъ бы мало ни отлонялась отъ AB, всегда пересѣкаетъ CD. Это значитъ, что CD съ AB паралельны (ст. 93).

Итакъ въ томъ же предположеніи вообще *двѣ линіи паралельны, когда третья встрѣчаетъ ихъ на одной сторонѣ подъ равнымъ угломъ* (ст. 94); а слѣдовательно *двѣ линіи переспкаются всякій разъ когда бываютъ наклонены къ третьей между ними подъ углами, которыхъ сумма* $< \pi$.

Обратно, *когда допускаемъ паралельность какихъ нибудь двухъ перпендикуловъ къ линіи, то въ треугольникахъ сумма всѣхъ угловъ должна быть* π. Если напримѣръ AB, CD два перпендикула къ AC паралельны между собой, то пусть въ треугольникѣ ACE сумма трехъ угловъ $\pi - \alpha$, слѣдовательно уголъ $BAE > \alpha$. Дѣлаемъ уголъ $BAD = \alpha$, то линія AD пересѣчетъ CD и произведетъ треугольникъ ADC, гдѣ сумма трехъ угловъ $\pi - \alpha + \angle ADC$ должна быть равна, либо менѣе, нежели сумма трехъ угловъ въ треугольникѣ ACE (ст. 91). Отсюда

$$\pi - \alpha + \angle ADC \leqq \pi - \alpha$$

невѣрность, которая можетъ уничтожиться только съ положеніемъ $\alpha = o$ (ст. 93).

102. *Въ предположеніи суммы всѣхъ угловъ треугольника* $< \pi$, *уголъ* $\Pi(a)$ *уменьшается постепенно съ возрастаніемъ* a, *начиная съ* $\Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$ *для* $a = o$ *и приближаясь къ границѣ* $\Pi(a) = o$ *для* $a = \infty$.

Замѣтимъ во-первыхъ, что $\Pi(a) > \Pi(b)$, когда $a < b$. Пусть $AB = a, AC = b$ (чер. 98), AA' перпендикулъ къ AC; BB', CC' паралельныя съ AA', слѣдовательно уголъ $ABB' = \Pi(a)$, $ACC' = \Pi(b)$. Нельзя полагать $\Pi(a) = \Pi(b)$ съ тѣмъ, чтобы не нашлось къ одной линіи двухъ перпендикуловъ, которые были бы паралельны (ст. 94). Того менѣе можно допускать $\Pi(a) < \Pi(b)$ для $a < b$, потому что въ такомъ случаѣ линія BD, пересѣкала бы CC' даже тогда, когдабъ уголъ ABD сдѣланъ былъ равный съ ACC'.

Теперь докажемъ, что для всякаго угла A между границъ $A = o$, $A = \frac{1}{2}\pi$ можно найти a такъ, чтобъ $A = \Pi(a)$.

На боку угла A (чер. 99) изъ какой нибудь точки B опускаемъ перпендикулъ BB' къ другому боку. Составится прямоугольный треугольникъ ABB' съ катетами AB', BB', гдѣ сумма трехъ угловъ пусть будетъ $\pi - \alpha$. Продолжая бокъ AB' дѣлаемъ $B'C' = AB'$, потомъ $CD' = AC'$ и т. д. Ставимъ перпен-

дикулы CC', DD'... въ точкахъ C', D'.. къ тому же боку, покуда могутъ они встрѣчать другой бокъ въ точкахъ C, D.. Соединяя линіями точки, B съ C', C съ D'.., получимъ $\triangle AB'B \backsim \triangle B'BC'$, $\triangle AC'C \backsim \triangle CC'D'$... Далѣе сумма трехъ угловъ должна быть $\pi - 2\alpha$ въ $\triangle ABC'$, менѣе нежели $\pi - 2\alpha$ въ $\triangle ACC'$ (ст. 91), менѣе нежели $\pi - 4\alpha$ въ $\triangle ACD'$, еще менѣе въ $\triangle ADD'$. Такъ вообще должны бы находить эту сумму менѣе $\pi - 2^n\alpha$ съ цѣлымъ положительнымъ числомъ n. Это требуетъ, чтобы наконецъ перпендикулы EE', FF' къ одному боку угла A не сходились болѣе съ другимъ. Пусть изъ нихъ EE' тотъ перпендикулъ къ AE', который самъ несходится съ AD, но въ одну сторону котораго къ острею A всѣ прочіе пересѣкаютъ бокъ AD, тогда какъ по другую сторону всѣ перпендикулы FF', сколько бы ни продолжались, не встрѣчаются съ AD. Въ такомъ случаѣ бокъ AD паралеленъ съ перпендикуломъ EE'. Чтобъ въ этомъ увѣриться, ведемъ линіи AG, AH изъ острея угла A внутри и внѣ по другую сторону бока AD. Первая не должна сходиться съ EE', чтобъ не составился треугольникъ, откуда прямая AD могла бы только выйти, пересѣкая бокъ EE'. Ведемъ еще линію AG' внѣ угла A изъ его вершины подъ тѣмъ же угломъ къ боку AD', подъ какимъ AG наклонена къ AD внутри. Опускаемъ къ AG' перпендикулъ $E'G'$ изъ точки E'. Получимъ прямоугольный треугольникъ $AE'G'$, гдѣ $AG' < AE'$. Итакъ если AG' кладемъ отъ острея A на AE', то AG покроетъ AD, точка G' упадетъ гдѣ нибудь въ K' между точекъ A, E'; послѣ чего перпендикулъ GG' сдѣлается перпендикуломъ KK' къ AE', который назначитъ разстояніе $AK = AG$ точки G, куда линія AG должна придти, составляя треугольникъ AGE', гдѣ линія EE' пересѣчетъ слѣдовательно бокъ AG. Такъ AD въ обращеніи своемъ вокругъ точки A, подъ какимъ бы малымъ угломъ отъ прежняго своего положенія ни отклонялась, идя въ одну сторону, пересѣкаетъ EE', а въ противоположную—съ EE' не встрѣчается.

Соблюдая постепенность въ измѣненіи, мы пополнимъ значеніе $\Pi(a)$, принимая $\Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$ для $a = o$, $\Pi(a) = o$ для $a = \infty$, и наконецъ, распространяя на всѣ отрицательныя линіи, будемъ полагать

$$\Pi(a) + \Pi(-a) = \pi,$$

гдѣ слѣдовательно линія a можетъ быть нулемъ, положительнымъ и отрицательнымъ числомъ, возрастая до безконечности.

Хотя выраженіе $\Pi(a)$, какъ мы замѣтили выше (ст. 93), служитъ только знакомъ для угла, вмѣстѣ съ указаніемъ на линію a, къ которой онъ припадле-

житъ; однакожъ такая зависимость, покуда неизвѣстная, можетъ называться *геометрической функціей* для различія съ аналитической, опредѣляемой или вполнѣ самымъ дѣйствіемъ надъ числомъ, или посредствомъ условныхъ уравненій.

Въ Употребительной Геометріи принимаютъ уголъ паралельности постоянно прямымъ. Между тѣмъ этотъ уголъ можно полагать также перемѣннымъ въ *Общей* или *Воображаемой Геометріи*, которая будетъ обнимать Употребительную Геометрію, какъ частный случай, однакожъ единственный какой только намъ открываютъ измѣренія на самомъ дѣлѣ.

103. Въ Употребительной Геометріи четыреугольникъ, гдѣ противоположные бока паралельны, называютъ *паралелограмъ*.

Въ паралелограмѣ противоположные бока равны. Также всякій четыреугольникъ бываетъ паралелограмомъ, какъ скоро въ немъ противоположные бока равны; или два только бока равны и вмѣстѣ паралельны.

Четыреугольникъ $A\,B\,C\,D$ (чер. 100) раздѣляемъ на два треугольника, соединивъ острея A, C двухъ противоположныхъ угловъ линіей $A\,C$, которую называютъ *діогональ*. Если бока AB съ $C\,D$, AD съ BC паралельны, то діогональ $A\,C$ къ той и другой изъ двухъ паралельныхъ будетъ наклонна подъ однимъ угломъ (ст. 101). Такъ $\angle\,B\,A\,C = \angle\,A\,C\,D$, $\angle\,B\,C\,A = \angle\,C\,A\,D$, слѣдовательно треугольники $A\,B\,C \cong A\,C\,D$ (ст. 81), въ нихъ $A\,B = C\,D$, $B\,C = A\,D$.

Еслижъ $A\,B = C\,D$, $B\,C = A\,D$, то снова $\triangle\,A\,B\,C \cong \triangle\,A\,C\,D$, слѣдовательно углы $B\,C\,A = C\,A\,D$, $B\,A\,C = A\,C\,D$, бока $B\,C$ съ $A\,D$, $A\,B$ съ CD паралельны.

Если наконецъ $A\,B$ съ $C\,D$ равны и паралельны, то углы $B\,A\,C = A\,C\,D$, слѣдовательно $\triangle\,A\,B\,C \cong \triangle\,A\,C\,D$ (ст. 81), послѣ чего $B\,C$ съ $A\,D$ равны и паралельны.

Отсюда слѣдуетъ *равенство перпендикуловъ отъ одной паралельной къ другой.*

104. *Въ предположеніи прямыхъ угловъ паралельности содержаніе паралельныхъ между боковъ угла тоже, какое самыхъ отрѣзковъ на бокахъ.*

Пусть $a\,a'$, $b\,b'$ (чер. 101) двѣ паралельныя между боковъ $A\,B$, $A\,C$ угла A. Внѣшній уголъ $b\,a\,a'$ треугольника $A\,a\,a'$ равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ съ нимъ несмежныхъ $a\,A\,a'$, $a\,a'\,A$, слѣдовательно черезъ конецъ a линіи $a\,a'$ паралельная $a\,c$ съ бокомъ $A\,a'$ угла A, должна дѣлить $b\,b'$ на двѣ части, $b\,c$ и

$c\,b' = a\,a'$ (ст. 103). Отсюда заключаемъ, что паралельныя $a\,a'$, $b\,b'$ между боковъ угла растутъ удаляясь отъ острея A. Къ тому въ треугольникѣ $a\,b\,c$ уголъ $b\,a\,c = a\,A\,a'$, $a\,b\,c = A\,a\,a'$, линія $a\,c = a'\,b'$, слѣдовательно гдѣ бы ни взяли часть $a\,b$ на боку $A\,B$, вездѣ три бока въ треугольникѣ $A\,a\,a'$ растутъ одинаково, какъ скоро бокъ $a\,a'$ замѣняемъ его паралельнымъ $b\,b'$. Называемъ теперь x, y, z бока $A\,a$, $A\,a'$, $a\,a'$ въ треугольникѣ $A\,a\,a'$; x', y', z' бока $A\,b$, $A\,b'$, $b\,b'$ въ $\triangle A\,b\,b'$; полагаемъ, что x раздѣлено на n, x' на m такихъ же равныхъ частей.

Ясно, что дробь $\frac{n}{m}$ будетъ содержаніе x къ x', y къ y', z къ z'. Предположимъ еще въ случаѣ несоизмѣримости линій

$$\frac{m}{n}\,x < x' \quad ; \quad \frac{m+1}{n}\,x > x'$$

и слѣдовательно также

$$\frac{m}{n}\,y < y' \quad ; \quad \frac{m+1}{n}\,y > y'.$$

Послѣ чего, какъ сейчасъ доказали,

$$\frac{m}{n}\,z < z' \quad ; \quad \frac{m+1}{n}\,z > z'.$$

Итакъ содержаніе цѣлыхъ чиселъ n, m даетъ съ тою же точностію содержаніе линій x, x', съ какой и содержаніе y къ y', z къ z'. Это значитъ, что во всякомъ случаѣ

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *въ прямоугольныхъ треугольникахъ противъ равныхъ острыхъ угловъ содержаніе боковъ равное.*

105. *Въ предположеніи прямыхъ угловъ паралельности квадратъ гипотенузы въ прямоугольномъ треугольникѣ равенъ суммѣ квадратовъ отъ катетовъ.*

Называемъ a, b катеты, c гипотенузу (чер. 102) въ прямоугольномъ треугольникѣ. Опускаемъ изъ вершины прямого угла перпендикулъ p на гипотенузу, которая такимъ образомъ раздѣлится на двѣ части: одна x подъ a, другая $c - x$ подъ b. Самый треугольникъ раздѣлится на два прямоугольныхъ: одинъ съ гипотенузой a, катетами p, x; другой съ гипотенузой b, катетами p, $c - x$. Сравнивая каждый изъ этихъ треугольниковъ съ даннымъ, получимъ (ст. 104)

$$x = a \cdot \frac{a}{c}$$

$$c - x = b \cdot \frac{b}{c}.$$

Отсюда находимъ, исключивъ x,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

106. *Въ предположеніи перемѣнныхъ угловъ параллельности перпендикулъ растетъ болѣе нежели тотъ бокъ угла, отъ котораго перпендикулъ опущенъ; еще болѣе нежели тотъ бокъ, куда перпендикулъ падаетъ.*

Пусть на боку AB угла CAB (чер. 103) взяты три точки D,E,B которыхъ разстоянія, первой отъ второй, второй отъ третьей равныя. Въ точкахъ D, E, B ставимъ перпендикулы DF, EG, BC къ AB, которые пусть пересѣкаютъ бокъ AC въ точкахъ F, G, C на разстояніи p первой отъ второй, q второй отъ третьей. Полагаемъ четыреугольникъ $GEBC$ на $FDEG$ общимъ бокомъ GE и равными боками $BE = ED$. Бокъ BC пойдетъ по DF и кончится гдѣ нибудь въ H внѣ треугольника, потому что уголъ $EGC > \frac{1}{2}\pi$, $AGE < \frac{1}{2}\pi$. Произойдетъ треугольникъ FGH, гдѣ противъ p уголъ менѣе нежели противъ q (ст. 91), слѣдовательно $q > p$ (ст. 54).

Пусть на боку AB (чер. 104) взяты три точки D, E, B, которыхъ разстоянія, первой отъ второй, второй отъ третьей, $DE = EB$. Изъ точекъ D,E,B опускаемъ къ AC перпендикулы DF, EG, BC. Дѣлаемъ $GH = DF$, $CK = GE$ и соединяемъ ихъ концы D съ H,E съ K линіями DH, EK, которыя должны быть наклонены къ перпендикулямъ подъ острыми углами $FDH = DHG, GEK = EKC$. Дѣлимъ GC пополамъ въ L и ставимъ здѣсь перпендикулъ LM, который пройдя черезъ середину M перпендикулярно къ EK, пересѣчетъ BE въ N. Съ этимъ перпендикуломъ NL встрѣчается въ O продолженіе DH, дѣлая уголъ DOL острый (ст. 91) въ отверстіи котораго падаетъ перпендикулъ DP изъ D къ LN. Теперь въ прямоугольныхъ треугольникахъ AEG, ABC уголъ $AEG > ABC$; въ такихъ же треугольникахъ DPN, EMN уголъ $NEM > NDP$, еще болѣе, нежели EDH. Послѣ чего $\triangle EBK$ долженъ принять положеніе DEB', когда переносимъ его бокомъ BE на равный DE, такъ что BK, сдѣлавшись EB', пересѣчетъ DH гдѣ нибудь въ Q между E, B', слѣдовательно $BK = EB' > EQ, > EH$.

107. *Въ предположеніи перемѣнныхъ угловъ параллельности квадратъ гипотенузы въ прямоугольномъ треугольникѣ болѣе суммы квадратовъ отъ двухъ катетовъ.*

Пусть c гипотенуза (чер. 102), a, b катеты, p перпендикулъ изъ прямаго угла на гипотенузу, которую дѣлитъ на двѣ части: x подъ a, $c - x$ подъ b. Основываясь на доказанномъ выше, находимъ изъ сравненія треугольниковъ

$$x > a.\frac{a}{c}$$

$$c - x > b.\frac{b}{c}.$$

Изъ соединенія двухъ неравенствъ заключаемъ

$$c^2 > a^2 + b^2.$$

108. *Въ предположеніи перемѣнныхъ угловъ параллельности, двѣ линіи, перпендикулярныя къ одной третьей, чѣмъ болѣе продолжаются, тѣмъ болѣе расходятся; такъ что перпендикулъ отъ одной къ другой растетъ до безконечности.*

Пусть AB, CD (чер. 105) перпендикулярны къ AC. Отъ какихъ нибудь точекъ B, E одной опускаемъ перпендикулы EF, BD къ другой CD, потомъ изъ точки A къ ближнему EF ведемъ перпендикулъ AG, который продолжаемъ за точку G, покуда пересѣчетъ BD въ H дѣлая уголъ $GHD < \frac{1}{2}\pi$. Продолженіе GH за точку H даетъ вершинный уголъ BHK также острый и слѣдовательно здѣсь падаетъ къ HK перпендикулъ $BK < BH$. Между тѣмъ полагая $AB = a$, $AE = b$, $EG = c$, находимъ (ст. 106)

$$BK > c.\frac{a}{b}$$

и тѣмъ сильнѣе

$$BH > c.\frac{a}{b}.$$

Легко видѣть, что $EF > AC$, $BD > EF$, потому что всегда равные перпендикулы наклонены подъ острымъ угломъ къ линіи, которая соединяетъ ихъ вершины, тогда какъ одинъ перпендикулъ прибываетъ вмѣстѣ съ возрастаніемъ угла при другомъ. Итакъ

$$BD > HD + c.\frac{a}{b} > EF + c.\frac{a-b}{b}.$$

Откуда слѣдуетъ, что $AB = a$ всегда можемъ предполагать довольно большое разстояніе, чтобы перпендикуль BD сдѣлался болѣе всякой данной линіи.

Замѣтимъ еще, что здѣсь $AB > CD$; а слѣдовательно CD также всегда можно взять довольно большое разстояніе, чтобы BD дѣлалось болѣе данной линіи.

Обратно заключаемъ, что какой бы перпендикуль BD къ CD ни былъ, всегда можемъ отъ него поставить такъ далеко другой AC, чтобы къ нему перпендикуль изъ вершины перваго падалъ какъ угодно близко къ CD.

109. *Въ предположеніи перемѣнныхъ угловъ параллельности разстонія между двумя параллельными, какъ въ одну сторону растутъ, такъ уменьшаются въ другую безпредѣльно.*

Пусть AB паралельная съ CD (чер. 106), къ которой изъ точекъ A, E на первой опущены перпендикулы AC, EF, слѣдовательно углы BAC, BEF острые. Продолжаемъ EF за точку E и ведемъ въ отверстіи остраго угла AEG перпендикуль AG къ GF, который всегда можно сдѣлать вмѣстѣ съ EF какъ угодно малымъ, увеличивая CF (ст. 108).

Напротивъ когда продолжаемъ AE, AG за точку A, то продолженіе AE' первой линіи будетъ еще болѣе расходится съ CF, нежели AG', продолженіе AG, отъ котораго какъ видѣли, перпендикулы къ CF растутъ до безконечности.

Вотъ почему назвали мы линіи разводными (ст. 93), какъ скоро не принадлежатъ онѣ къ паралельнымъ или къ такимъ, которыя пересѣкаются. Дѣйствительно, когда линія AK дѣлаетъ съ AB уголъ, то перпендикулы къ AB отъ ея точекъ растутъ въ направленіи къ концу K. Тѣмъ болѣе тоже должно сказать о перпендикулахъ къ CD, когда AK дѣлаетъ уголъ $KAC < \pi$, но болѣе, нежели GAC.

Итакъ надобно различать *сторону параллельности*, гдѣ паралельныя сближаются, отъ *стороны развода*, въ которую разстоянія двухъ паралельныхъ увеличиваются до безконечности.

110. *Перпендикулы въ серединѣ къ бокамъ треугольника, пересѣкаются въ центрѣ круга, который проходитъ чрезъ острея* и потому называется *кругомъ около треугольника. Пересѣченіе перпендикуловъ необходимо для всякаго треугольника, какъ скоро въ немъ сумму трехъ угловъ предполагаемъ* π.

Въ $\triangle ABC$ (чер. 107) къ бокамъ AB, BC, AC изъ ихъ серединъ D, E, F ставимъ перпендикулы DG, EG, FG. Пусть первые два сходятся въ точкѣ G,

производя равнобедренные треугольники AGB, CGB (ст. 52), которымъ разстоянія AG, BG, CG точки G до трехъ остреевъ треугольника ABC служатъ равными боками. Итакъ этимъ разстояніемъ описанный кругъ изъ центра G будетъ кругъ около треугольника ABC. Въ равнобедренномъ треугольникѣ AGC перпендикулъ FG долженъ также приходить въ центръ G круга (ст. 52).

Если предполагаемъ уголъ паралельности постоянно прямымъ, то перпендикулы всегда будутъ пересѣкаться. Чтобъ это доказать, принимаемъ въ разсужденіе только тѣ два бока AB, BC (чер. 108), противъ которыхъ лежатъ острые углы A, C. Пусть перпендикулы DL, EM къ бокамъ AB, BC изъ ихъ серединъ проходятъ черезъ плоскость треугольника, не встрѣчаясь здѣсь, но пересѣкая третій бокъ, AC въ точкахъ H, K, такъ что продолженія HL, KM перпендикуловъ составятъ съ линіей HK между ними на боку AC углы LHK, MKH равные съ углами DHA, EKC въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADH, KEC. Съ такими наклоненіями къ HK линіи HL, KM должны непремѣнно пересѣкаться (ст. 101).

111. *Съ предположеніемъ перемѣнныхъ угловъ паралельности перпендикулы, изъ средины къ бокамъ треугольника, могутъ сходиться, либо расходиться, либо всѣ три быть паралельными.*

Въ треугольникѣ ABC (чер. 109), гдѣ углы A, C острые, перпендикулъ DE къ AC изъ средины D, проходя черезъ плоскость треугольника, долженъ или встрѣтить два другіе бока въ общей точкѣ, или по крайней мѣрѣ большой изъ боковъ AB гдѣ нибудь въ E. Пусть далѣе FG перпендикулъ къ AB въ серединѣ F, которой разстояніе $FE = a$ до точки E. Когда F случится между точекъ A, E, при томъ уголъ $FED < \Pi(a)$, то перпендикулъ FG необходимо пересѣчетъ другой ED гдѣ нибудь въ ихъ продолженіи (ст. 102), куда слѣдовательно придетъ и перпендикулъ отъ средины третьяго бока BC. Еслижъ $FED \geqq \Pi(a)$, то перпендикулы FG, DE несойдутся, а слѣдовательно пересѣченіе съ третьимъ тоже сдѣлается невозможнымъ. Будемъ теперь доказывать, что паралельность двухъ изъ нихъ всегда бываетъ соединена съ паралельностью всѣхъ трехъ.

Пусть въ $\triangle ABC$ (чер. 110) выходятъ DE, FG изъ серединъ D, F перпендикулярно къ бокамъ AB, BC противъ острыхъ угловъ A, C, не встрѣчаясь внутри треугольника съ перпендикуломъ HK изъ средины H къ боку AC. Это будетъ тотъ случай, когда DE, FG пройдя черезъ треугольникъ, пересѣкутъ третій бокъ AC въ точкахъ L, M, между которыми заключается начало H пер-

пендикула HK. Такимъ образомъ внѣ треугольника ABC отрѣзки LE, MG перпендикуловъ DE, FG будутъ наклонены къ LM подъ острыми углами ELH, GMH. Если предположимъ DE съ FG паралельными, то HK также съ ними не встрѣтится, но будучи помѣщена между той и другой, должна быть необходимо паралельной. Дѣйствительно, когда бы возможно было провести другую паралельную изъ H къ LE а слѣдовательно къ MG (ст. 99),. то HK встрѣчалась бы съ одной изъ паралельныхъ LE, MG.

Если предположимъ DE съ HK паралельными, то надобно различать три случая: $AB = BC, AB < BC, AB > BC$. Въ первомъ изъ нихъ уголъ $HLE = HMG$ слѣдовательно MG, также какъ LE, паралельна съ HK.

Въ случаѣ $AB < BC$ перпендикулъ HK (чер. 111) внутри треугольника ABC пересѣкаетъ бокъ BC гдѣ нибудь въ N. Ведемъ отъ A къ этой точкѣ линію AN, которой продолженіе NB' за N дѣлаемъ равно NB, составляя такимъ образомъ равнобедренный треугольникъ BNB', гдѣ черезъ середину H' основанія BB' пройдетъ перпендикулярно HN. Теперь въ $\triangle ABB'$ два перпендикула $DE, H'K$ выходятъ изъ средины боковъ AB, BB' паралельно другъ къ другу, слѣдовательно также паралельно къ перпендикулу GQ изъ средины третьяго бока AB'; а какъ уголъ $GNK = FNK$, то FG должна быть паралельна съ HK.

Въ случаѣ $AB > BC$ (чер. 112) перпендикулъ HK, въ серединѣ къ AC, пересѣкаетъ AB въ точкѣ N, потомъ на половинѣ въ H' перпендикулярно линію BB', которую находимъ, проведя CNB черезъ N и сдѣлавъ $NB' = NB$. Когда теперь ставимъ DE, PQ перпендикулярно къ $AB, B'C$ въ серединѣ къ D, P, то получимъ уголъ $PNK = DNK$, а слѣдовательно три линіи DE, NK, PQ должны быть всѣ три паралельны. Такъ въ $\triangle B'BC$ два перпендикула $H'K, PQ$ выходятъ изъ средины боковъ $BB', B'C$; третій перпендикулъ FG къ боку BC въ серединѣ F будетъ также паралеленъ съ KH', какъ скоро $BB' <$ BC. Въ противномъ случаѣ положивъ $AB = a, NP = b$, находимъ

$$\begin{aligned} BB' &= 2\,BH' \\ &< 2\,BN \\ &< 2\,DB - 2\,ND \\ &< a - 2\,NP \\ &< a - 2\,b. \end{aligned}$$

Пусть $P\,Q$ пересѣкаетъ $A\,C$ въ точкѣ R, перпендикулъ изъ P къ $H'\,\mathrm{K}$ падаетъ въ точкѣ S: будетъ $N\,P > P\,G, > H\,R$ (ст. 109). Продолжая переходить все къ новому треугольнику, также какъ отъ $\triangle A\,B\,C$ перешли къ $\triangle B'\,B\,C$, вмѣстѣ съ этимъ будемъ замѣнять бокъ $B\,B'$ линіей менѣе нежели $a - 2\,c - 2\,b <$ $a - 4\,c$, потомъ линіей $< a - 6\,c$, и наконецъ съ этимъ уменьшеніемъ дойдемъ до линіи $< B\,C$, слѣдовательно придемъ къ тому случаю, для котораго доказано было, что $F\,G$ паралельная съ $H\,\mathrm{K}$.

ГЛАВА VIII.

ЛИНІЯ, ПОВЕРХНОСТЬ И ТРЕУГОЛЬНИКИ ПРЕДѢЛЬНЫЕ.

112. Съ предположеніемъ перемѣнныхъ угловъ паралельности, можемъ представлять себѣ кривую, которую назовемъ *предѣльною*, гдѣ всякія двѣ паралельныя къ одной данной бываютъ наклонены подъ однимъ угломъ къ хордѣ.

Изъ конца A линіи AB (чер. 113) ведемъ во всѣхъ направленіяхъ линіи AC подъ острымъ угломъ CAB къ данной AB. Перемѣнный уголъ CAB можемъ принимать за $\Pi(a)$ съ принадлежащей къ нему линіей a отъ $a=o$ до $a=\infty$ (ст. 102). Дѣлая теперь $AC=2a$, получимъ точки C на предѣльной. Въ ней слѣдовательно всѣ линіи CD, паралельныя съ AB, наклонены къ AC снова подъ угломъ $\Pi(a)$, подъ какимъ проведена была AC къ AB. Перпендикулъ EF въ серединѣ къ хордѣ AC будетъ также паралеленъ съ CD, слѣдовательно перпендикулъ GH ко всякой другой хордѣ CC въ серединѣ G долженъ также быть паралеленъ съ AB (ст. 111). Эту послѣднюю, которая не различается такимъ образомъ съ AB и со всѣми CD, назовемъ *осью* предѣльной кривой.

Первое свойство, которое само собой въ предѣльной теперь представляется, будетъ то, что дуги сливаются съ кривой, куда бы на нее ни переносились, какъ скоро тоже бываетъ съ осями, даже въ томъ случаѣ, когда плоскость оборачивается другою стороной. Это свойство дугъ на предѣльной указываетъ на самый способъ измѣренія, когда сравниваемъ ихъ одну съ другой, подобно тому, какъ находимъ содержаніе прямыхъ линій и линейныхъ угловъ.

Другое свойство предѣльной замѣтимъ еще то, что перпендикулъ изъ середины къ хордѣ всегда паралеленъ съ осью. Отсюда слѣдуетъ, что кругъ встрѣчаясь съ предѣльной, можетъ быть или касательнымъ, или пересѣкать не болѣе,

какъ въ двухъ точкахъ. Первый случай будетъ тотъ, когда кругъ проходитъ черезъ конецъ той оси, гдѣ лежитъ его центръ. Пересѣченіе предѣльной съ кругомъ въ двухъ точкахъ необходимо, когда первую, которой хорды растутъ безконечно, ведемъ внутри плоскости круга. Наконецъ пересѣченіе предѣльной съ кругомъ въ трехъ точкахъ не возможно, потому что хорды первой составляютъ такіе треугольники, около которыхъ нельзя начертить круга (ст. 111).

113. *Въ предположеніи прямыхъ угловъ параллельности кругъ, съ возрастаніемъ поперечника, переходитъ въ прямую линію.*

Пусть AB прямая (чер. 114), къ которой AC, BD перпендикулы. Какъ бы мала линія BD ни была, всегда можемъ найти кругъ, который проходя чрезъ одинъ конецъ A данной линіи AB, находится на разстояніи BD отъ другаго B. Стоитъ только прямую AD раздѣлить въ E пополамъ и здѣсь поставить къ ней перпендикулъ EC, который уже пересѣчетъ AC въ центрѣ такого круга.

Если продолживъ AC за точку C, беремъ здѣсь гдѣ нибудь центръ F, то кругъ описанный полупоперечникомъ AF, пересѣчетъ BD въ точкѣ G между крайнихъ B, D. Отсюда видно, что съ возрастаніемъ поперечника AC кругъ AD приближается къ его касательной AB до того, что разстоянія между ними наконецъ изчезаютъ.

114. *Въ предположеніи перемѣнныхъ угловъ параллельности, кругъ съ возрастаніемъ поперечника переходитъ въ предѣльную кривую.*

Пусть ABC (чер. 115) предѣльная, AD, CE оси, которыя съ хордой AC составляютъ равные углы α (ст. 112) и которыхъ разстоянія на сторонѣ параллельности, какъ мы знаемъ (ст. 109), уменьшаются, дѣлаясь наконецъ менѣе всякой данной линіи. Можемъ слѣдовательно чертить кругъ около точки F на оси AD съ такимъ большимъ полупоперечникомъ AF, чтобы пересѣчь не только хорду AC въ точкахъ A, G, но даже другую ось CE гдѣ нибудь въ H. Тогда два полупоперечника AF, GF съ хордой AG круга будутъ дѣлать углы α; два полупоперечника GF, HF будутъ наклонены къ хордѣ между ними GH подъ какимъ нибудь угломъ β, а послѣдній полупоперечникъ HF къ оси CE подъ угломъ γ внутри круга. Въ $\triangle CGH$ произойдутъ углы $CGH = \pi - \alpha - \beta$, $CHG = \pi - \beta - \gamma$, гдѣ α постоянный, β и γ перемѣняются съ движеніемъ точки F, которую всегда можно взять такъ далеко, чтобъ уголъ γ выходилъ менѣе всякаго даннаго, даже въ томъ случаѣ когда бы точка H сохраняла свое

мѣсто, того менѣе слѣдовательно, когда съ возрастаніемъ полупоперечника, въ кругѣ, она приближается къ концу C оси. Итакъ пусть $\alpha > \gamma$, послѣ чего $\pi - \beta - \alpha < \pi - \beta - \gamma$, линія $CH < CG$; но послѣдняя можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой, потому что перпендикулъ изъ середины P къ AG пересѣченіемъ съ AD назначаетъ всегда центръ круга для всякой хорды $AG < AC$.

Предѣльную кривую, также какъ и прямую линію (ст. 113), можно слѣдовательно принимать за кругъ съ безконечнымъ полупоперечникомъ, смотря по тому, которое изъ двухъ предположеній объ углахъ параллельности захотимъ допускать.

115. *Хорды двухъ дугъ, на предѣльной и на касательномъ къ ней кругѣ, тѣмъ менѣе разнятся, чѣмъ поперечникъ круга болѣе, такъ что съ возрастаніемъ поперечника разность наконецъ изчезаетъ.*

Пусть ABC (чер. 116) предѣльная, ADE къ ней касательный кругъ, оси CE, BD, начинаясь изъ двухъ точекъ B, C на предѣльной, пересѣкаютъ кругъ въ D, E, вырѣзывая дуги BC предѣльной и DE круга, которымъ отвѣчаютъ хорды $BC = \alpha$, $DE = \beta$, соединенныя частями двухъ осей $CE = \gamma$, $BD = \delta$.

Въ четыреугольникѣ $BDEC$ (ст. 55)

$$\alpha < \beta + \gamma + \delta$$

$$\beta < \alpha + \gamma + \delta.$$

Отсюда слѣдуетъ, что разность $\alpha - \beta$ по величинѣ менѣе суммы $\gamma + \delta$, гдѣ какъ γ, такъ δ съ возрастаніемъ полупоперечника можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной линіи (ст. 114).

Въ этомъ предложеніи можемъ предѣльную разумѣть какъ прямой, такъ и кривой линіей.

116. *Содержаніе двухъ дугъ на предѣльной тѣмъ менѣе разнится съ содержаніемъ двухъ дугъ на касательномъ кругѣ между двухъ осей, чѣмъ поперечникъ болѣе, съ возрастаніемъ котораго разность наконецъ изчезаетъ.*

Содержаніе двухъ дугъ на предѣльной, также какъ и на кругѣ, будетъ найдено, когда раздѣляемъ ихъ обѣ на равныя части (ст. 112). Пусть такимъ частямъ отвѣчаетъ на предѣльной хорда $BC = \alpha$ (чер. 117), которую переносимъ на касательный кругъ ADE, положивъ отъ точки D, гдѣ проходитъ ось отъ конца B хорды BC, тогда какъ отъ другаго конца C въ точкѣ E ось отрѣзывать дугу съ хордой $DE = \beta$ на касательномъ кругѣ.

Пусть теперь въ этомъ положеніи двѣ хорды будутъ $AB=\alpha$ (чер. 117), $AC=\beta$, точка D центръ касательнаго круга, откуда перпендикулы DE, DF падаютъ въ середины E, F двухъ линій AB, AC, составляя прямоугольные треугольники AED, AFD, гдѣ уголъ EAD болѣе FAD или менѣе, или равенъ, смотря по тому, $\alpha<\beta, =\beta, >\beta$. Мы предположимъ, что α съ β не равны, при томъ $\alpha<\beta$, такъ какъ тотъ или другой случай не дѣлаетъ разности въ доказательствѣ. Перпендикулъ DE долженъ слѣдовательно пересѣкать AF гдѣ нибудь въ G, такъ что $AG>AE$, послѣ чего $2FG<2AF-2AE, <\beta-\alpha$. Отсюда заключаемъ, что разстояніе FG можетъ быть сдѣлано какъ угодно малымъ съ увеличеніемъ полупоперечника AD (ст. 115). Далѣе сравнивая прямоугольные треугольники AEG, DFG и положивъ GF на GE, GD на GA, легко видимъ, что какъ скоро $GD>AG$, то $GF>GE$. Между тѣмъ $AG+GD>AD$, тогда какъ AG можетъ разниться съ AE менѣе нежели всякая данная линія; слѣдовательно съ увеличеніемъ AD достигаемъ наконецъ и того, что AG сдѣлается менѣе GD, а вмѣстѣ съ тѣмъ $EG<GF$. Итакъ съ возрастаніемъ полупоперечника AD перпендикулъ EG, и съ нимъ уголъ EAG, изчезаютъ. Теперь сдѣлавъ $AH=AB$, получимъ треугольникъ HBC, гдѣ, какъ видѣли (ст. 115), съ возрастаніемъ полупоперечника AD бокъ HC уменьшается безпредѣльно; другой бокъ BH тоже съ изчезаніемъ угла BAH; третій $BC<BH+HC$ наконецъ можетъ составлять менѣе нежели $\frac{1}{m}$ часть хорды AC, какъ бы цѣлое число m ни было велико. Въ такомъ случаѣ содержаніе, хордамъ AC, BC соотвѣтственныхъ угловъ при центрѣ круга, будетъ еще менѣе разниться, нежели дробь $\frac{1}{m}$; слѣдовательно полагая хорду α на касательномъ кругѣ, должны получить тоже содержаніе двухъ дугъ, какое было найдено для дугъ на предѣльной между тѣхъ же осей.

117. *Содержаніе двухъ дугъ s, s' на предѣльныхъ кривыхъ между двумя параллельными, которыя служатъ имъ осями, зависитъ отъ ихъ разстоянія x, такъ что*

$$s=s'e^x \qquad (6)$$

гдѣ постоянное $e>1$, когда s' отступаетъ отъ s по направленію параллельности.

Пусть AB, CD (чер. 118) двѣ параллельныя, которыя служатъ осями дугамъ $EF=s, E'F'=s'$ между ними на предѣльныхъ кривыхъ, такъ что s' въ отношеніи къ s лежитъ на сторонѣ параллельности (ст. 109). Полагаемъ растояніе $FF'=EE'=x$ (ст. 112), которое пусть подраздѣляется на равныя линіи ab, взятыя за единицу въ числѣ x. Замѣтимъ, что содержаніе e той дуги, кото-

рая выходитъ изъ точки a на оси, къ дугѣ, которая выходитъ изъ другой точки b, должно быть постоянное, на какой бы паралельной $c\,d$, $a'\,b'$ съ $a\,b$ двѣ дуги ни кончились. Дѣйствительно, когда содержаніе e выражаемъ дробью $\frac{n}{m}$ съ цѣлыми числами n, m; далѣе содержаніе двухъ дугъ $a\,c$, $a'\,c$ на одной предѣльной почитаемъ за содержаніе цѣлыхъ чиселъ p, q, то раздѣливъ $a\,c$ на $n\,p$, $c\,a'$ на $n\,q$ равныхъ частей, потомъ отъ точекъ дѣленія ведя паралельныя съ $a\,b$, получимъ на соотвѣтственныхъ дугахъ $b\,d$, $d\,b'$ равныхъ частей $n\,p, nq$; откуда заключаемъ, что содержаніе дуги $a\,c$ къ $a'\,c$ тоже $\frac{p}{q}$, какъ и дугъ $b\,d$ къ $b'\,d$. Доказавъ это, когда представляемъ теперь все разстояніе FF' раздѣленнымъ на x равныхъ частей, потомъ отъ всякой точки дѣленія воображаемъ дуги предѣльныхъ между двухъ осей AB, CD, то переходя по порядку отъ первой s ко второй, къ третьей и такъ далѣе, получимъ $e^{-1}\,s$, $e^{-2}\,s$ ... покуда на разстояніи $FF'=x$ придемъ къ дугѣ $s=s'\,e^{-x}$.

Здѣсь число e надобно почитать болѣе единицы, съ тѣмъ чтобы слѣдующая дуга s' на сторонѣ паралельности въ отношеніи къ s выходила менѣе нежели s. Такъ пусть направленіе паралельности двухъ линій $A\,B$, CD будетъ отъ концовъ A, C къ B, D; ведемъ гдѣ нибудь отъ $A\,B$ къ $C\,D$ двѣ дуги предѣльныхъ $a\,a'$, $b\,b'$, раздѣленныя пополамъ въ точкахъ c, d, чрезъ которыя слѣдовательно должна пройти $c'\,d'$, новая паралельная съ $a\,b$, на половинахъ c', d' перпендикулярно къ хордамъ двухъ дугъ. Здѣсь перпендикулъ $a\,c' > b\,d'$, далѣе самыя хорды $a'\,c' > b'\,d'$, какъ скоро $b\,b'$ на сторонѣ паралельности въ отношеніи къ $a\,a'$ (ст. 109). Между тѣмъ происхожденіе предѣльной требуетъ, чтобы съ возрастаніемъ хорды увеличивалась и самая дуга (ст. 112), слѣдовательно дуга $a\,a' > b\,b'$.

Выборъ единицы для прямыхъ линій совершенно произволенъ, а потому можно почитать e также какимъ угодно числомъ, лишь бы $e > 1$, каково напримѣръ основаніе неперовыхъ логариѳмовъ.

Если два предположенія въ отношеніи къ угламъ паралельности должны заключаться въ общихъ выраженіяхъ, то надобно число e оставлять неопредѣленнымъ, съ тѣмъ чтобъ $e > 1$ относилось къ одному, $e = 1$ къ другому предположенію. Такъ уравненіе (6) для прямыхъ угловъ паралельности, слѣдовательно для $e = 1$, даетъ $s = s'$, или равенство перпендикуловъ между двумя паралельными.

Число e въ томъ и другомъ предположеніи дозволяется также почитать опредѣленнымъ, принимая напримѣръ его за основаніе неперовыхъ логариѳмовъ,

но тогда всѣ линіи въ Употребительной Геометріи дѣлаютея безкопечно малыми, такъ что во всѣхъ уравненіяхъ онѣ войдутъ только въ ихъ содержаніе другъ къ другу. Напримѣръ уравнепіе (6) для $x = o$ даетъ снова $s = s'$, равепство перпендикуловъ между паралельными.

118. *Предѣльная поверхность* даетъ предѣльную линію въ пересѣченіи ея плоскостями, проведенными черезъ одну прямую, которую назовемъ *осью*, а самыя плоскости—*поперечными*.

Отсюда слѣдуетъ, что предѣльная поверхпость должна быть тою границей, къ которой приближается сфера съ возрастаніемъ поперечника, тогда какъ большіе круги на сферѣ переходятъ въ предѣльную линію.

Предѣльную поверхность можно слѣдовательно представлять себѣ какъ поверхность отъ обращенія предѣльной линіи на своей оси. Въ предположеніи прямыхъ угловъ параделыности предѣльная поверхность будетъ плоскость; въ другомъ предположеніи надобно принимать ее за кривую поверхность.

119. *Плоскость пересѣкаетъ предѣльную поверхность либо въ предѣльной линіи, либо въ кругъ, смотря по тому, проходитъ или нѣтъ черезъ паралельную съ осью.*

Пусть A, B, C (чер. 120) три точки на предѣльной поверхности. Изъ A выходитъ ось AA'; другія двѣ B, C не лежатъ съ A въ одной предѣльной линіи. Воображаемъ отъ нихъ BB', CC' паралельныя съ AA' въ одну сторону плоскости треугольника ABC, слѣдовательно всѣ три линіи AA', BB', CC' паралельными между собой, а каждыя двѣ въ одной плоскости (ст. 99). Раздѣливъ AC пополамъ, ведемъ изъ середины D паралельную DD' съ AA', потомъ въ плоскости треугольника ABC къ AC перпепдикулъ QD, котораго величину беремъ такую, чтобы въ концѣ Q перпендикулъ QQ' къ плоскости треугольника ABC былъ параделенъ съ DD' (ст. 102) и слѣдовательно также съ AA', BB', CC' (ст. 99). Черезъ QQ' съ каждой изъ трехъ паралельныхъ AA', BB', CC' представляемъ себѣ плоскости, которыя должны разрѣзывать плоскость треугольника ABC перпендикулярно (ст. 59) въ линіяхъ AQ, BQ, CQ. Сферы вокругъ точекъ A, B въ пересѣченіи съ плоскостью треугольника AQB и съ плоскостями линій AA', BB', QQ' производятъ одинаковые сферическіе треугольники $b'aq', baq$, потому что кромѣ прямыхъ угловъ еще бока $b'a = ba'$ (ст. 112), уголъ $b'aq' = a'bq$, притомъ бока $b'a < \frac{1}{2}\pi, b'q' < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 88), послѣ чего бокъ $a'q = b'q$, потомъ $AQ = BQ$. Также бы доказали, что $AQ = CQ$, откуда заключаемъ, что противъ равныхъ боковъ BQ, CQ уголъ $QBC = QCB$.

Теперь изъ Q перпендикулъ $Q\,E$ къ $B\,C$ долженъ падать въ середину E; плоскость $Q'\,Q\,E$ должна пересѣкать плоскость паралельныхъ $B\,B'$, $C\,C'$ въ линіи $E\,E'$ перпендикулярной къ $B\,C$ (ст. 59), слѣдовательно уголъ $B'\,B\,C = C'\,C\,B$ (ст. 102). Еслибъ уголъ $D'\,D\,Q$ вышелъ прямой, тогда бы точка Q соединялась съ D на половинѣ бока AC. Еслижъ уголъ $D'\,D\,Q > \frac{1}{2}\pi$, то вмѣсто DQ надобно взять линію $D\,G$ принадлежную къ углу $\pi - D'DQ$ на другой сторонѣ бока AC внѣ треугольника $A\,B\,C$ (ст. 102). Во всѣхъ этихъ случаяхъ доказательство не перемѣняется въ сущности своей и ведетъ къ тому заключенію, что плоскость паралельная съ осью $A\,A'$ пересѣкаетъ предѣльную поверхность въ точкахъ B, C, которыя принадлежатъ къ одной предѣльной линіи. Итакъ все равно, изъ какихъ бы точекъ B, C на предѣльной поверхности ни выходили паралельныя съ $A\,A'$, онѣ всѣ бываютъ осями, а плоскости черезъ нихъ проведенныя—поперечными.

Съ предѣльной поверхностію сливается такимъ образомъ всякая часть ея, куда бы ни переносилась тремя точками.

Если теперь плоскость проходитъ черезъ какія нибудь три точки A, B, C, взятыя на предѣленой поверхности, не принадлежа къ поперечнымъ, то паралельная съ $A\,A'$ черезъ всякую четвертую точку F, общую поверхности съ плоскостію, будетъ также паралельна съ перпендикуломъ $Q\,Q'$, а слѣдовательно разстояніе $F\,Q$, точки F до начала Q перпендикула на плоскости, снова тоже, что разстоянія $A\,Q$, $B\,Q$, $C\,Q$. Итакъ пересѣченіе не поперечной плоскости съ предѣльной поверхностію даетъ кругъ, котораго центръ въ Q.

120. Предѣльная линія на предѣльной поверхности представляетъ намъ всѣ тѣ свойства, какія принадлежатъ прямымъ на плоскости въ предположеніи постоянныхъ угловъ паралельности, слѣдовательно тѣ самыя свойства, которыя въ Употребительной Геометріи приняты. Различіе заключается только въ томъ, что на плоскости положеніе двухъ прямыхъ опредѣляется линейнымъ угломъ, а на предѣльной поверхности наклоненіе предѣльной линіи къ другой измѣряется плоскостнымъ угломъ двухъ попоречныхъ плоскостей, гдѣ лежатъ самыя дуги.

Вотъ почему всѣ названія, которыя къ положенію взаимному прямыхъ линій относятся, могутъ быть удержаны для предѣльныхъ линій, проведенныхъ по кривой предѣльной поверхности. *Перпендикулъ* будетъ также называться та предѣльная линія, которая встрѣчаетъ другую, дѣлая въ обѣ стороны прямой уголъ *Паралельныя* линіи будутъ тѣ, которыя сколько бы ни продолжались, никогда не встрѣчаются. Ихъ пересѣкаетъ третья предѣльная подъ однимъ угломъ, также какъ и наоборотъ двѣ предѣльныя, которыя пересѣкаются третьей подъ однимъ

угломъ, должны быть паралельны (ст. 101), или, все тоже, когда сумма внутреннихъ угловъ даетъ π.

121. Изъ предѣльныхъ линій на предѣльной поверхности составляются такіе треугольники, гдѣ сумма трехъ угловъ π (ст. 100) и которые назовемъ *предѣльными треугольниками.*

Обратимъ еще вниманіе на то, что всѣ свойства прямолинейныхъ треугольниковъ, съ предложеніемъ въ нихъ суммы трехъ угловъ π, выводили до сихъ поръ основываясь единственно на томъ, что бока равныхъ угловъ сливаются при наложеніи другъ на друга треугольниковъ, тою либо другой стороной. Въ предѣльныхъ треугольникахъ тоже бока въ одномъ слѣдуетъ направленію боковъ въ другомъ, какъ скоро предполагаемъ равенство плоскостныхъ угловъ. Чтоже касается до взгляда на треугольникъ съ противоположной стороны, то здѣсь это замѣняестя составленіемъ *оборотнаго треугольника*, подъ которымъ, также какъ на сферѣ (ст. 44), будемъ разумѣть такой, гдѣ бока слѣдуютъ въ другомъ направленіи.

Оборотный прямолинейный треугольникъ получимъ, перекладывая плоскость его на противоположную сторону. Оборотный сферическій треугольникъ, тоже что вершинный тѣлесный уголъ, происходитъ отъ продолженія плоскостей за центръ сферы. Наконецъ всякій треугольникъ прямолинейный, сферическій и предѣльный —переходитъ въ оборотный, когда раздѣливъ равными перпендикулами къ бокамъ изъ одной точки, соединяемъ три части въ новомъ порядкѣ.

Въ $\triangle ABC$ (чер. 120) раздѣлимъ два угла A, B пополамъ, ведя линіи AD, BD къ ихъ общей точкѣ D, изъ которой опускаемъ перпендикулы DE, DF, DG къ бокамъ AB, BC, AC. Произойдутъ треуготьники $ADE \cong AGD$, $DEB \cong BDF$ (ст. 87), слѣдовательно $DE = DF = DG$, хотя бы треугольники были сферическіе, потому что въ нихъ углы вокругъ D по два не составляютъ π (ст. 88). Такъ во всякомъ треугольникѣ можно сыскать центръ D такого круга, съ полупоперечникомъ DE, который касается всѣхъ боковъ. Если теперь означаемъ a двѣ равныя линіи AE, AG; потомъ b равныя линія BE, BF; наконецъ c рввныя линіи CG, CF, то соединеніе четыреугольниковъ $AGDE$ $BEDF, FDGC$ въ новомъ порядкѣ даетъ намъ треугольникъ $A'B'C'$ оборотный съ прежнимъ ABC.

Итакъ все, что ни сказано было до сихъ поръ о прямолинейныхъ треугольникахъ, въ предположеніи суммы трехъ угловъ π, распространяется теперь безъ ограниченія на предѣльные треугольники.

Случаи, въ которыхъ предѣльные треугольники одинаковы, будутъ тѣ, когда въ нихъ равны:

1) *Три бока* (ст. 82).

2) *Два бока съ угломъ между ними* (ст. 81).

3) *Два бока съ угломъ противъ большаго* (ст. 84).

4) *Бокъ и два при немъ угла* (ст. 81).

5) *Бокъ, при немъ одинъ уголъ и другой противъ него* (ст. 87).

Паралельныя линіи между боками въ углѣ содержатся какъ отрѣзки боковъ (ст. 104).

Въ прямоугольномъ предѣльномъ треугольникѣ квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ отъ катетовъ (ст. 105).

Впередъ нѣтъ болѣе нужды различать предѣльный треугольникъ или всякій предѣльный многоугольникъ съ треугольникомъ или многоугольникомъ прямолинейнымъ, какъ скоро въ прямолинейномъ треугольникѣ допускаемъ сумму трехъ угловъ π; развѣ встрѣтится надобность обратить вниманіе на то, будутъ ли бока прямые или кривые. Такъ въ слѣдующей статьѣ, какъ и во всей главѣ потомъ о тригонометрическихъ функціяхъ, будемъ говорить о прямолинейныхъ треугольникахъ Употребительной Геометріи, хотя въ строгости должно разумѣть собственно треугольники Воображаемой Геометріи на предѣльной поверхности, если не хотимъ допускать никакихъ произвольныхъ предположеній.

122. *Подобными треугольниками* называемъ тѣ, которыхъ углы равны, также содержаніе противоположныхъ имъ боковъ одинаковое. Въ такомъ случаѣ говорятъ, тчо бока *пропорціональны*. Между подобными треугольниками будемъ ставить знакъ $\backsim$, выражаясь къ тому съ такимъ же сокращеніемъ, какъ и въ одинаковости треугольниковъ (ст. 81).

Треугольники бываютъ подобны, когда въ нихъ равны:

1) *Два угла.*

2) *Содержаніе двухъ боковъ и между ними уголъ.*

3) *Содержаніе двухъ боковъ съ угломъ противъ большаго.*

4) *Содержаніе трехъ боковъ равное.*

Означаемъ въ одномъ треугольникѣ P: бока a,b,c, противъ нихъ углы A,B,C; въ другомъ Q: бока a', b', c', углы противъ нихъ A', B', C'.

Пусть $A = A', B = B'$, слѣдовательно $C = C'$. Треугольникъ P кладемъ на второй Q угломъ A на A' и такъ чтобы бокъ b шелъ по b', слѣдовательно c по c'. Двѣ линіи a, a' покроютъ одна другую въ случаѣ $b = b'$ или $c = c'$, потому что самые треугольникѣ будутъ одинаковы (ст. 81). Если же b съ b', c, съ c' не равны, то линіи a, a' сдѣлаются параллельными (ст. 101), послѣ чего содержаніе боковъ въ одномъ треугольникѣ должно быть тоже, что въ другомъ (ст. 103), а самые треугольники подобны.

Пусть

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad , \quad C = C'.$$

Составляемъ еще треугольникъ R, взявъ бокъ a съ углами при немъ B', C', какъ это всегда можно, потому что $B' + C' < \pi$ (ст. 101). Послѣ того что было сейчасъ доказано, треугольники $Q \backsim R$, слѣдовательно бокъ противъ B' въ Q будетъ b, уголъ въ Q между a, b долженъ быть $C' = C$; треугольники $P \backsimeq R$ (ст. 121), наконецъ $P \backsim Q$.

Пусть

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, a > b, A = A'.$$

Составляемъ треугольникъ R, взявъ бока a,b, уголъ между нимъ C'. Тогда $R \backsim Q$, какъ было выше доказано; слѣдовательно въ R противъ a долженъ быть уголъ $A' = A$, послѣ чего $P \backsimeq R$ (ст. 84, 121), $P \backsim Q$.

Пусть

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Составляемъ треугольникъ R, гдѣ бока a, b, между нихъ уголъ C': Въ такомъ случаѣ $R \backsim Q$, слѣдовательно третій бокъ въ R противъ угла C' долженъ быть c; послѣ чего $R \backsimeq P$ (ст. 82, 121), $P \backsim Q$.

Вообще многоугольники называются *подобными*, когда въ нихъ всѣ бока пропорціональны, всѣ углы равны, при томъ бока слѣдуютъ въ томъ же порядкѣ, въ какомъ равные углы.

Изъ подобныхъ треугольниковъ составляются подобные многоугольники. Напримѣръ когда къ одной точкѣ ведемъ отъ остреевъ линіи, потомъ между ними, примыкая другъ къ другу, паралельныя съ боками многоугольника, то получимъ новый многоугольникъ, подобный данному.

ГЛАВА IX.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКІЯ ФУНКЦІИ.

123. Въ прямоугольномъ треугольникѣ называемъ c гипотенузу, a, b катеты, A, B противъ нихъ углы. Содержанія $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, катетовъ къ гипотенузѣ, зависятъ отъ угла A или, все тоже, отъ угла $B = \frac{1}{2}\pi - A$ (ст. 100, 104, 121), такъ что $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ постоянны, либо мѣняются вмѣстѣ съ углами A, B. Эту зависимость содержанія $\frac{a}{c}$ съ угломъ A называютъ *синусъ*, и пишутъ

$$\frac{a}{c} = \text{sin. } A. \tag{7}$$

Чтобы распространить названіе синуса на всѣ вообще углы, какимъ бы числомъ они ни выражались, хотябъ отрицательнымъ, въ дополненіе къ уравненію (7) принимаемъ

$$\left.\begin{aligned} &\text{sin. } o = o \\ &\text{sin. } \tfrac{1}{2}\pi = 1 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\text{sin. } A = \text{sin. } (\pi - A) \tag{9}$$

$$\text{sin. } (n\pi + A) = (-1)^n \text{ sin. } A \tag{10}$$

$$\text{sin. } (-A) = -\text{ sin. } A. \tag{11}$$

Уравненія (8) пополняютъ значеніе синусовъ въ четверти круга. Уравненіе (9) даетъ значеніе синуса для всякаго угла $\pi - A$ тупаго до угла π; уравненіе (10), съ n цѣлымъ положительнымъ числомъ, служитъ для синусовъ отъ всѣхъ угловъ $n\pi + A > \pi$; съ пособіемъ уравненія (11) находимъ синусъ отъ всѣхъ отрицательныхъ угловъ $-A$.

Кстати здѣсь сказать объ опредѣленіяхъ въ Геометріи, которыя требуется распространять отъ частныхъ случаевъ на всѣ прочіе. Хотя ничто не мѣшаетъ такое разширеніе въ понятіи допускать совершенно произвольнымъ, однакожъ съ тою цѣлію, чтобы значеніе всякой геометрической величины могло быть обнимаемо въ общихъ аналитическихъ выраженіяхъ, надобно всегда соблюдать постепенность и согласный переходъ отъ одного случая къ другому. Такъ уравненія (8) приняты по тому, что въ уравненіи (7) уголъ A съ линіей a уменьшаясь, могутъ быть даже сдѣланы какъ угодно малыми, тогда какъ уголъ A вмѣстѣ съ линей a возрастая, приближаются, A къ $\frac{1}{2}\pi$, a къ c. Уравненіе (10) даетъ синусы въ промежуткѣ значеній отъ $n\pi$ до $(n+1)\pi$ для угла съ цѣлымъ числомъ n. Когда теперь полагаемъ $A = \pi$, то получимъ

$$\text{sin.}\,(n+1)\,\pi = (-1)^n \,\text{sin.}\,\pi = o.$$

Еслижъ ставимъ $n+1$ вмѣсто n, тогда какъ $A = o$, то снова находимъ

$$\text{sin.}\,(n+1)\,\pi = (-1)^{n+1} \,\text{sin.}\,\pi = o.$$

Наконецъ уравненіе (11) для $A = o$ дѣлается $\text{sin.}\,(-o) = -\,\text{sin.}\,o$, но $\text{sin.}\,(-o) = \text{sin.}\,o$, слѣдовательно на той и другой сторонѣ выходятъ нули. Если вмѣсто положительнаго A ставимъ $-A$, то уравненіе (11) принимаетъ видъ

$$\text{sin.}\,A = -\,\text{sin.}\,{-A}.$$

согласный съ прежнимъ. Итакъ уравненіе (11) справедливо для всѣхъ значеній A, какъ положительныхъ, такъ отрицательныхъ и для $A = o$.

Синусъ отъ $\frac{1}{2}\pi - A$ для всякаго угла A называютъ *косинусъ*, и пишутъ

$$\text{cos.}\,A = \text{sin.}\,(\tfrac{1}{2}\pi - A). \qquad (12)$$

Содержаніе синуса къ косинусу называютъ *тангенсъ*, а содержаніе коснинуса къ синусу—*котангенсъ*. Такъ пишутъ для всякаго угла A

$$\text{tang.}\,A = \frac{\text{sin.}\,A}{\text{cos.}\,A} \qquad (13)$$

$$\text{cot.}\,A = \frac{\text{cos.}\,A}{\text{sin.}\,A}. \qquad (14)$$

Послѣднее уравненіе можно представить въ другомъ видѣ

$$\text{cot.}\,A = \text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\pi - A).$$

Уравненія (12), (13), (14) въ соединеніи съ уравненіями (8) даютъ

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\pi = 1 \qquad \cot.\,\tfrac{1}{4}\pi = 1$$

$$\cos.\,o = 1 \qquad \cos.\,\tfrac{1}{2}\pi = o$$

$$\text{tang.}\,o = o \qquad \cot.\,o = \infty$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\pi = \infty \qquad \cot.\,\tfrac{1}{2}\pi = o.$$

Итакъ значенія синусовъ и косинусовъ заключаются въ границахъ $+1, -1$; значенія тангенсовъ и котангенсовъ между $-\infty, +\infty$.

Синусъ, кусинусъ, тангенсъ и котангенсъ называются *тригонометрическія функціи*.

124. *Какой уголъ* A *ни будетъ, всегда*

$$\sin.(\pi + A) = -\sin. A. \tag{15}$$

Для $A = o$ на одной сторонѣ въ уравненіи получимъ $\sin.\pi = o$ [ур. (9)], на другой также $\sin. o = o$ [ур. (8)].

Всякій положительный уголъ $A = n\pi + \alpha$, гдѣ n можетъ быть нуль или цѣлое положительное число, тогда какъ α либо нуль, либо положительный уголъ $< \pi$. Послѣ чего [ур. (10)]

$$\sin.(\pi + A) = \sin.\{(n+1)\pi + \alpha\}$$

$$= (-1)^{n+1}\sin.\alpha.$$

На другой сторонѣ въ уравненіи (15)

$$-\sin. A = -\sin.(n\pi + \alpha)$$

$$= (-1)^{n+1}\sin.\alpha.$$

Отрицательный уголъ A можемъ подобнымъ образомъ полагать $-n\pi - \alpha$, съ $n = o$ или цѣлымъ положительнымъ числомъ, съ $\alpha = o$ или положительнымъ угломъ $< \pi$. Различаемъ къ тому три случая: $n = o, n = 1, n > 1$.

Для $n = o$ [ур. (9)]

$$\sin.(\pi + A) = \sin.(-\alpha)$$

$$= \sin.\alpha.$$

Далѣе [ур. (11)]

$$-\sin. A = -\sin. (-\alpha)$$
$$= \sin. \alpha.$$

Для $n = 1$ [ур. (11)]

$$\sin. (\pi + A) = \sin. (-\alpha)$$
$$= -\sin. \alpha,$$
$$-\sin. A = -\sin. (-\pi - \alpha)$$
$$= \sin. (\pi + \alpha)$$
$$= -\sin. \alpha.$$

Для $n > 1$ [ур. (11), (10)]

$$\sin. (\pi + A) = \sin. \{-(n-1)\pi - \alpha\}$$
$$= -\sin. \{(n-1)\pi + \alpha\}$$
$$= (-1)^n \sin. \alpha,$$
$$-\sin. A = -\sin. \{-n\pi - \alpha\}$$
$$= \sin. (n\pi + \alpha)$$
$$= (-1)^n \sin. \alpha.$$

Въ уравненіи (15) ставя $-A$ вмѣсто A, для всякаго угла A получимъ [ур. (11)]

$$\sin. (\pi - A) = \sin. A \qquad (16)$$

Полагая здѣсь по порядку $A = \pi, 2\pi, 3\pi$ и т. д., заключаемъ вообще для цѣлыхъ, какъ положительныхъ такъ отрицательныхъ чиселъ n, [ур. (11)]

$$\sin. n\pi = o \qquad (17)$$

Если же въ уравненіи (16) вмѣсто A ставимъ $\pi + A, 2\pi + A, 3\pi + A...$, то находимъ, что уравненіе (10) справедливо для всѣхъ цѣлыхъ n и для всѣхъ произвольныхъ угловъ A, именно

$$\sin. (n\pi + A) = (-1)^n \sin. A. \qquad (18)$$

125. *Какой уголъ* A *ни будетъ, всегда*

$$\cos. (-A) = \cos. A. \qquad (19)$$

Согласно съ опредѣленіемъ (ст. 123)

$$\cos.(-A) = \sin.(\tfrac{1}{2}\pi + A).$$

Далѣе [ур. (16)]

$$\sin.(\tfrac{1}{2}\pi + A) = \sin.(\tfrac{1}{2}\pi - A)$$
$$= \cos. A.$$

Послѣ чего уравненія (11), (19) даютъ (ст. 123) для всѣхъ угловъ A

$$\text{tang.}(-A) = -\text{tang.} A \tag{20}$$
$$\cot.(-A) = -\cot. A. \tag{21}$$

126. *Для всѣхъ угловъ* A *и для всѣхъ* n *цѣлыхъ, какъ положительныхъ такъ отрицательныхъ чиселъ,*

$$\cos.(n\pi + A) = (-1)^n \cos. A. \tag{22}$$

Согласно съ опредѣленіемъ (ст. 123)

$$\cos.(n\pi + A) = \sin.(\tfrac{1}{2}\pi - n\pi - A).$$

Далѣе [ур. (11)]

$$\cos.(n\pi + A) = -\sin.(n\pi - \tfrac{1}{2}\pi + A);$$

потомъ [ур. (18)]

$$\cos.(n\pi + A) = -(-1)^n \sin.(-\tfrac{1}{2}\pi + A)$$
$$= (-1)^n \sin.(\tfrac{1}{2}\pi - A)$$
$$= (-1)^n \cos. A.$$

Соединеніе двухъ уравненій (18), (22) даетъ для всѣхъ угловъ A, также какъ и для всѣхъ цѣлыхъ чиселъ n (ст. 123)

$$\text{tang.}(n\pi + A) = \text{tang.} A \tag{23}$$
$$\cot.(n\pi + A) = \cot A. \tag{24}$$

Изъ уравненій (18), (22), (23), (24) легко заключить, что *значеніе тригонометрической функціи не перемѣняется, когда къ углу придаемъ* 2π *или вычитаемъ изъ него* 2π.

127. *Для всѣхъ угловъ* A

$$\sin. A^2 + \cos. A^2 = 1. \tag{25}$$

Уравненія (11), (19) дозволяютъ сюда ставить $-A$ вмѣсто A; слѣдовательно доказывать предложеніе нужно только для $A = o$, и для угловъ A положительныхъ. Если $A = o$, то значенія $\sin. A = o$ [ур. (8)], $\cos. A = 1$ (ст. 123) повѣряютъ уравненіе (25). Далѣе уравненія (18), (22) дозволяютъ въ уравненіе (25) вмѣсто A ставить $A - n\pi$ съ цѣлымъ числомъ n, слѣдовательно доказывать остается для $A > o, < \pi$; а когда поставимъ теперь $\pi - A$ вмѣсто $A > \frac{1}{2}\pi$, основываясь на уравненіяхъ (16), (22), то довольно разсмотрѣть одни значенія отъ $A > o$ покуда $A < \frac{1}{2}\pi$, такъ какъ $A = \frac{1}{2}\pi$ даетъ $\sin. A = 1$, $\cos. A = o$ (ст. 123).

Называемъ въ прямоугольномъ треугольникѣ a, b катеты, A, B противъ нихъ углы, c гипотенузу. Получимъ (123)

$$\frac{a}{c} = \sin. A$$

$$\frac{b}{c} = \sin. B = \cos. A.$$

Отсюда (ст. 121)

$$\sin. A^2 + \cos. A^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Напримѣръ для $A = \frac{1}{4}\pi$ находимъ

$$\sin. \tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos. \tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Раздѣливъ уравненіе (25) на $\sin. A^2$ или $\cos. A^2$, получимъ

$$1 + \text{tang}. A^2 = \frac{1}{\cos. A^2}$$

$$1 + \cot. A^2 = \frac{1}{\sin. A^2}.$$

Итакъ значенія всѣхъ тригонометрическихъ функцій будутъ извѣстны, какъ скоро знаемъ одной изъ нихъ для угловъ отъ нуля до $\frac{1}{4}\pi$.

128. *Бока въ треугольникѣ содержатся какъ синусы противоположныхъ угловъ.*

Называемъ a, b, c бока, A, B, C противъ нихъ углы въ треугольникѣ. Надобно доказывать, что

$$a \sin. B = b \sin. A. \tag{26}$$

Если $A = \frac{1}{2}\pi$, то $\sin. A = 1$, содержаніе $\frac{b}{a}$ представляетъ $\sin. B$ (ст. 123).

Если $A < \frac{1}{2}\pi, B < \frac{1}{2}\pi$, то перпендикулъ p изъ острея C (чер. 121) къ боку c раздѣляетъ треугольникъ на два прямоугольныхъ: въ одномъ гипотенуза b, уголъ A противъ катета p; въ другомъ гипотенуза a, уголъ B противъ катета p, слѣдовательно (ст. 123)

$$p = b \sin. A$$

$$p = a \sin. B.$$

Если $A > \frac{1}{2}\pi$, то перпендикулъ p падаетъ внѣ треугольника на продолженіе бока c за острее угла A (122), производя снова два прямоугольныхъ треугольника, изъ которыхъ въ одномъ гипотенуза a, катетъ p съ угломъ B противъ него; въ другомъ гипотенуза b, катетъ p съ угломъ $\pi - A$ противъ него; но какъ $\sin. (\pi - A) = \sin. A$ [ур. (9)], то въ этомъ случаѣ значенія перпендикула p тоже повѣряютъ уравненіе (26).

129. *Для всѣхъ угловъ* A, B

$$\sin. (A + B) = \sin. A \cos B + \cos. A \sin. B. \tag{27}$$

Это вѣрно для $A = o$, $A = \frac{1}{2}\pi$, $A = \pi$. Въ первомъ случаѣ на той и другой сторонѣ получится $\sin. B$. Для $A = \pi$ на обѣихъ сторонахъ находимъ $-\sin. B$ [ур. (15)]. Для $A = \frac{1}{2}\pi$ будетъ [ур. (16)]

$$\begin{aligned} \sin. (A + B) &= \sin. (\tfrac{1}{2}\pi + B) \\ &= \sin. (\tfrac{1}{2}\pi - B) \\ &= \cos. B. \end{aligned}$$

Далѣе

$$\begin{aligned} \sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B &= \sin. \tfrac{1}{2}\pi \cos. B \\ &= \cos. B. \end{aligned}$$

Пусть теперь A, B положительные углы, $A > o, A + B < \pi$. Такіе углы A, B, могутъ быть при бокѣ c въ треугольникѣ (ст. 101), гдѣ два другіе бока

противъ A, B называемъ a, b. Если $A < \frac{1}{2}\pi$, то бокъ c перпендикуломъ p къ нему, изъ противоположнаго угла C, раздѣляется на двѣ части x къ углу B, $c - x$ къ углу A (чар. 121), производя два прямоугольныхъ треугольника, гдѣ (ст. 123)

$$c - x = b \cos. A$$

$$x = a \cos. B.$$

Еслижъ $A > \frac{1}{2}\pi$ (чер. 122), то перпендикулъ p падаетъ на продолженіе бока c, такъ что произойдутъ два прямоугольныхъ треугольника: въ одномъ катеты p, x; въ другомъ $p, c + x$ съ углами $B, \pi - A$ противъ p; слѣдовательно [ур. (22), (19)]

$$x = - b \cos. A$$

$$c + x = a \cos. B.$$

Въ обоихъ случаяхъ находимъ такимъ образомъ

$$c = a \cos. B + b \cos. A. \qquad (28)$$

Основываясь на уравненіи (26), можемъ ставить сюда sin. C, sin. A, sin. B вмѣсто c, a, b. Такъ получимъ

$$\sin. C = \sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B.$$

Между тѣмъ $C = \pi - A - B$, слѣдовательно sin. C = sin. $(A + B)$ [ур. (16)].

До сихъ поръ уравненіе (27) доказано для всѣхъ угловъ отъ $A = o, B = o$ до $A = \pi, B = \pi$, покуда $A + B < \pi$. Оно также справедливо для $A + B = \pi$, потому что въ этомъ случаѣ sin. $(A + B) = o$, cos. B = — cos. A [ур. (22)], sin. B = sin. A [ур. (16)].

Полагаемъ вообще $A = n\pi + \alpha$, $B = m\pi + \beta$, гдѣ n, m могутъ быть нулями, либо цѣлыми положительными числами углы α, β могутъ быть также нулями, либо положительными $< \pi$. Находимъ [ур. (19)]

$$\sin. (A + B) = (-1)^{n+m} \sin. (\alpha + \beta),$$

$$\sin. A = (-1)^n \sin. \alpha,$$

$$\sin. B = (-1)^m \sin. \beta.$$

Далѣе [ур. (22)]

$$\cos. A = (-1)^n \cos. \alpha,$$

$$\cos. B = (-1)^m \cos. \beta.$$

Послѣ чего уравненіе (27) дѣлается

$$\sin. (\alpha + \beta) = \sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta$$

и было доказано для $\alpha + \beta \leqq \pi$. Въ случаѣ $\alpha + \beta > \pi, < 2\pi$ можемъ дать послѣднему уравненію такой видъ

$$\sin. (2\pi - \alpha - \beta) = \sin. (\pi - \alpha) \cos. (\pi - \beta) + \cos. (\pi - \alpha) \sin. (\pi - \beta)$$

и почитать это вѣрнымъ, потому что здѣсь сумма угловъ $\pi - \alpha, \pi - \beta$ менѣе π.

Что касается до значеній отрицательныхъ A, B, то можемъ сдѣлать ихъ положительными прибавляя нѣсколько разъ 2π, отъ чего значенія самыхъ функцій не перемѣнятся (ст. 126).

130. Изъ уравненія (27) слѣдуютъ другія, когда ставимъ $-B$ вмѣсто B, потомъ въ этомъ новомъ и въ прежнемъ $\frac{1}{2}\pi - A$ вмѣсто A. Такъ получимъ

$$\sin. (A - B) = \sin. A \cos. B - \cos. A \sin. B \tag{29}$$

$$\cos. (A + B) = \cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B \tag{30}$$

$$\cos. (A - B) = \cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B. \tag{31}$$

Уравненія будучи раздѣлены, (27) на (30), (29) на (31), даютъ

$$\text{tang.} (A + B) = \frac{\text{tang.} A + \text{tang.} B}{1 - \text{tang.} A \text{ tang.} B} \tag{32}$$

$$\text{tang.} (A - B) = \frac{\text{tang.} A - \text{tang.} B}{1 + \text{tang.} A \text{ tang.} B}. \tag{33}$$

131. Когда въ уравненіи (27) полагаемъ $A = B$, то получимъ

$$\sin. 2A = 2 \sin. A \cos. A. \tag{34}$$

Тоже дѣлая въ уравненіи (30) и принимая въ помощь уравненіе (25),

$$1 + \cos. 2A = 2 \cos. A^2 \tag{35}$$

$$1 - \cos. 2A = 2 \sin. A^2. \tag{36}$$

Такъ начиная съ $A = \frac{1}{2}\pi$, постепенно находимъ

$$\cos.\frac{\pi}{2^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \sin.\frac{\pi}{2^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos.\frac{\pi}{2^3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \sin.\frac{\pi}{2^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos.\frac{\pi}{2^4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad \sin.\frac{\pi}{2^4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

и т. д. и т. д.

гдѣ всѣ корни должно разумѣть положительными, потому что синусъ и косинусъ острыхъ угловъ не можетъ быть отрицательнымъ (ст. 123). Этотъ способъ приводитъ къ значенію синусовъ и косинусовъ отъ всѣхъ $\frac{\pi}{2^n}$ съ n цѣлымъ положительнымъ числомъ. Потомъ уравненія (27), (29) служатъ къ опредѣленію синусовъ и косинусовъ отъ всѣхъ угловъ, которые могутъ быть представлены суммой угловъ $\pi\, 2^{-n}$. Наконецъ всякій уголъ вообще выражается произведеніемъ $\frac{1}{2}\pi$ на сумму нѣсколькихъ положительныхъ степеней отъ $\frac{1}{2}$, по крайней мѣрѣ съ разностію какъ угодно малой. Означаемъ эту разность ω, данный уголъ A, сумму всѣхъ слагаемыхъ, которыхъ видъ $\frac{1}{2^n}\pi$, назовемъ B, такъ что $A = B + \omega$. Уравненія (27), (29) даютъ

$$\sin. A = \sin. B \cos. \omega + \cos. B \sin. \omega$$

$$\cos. A = \cos. B \cos. \omega - \sin. B \sin. \omega$$

а поставя сюда [ур. (35), (36)]

$$\sin. \omega = 2 \sin. \tfrac{1}{2}\omega \cos. \tfrac{1}{2}\omega$$

$$\cos. \omega = 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2}\omega^2$$

находимъ

$$\sin. A - \sin. B = 2 \sin. \tfrac{1}{2}\omega \cos. (B + \tfrac{1}{2}\omega) \qquad (37)$$

$$\cos. A - \cos. B = -2 \sin. \tfrac{1}{2}\omega \sin. (B + \tfrac{1}{2}\omega). \qquad (38)$$

Замѣтимъ къ этому, что въ прямоугольномъ треугольникѣ содержаніе катета къ другому представляетъ тангенсъ угла противъ перваго. Съ уменьшеніемъ ω

можно слѣдовательно tang. $\frac{1}{2}\omega$ сдѣлать какъ угодно малымъ, а также sin. $\frac{1}{2}\omega$, потому что sin. $\frac{1}{2}\omega <$ tang. $\frac{1}{2}\omega$; къ тому по величинѣ cos. $(B + \frac{1}{2}\omega) < 1$, sin. $(B + \frac{1}{2}\omega) < 1$. Итакъ въ уравненіяхъ (37), (38) уменьшивъ ω до того, чтобы разности sin. A — sin. B, cos. A — cos. B сдѣлались нечувствительными, въ правѣ принимать значенія sin. B, cos. B за sin. A, cos. A.

Такимъ образомъ вычисленныя значенія sin. x, cos. x для всякаго угла x, будутъ тѣ самыя, какія даютъ безконечныя строки (Алгебра, Глава XIV)

$$\sin. x = x - x_c^3 + x_c^5 - x_c^7 + \cdots \tag{39}$$

$$\cos. x = 1 - x_c^2 + x_c^4 - x_c^6 + \cdots \tag{40}$$

и которые могутъ быть еще выражены

$$\sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \tag{41}$$

$$\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

какъ скоро подъ e разумѣемъ основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, а подъ π число

$$\pi = 3,1415925643...$$

весьма близкое къ дроби $\frac{355}{113}$ (ст. 39).

132. Если соединяемъ уравненія, (27) съ (29), (30) съ (31), положивъ $2A = a + b$, $2B = a - b$, то находимъ

$$\sin. a + \sin. b = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(a + b) \cos. \tfrac{1}{2}(a - b) \tag{43}$$

$$\sin. a - \sin. b = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(a + b) \sin. \tfrac{1}{2}(a - b) \tag{44}$$

$$\cos. a + \cos. b = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(a + b) \cos. \tfrac{1}{2}(a - b) \tag{45}$$

$$\cos. a - \cos. b = -2 \sin. \tfrac{1}{2}(a + b) \sin. \tfrac{1}{2}(a - b). \tag{46}$$

Здѣсь въ уравненіи (44) дѣлая $a = n\omega$, $b = (n-1)\omega$, получимъ

$$\sin. (n\omega) - \sin. (n-1)\omega = 2 \sin. \tfrac{1}{2}\omega \cos. (n\omega - \tfrac{1}{2}\omega)$$

а поставя сюда по порядку цѣлыя числа, начиная съ $n = 1$ до какого нибудь n,

$$\sin.\ \omega = 2 \sin.\ \tfrac{1}{2}\omega \cos.\ \tfrac{1}{2}\omega,$$

$$\sin.\ 2\omega - \sin.\ \omega = 2 \sin.\ \tfrac{1}{2}\omega \cos.\ \tfrac{3}{2}\omega,$$

$$\sin.\ 3\omega - \sin.\ 2\omega = 2 \sin.\ \tfrac{1}{2}\omega \cos.\ \tfrac{5}{2}\omega,$$

. . . . . .

$$\sin.\ n\omega - \sin.\ (n-1)\omega = 2 \sin.\ \tfrac{1}{2}\omega \cos.\ (n - \tfrac{1}{2})\omega.$$

Сложивъ уравненія, находимъ

$$\frac{\sin.\ n\omega}{2 \sin.\ \frac{1}{2}\omega} = \cos.\ \tfrac{1}{2}\omega + \cos.\ \tfrac{3}{2}\omega + \cdots + \cos.\ (n - \tfrac{1}{2})\omega.$$

Здѣсь члены въ суммѣ по порядку, отъ начала до послѣдняго, уменьшаются не дѣлаясь однакожъ отрицательными, покуда $n\omega < \frac{1}{2}\pi$. Отсюда надобно заключить, что $n \sin.\ \omega$ растетъ медленнѣе нежели уголъ $n\omega$, какъ бы мало прибавленія ω ни было, такъ что для $n > m$ двухъ цѣлыхъ чиселъ

$$\frac{\sin.\ n\omega}{\sin.\ m\omega} < \frac{n}{m}.$$

Вообще для двухъ угловъ $a > b$

$$\frac{\sin.\ a}{\sin.\ b} < \frac{a}{b}.$$

Г Л А В А X.

ЗАВИСИМОСТЬ УГЛА ПАРАЛЕЛЬНОСТИ СЪ ЕГО ПЕРПЕНДИКУЛОМЪ.

133. Въ этой главѣ будемъ разумѣть уголъ паралельности перемѣннымъ.

Въ прямолинейномъ и прямоугольномъ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 123) означаемъ c гипотенузу, a, b катеты $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ противъ нихъ углы, такъ что α, β должны представлять какія нибудь линіи, выраженныя положительными числами (ст. 102). Продолжаемъ a, c за ихъ общую точку B, дѣлая продолженіе $B\,B'$ первой произвольнымъ, а второй до точки D, такъ чтобы $BD=\beta$ и слѣдовательно перпендикулъ $D\,D'$ въ точкѣ D къ $B\,D$ былъ паралеленъ съ $B\,B'$. Ведемъ еще съ $D\,D'$ паралельную $A\,A'$, которая будетъ вмѣстѣ паралельна съ $B\,B'$ (ст. 99). Получимъ уголъ $B'\,B\,D=\Pi(\beta)$, $A'\,A\,D=\Pi(c+\beta)$, $A'\,A\,C-A'\,A\,D=\Pi(\alpha)$. слѣдовательно

$$\Pi(b)-(\alpha)=\Pi(c+\beta). \tag{47}$$

Въ томъ же треугольникѣ $A\,B\,C$ кладемъ линію β отъ B къ A, потомъ въ концѣ D ставимъ перпендикулъ DD' на сторонѣ самаго треугольника, Въ случаѣ $c>\beta$ точка D будетъ между A и B (чер. 124). Ведемъ $A\,A'$ паралельную къ $D\,D'$, слѣдовательно вмѣстѣ къ $B\,C$. Здѣсь уголъ $D\,A\,A'=\Pi(c-\beta)$, $C\,A\,A'=\Pi(b)$; послѣ чего

$$\Pi(b)+\Pi(\alpha)=\Pi(c-\beta). \tag{48}$$

Когда $c=\beta$ (чер. 125), то линія $A\,A'$ будетъ перпендикуломъ къ $A\,B$, слѣдовательно $\Pi(b)=\frac{1}{2}\pi-\Pi(\alpha)$, но $\frac{1}{2}\pi=\Pi(o)=\Pi(c-\beta)$. Такимъ образомъ уравненіе (48) въ этомъ случаѣ снова повѣряется.

Когда $c < b$ (чер. 126), то перпендикулъ $D\,D'$ будетъ на продолженіи c за точку A. Теперь уголъ $C\,A\,A' = \Pi(b) = \pi - D\,A\,A' - \Pi(\alpha) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(\alpha)$ [ст. 121]. Итакъ уравненіе (48) относится ко всѣмъ прямоугольнымъ треугольникамъ. Оно въ соединеніи съ прежнимъ (47) даетъ

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta), \tag{49}$$

$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta). \tag{50}$$

Подобнымъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Pi(a) &= \Pi(c - \alpha) + \Pi(c + \alpha) \\ 2\,\Pi(\beta) &= \Pi(c - \alpha) - \Pi(c + \alpha) \end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

134. Въ прямоугольномъ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 127) называемъ снова c гипотенузу, a, b катеты, $\Pi(\alpha), \Pi(\beta)$ противъ нихъ углы. Катетъ a продолжаемъ за острее B угла $\Pi(\beta)$, дѣлая продолженіе $B\,D = \beta$. Ставимъ въ концѣ перпендикулъ DD' къ DC на сторонѣ противоположной треугольнику. Продолженіе BB' гипотенузы c за туже точку B должно быть слѣдовательно паралельно съ DD'. Продолжаемъ еще катетъ b за острее C прямого угла, дѣлая продолженіе $C\,E = \alpha - b$, потомъ въ концѣ ставимъ перпендикулъ $E\,E'$ къ CE на сторонѣ треугольника. Этотъ перпендикулъ долженъ быть паралеленъ съ $A\,B'$ и съ перпендикуломъ $D\,D'$, который также паралеленъ къ линіи CC', проведенной изъ острея C паралельно съ $E\,E'$. Такъ произойдетъ уголъ $C'\,C\,D = \Pi(a + \beta)$, $C'\,C\,E = \Pi(\alpha - b)$, слѣдовательно

$$\Pi(\alpha - b) + \Pi(a + \beta) = \tfrac{1}{2}\pi. \tag{52}$$

По примѣру чего

$$\Pi(\beta - a) + \Pi(b + \alpha) = \tfrac{1}{2}\pi. \tag{53}$$

135. Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ $A\,B\,C$ (чер. 128) называемъ бока a, b, c, противъ нихъ углы $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \Pi(\gamma)$, которыхъ острея въ точкахъ A, B, C и гдѣ слѣдовательно α, β, γ могутъ быть или всѣ положительныя линіи, или двѣ положительныя съ одной отрицательной. Если γ положительная линія, то кладемъ ее на бокъ a отъ острея C къ B, и въ концѣ D ставимъ перпендикулъ $D\,D'$ къ $B\,C$ на сторонѣ треугольника $A\,B\,C$. Точка D должна падать между точекъ B, C для $a > \gamma$; она будетъ въ точкѣ B для $a = \gamma$, наконецъ гдѣ нибудь на продолженіи $C\,B$ за точку B для $\gamma > a$. Если γ отрицательная линія, то кладемъ ее въ противную сторону на продолженіе c за точ-

ку C. Во всѣхъ этихъ случаяхъ изъ точки B паралельная BB' съ DD' будетъ вмѣстѣ паралельной къ CA, которой продолженіе AC' за точку A дѣлается паралельнымъ съ перпендикуломъ EE', поставленнымъ къ $AE = \alpha$ въ точкѣ E, взятой отъ острея A на самомъ боку c, либо на продолженіи, смотря по тому, будетъ ли α отрицательная, или положительная линія. Перпендикулъ EE' тоже паралеленъ съ BB' (ст. 99), слѣдовательно разность угловъ $CBB' = \Pi(\alpha - \gamma)$, $ABB' = \Pi(c + \alpha)$ даетъ

$$\Pi(\beta) = \Pi(\alpha - \gamma) - \Pi(c + \alpha) \qquad (54)$$

уравненіе, гдѣ заключаются прежнія (47), (48), (51), какъ частный случай, когда полагаемъ $\Pi(\gamma) = \frac{1}{2}\pi$ вмѣстѣ съ $\gamma = o$, или $\Pi(\alpha) = \frac{1}{2}\pi$ вмѣстѣ съ $\alpha = o$, или наконецъ $\Pi(\beta) = \frac{1}{2}\pi$ вмѣстѣ съ $\beta = o$.

136. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (чер. 129) называемъ c гипотенузу, a, b катеты, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ противъ нихъ углы. Изъ острея A въ углѣ $\Pi(\alpha)$ ставимъ къ плоскости треугольника перпендикулъ AA', къ нему ведемъ изъ двухъ другихъ остреевъ B,C паралельныя BB',CC'; потомъ изъ трехъ линій AA', BB', CC' черезъ каждыя двѣ воображаемъ плоскости. Между ними двѣ, перпендикулярны къ плоскости треугольника, пересѣкаясь въ AA' (ст. 59) проходятъ черезъ b, c, будучи наклонены другъ къ другу подъ угломъ $\Pi(\alpha)$ [ст. 43]. Бокъ a перпендикулярный къ b, долженъ быть перпендикуломъ къ плоскости $A'ACC'$, гдѣ лежатъ линіи b, AA', CC' [ст. 59] слѣдовательно будетъ также перпендикуломъ къ линіи CC' [ст. 56]. Такимъ образомъ уголъ двухъ плоскостей, которыя пересѣкаясь въ CC' проходятъ черезъ a, b, дѣлается прямой. Теперь зная два плоскостныхъ угла $\Pi(\alpha)$, $\frac{1}{2}\pi$, находимъ третій $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ между плоскостями, гдѣ лежатъ линіи a, c съ ихъ общей BB' [ст. 100]. Далѣе линейный уголъ $ACC' = \Pi(b)$, а перпендикулярность BC къ AC, CC', дѣлаетъ его равнымъ углу двухъ плоскостей, которыя пересѣкаясь въ BC, проходятъ чрезъ AB, BB'. Итакъ три линіи BA, BB', BC пересѣкаютъ сферу вокругъ B въ трехъ точкахъ, которыя будутъ остреями прямоугольнаго сферическаго треугольника $AB'C$ (чер. 130), гдѣ гипотенуза $CB' = \Pi(a)$, катеты $CA = \Pi(\beta)$, $B'A = \Pi(c)$, протоивъ нихъ углы $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$, $\Pi(b)$. Полагая $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha) = \Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b) = \Pi(b')$, должны заключать отсюда, что какъ данный прямолинейный прямоугольный треугольникъ производитъ сферическій $AB'C$, такъ обратно съ этимъ сферискимъ долженъ существовать прямолинейный прямоугольный треугольникъ (чер. 131), гдѣ гипотенуза β, катеты a,a' съ

углами противъ нихъ $\Pi(b')$, $\Pi(c)$. Отъ одного прямолинейнаго треугольника можемъ слѣдовательно переходить къ новому удерживая катетъ a, и перемѣняя b, c, α, β на α', β, b', c. Если продолжаемъ употреблять удареніе въ томъ же смыслѣ надъ всякой буквой, именно, чтобы различать двѣ линіи, которыхъ углы паралельности составляютъ $\frac{1}{2}\pi$, то вмѣсто четырехъ уравненій (49), (50), (51), можемъ написать десять

$$\left.\begin{array}{ll}
2\Pi(\alpha) = \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta) & 2\Pi(\alpha) = \Pi(a'-b') - \Pi(a'+b') \\
2\Pi(\beta) = \Pi(c-\alpha) - \Pi(c+\alpha) & 2\Pi(b) = \Pi(\alpha-a') + \Pi(a'+\alpha) \\
2\Pi(c) = \Pi(\beta-b') - \Pi(\beta+b') & 2\Pi(a) = \Pi(\beta-b') + \Pi(b'+\beta) \\
2\Pi(c) = \Pi(\alpha-a') - \Pi(\alpha+a') & 2\Pi(a) = \Pi(c-\alpha) + \Pi(c+\alpha) \\
2\Pi(\beta) = \Pi(b'-a') - \Pi(b'+a') & 2\Pi(b) = \Pi(c-\beta) + \Pi(c+\beta)
\end{array}\right\} \quad (55)$$

Подобнымъ образомъ вмѣсто двухъ уравненій (52) (53) тоже десять

$$\left.\begin{array}{l}
\Pi(\alpha-b) + \Pi(a+\beta) = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(\beta-a) + \Pi(b+\alpha) = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(c-a) + \Pi(\alpha'+b') = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(c-b) + \Pi(\beta'+a') = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(\beta-\alpha') + \Pi(c'+a') = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(\alpha-\beta') + \Pi(c'+b') = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(b'-c') + \Pi(\beta'+\alpha) = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(a'-c') + \Pi(\alpha'+\beta) = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(a'-\beta') + \Pi(b+c) = \frac{1}{2}\pi \\
\Pi(b'-\alpha') + \Pi(a+c) = \frac{1}{2}\pi
\end{array}\right\} \quad (56)$$

137 Представляемъ себѣ вновь прямоугольный треугольникъ ABC (чер. 129) съ тремя паралельными AA', BB', CC', между которыми первая выходитъ изъ острея A перпендикулярно къ плоскости треугольника. Три плоскости, гдѣ паралельныя лежатъ по двѣ, развѣртываемъ на плоскость треугольника, полагая катеты a,b въ одну, гипотенузу c въ другую сторону линіи AA' (чер. 132). Катетъ

b съ гипотенузой c соединяются теперь въ одну прямую $B\,C$, будучи въ прежнемъ ихъ положеніи перпендикулярны къ AA', которая паралельна съ CC' (ст. 136). Катетъ $C\,D = a$ перпендикулярень къ CC', съ которой ведемъ еще паралельныя $B\,B'$, черезъ конецъ B гипотенузы c, и $D\,D'$ черезъ конецъ D катета a. Всѣ четыре паралельныя BB', AA', CC', DD' будутъ осями предѣльной кривой $HAGF$, которая проходя черезъ точку A, пересѣчетъ $D\,D', C\,C', B\,B'$ въ F, G, H на разстояніяхъ $F\,D = B\,H = x$, $C\,G = y$. Съ тѣмъ вмѣстѣ какъ a, b, c соединяются въ одинъ прямолинейный прямоугольный треугольникъ, дуги $F\,G = p$, $A\,G = q$, $A\,H = r$ должны смыкаться въ одинъ треугольникъ предѣльный и также прямоугольный (ст. 119). Въ этомъ треугольникѣ r гипотенуза, p, q катеты, $\Pi(\alpha)$ уголъ противъ p, слѣдовательно (ст. 123)

$$p = r \sin.\, \Pi\,(\alpha) \qquad\qquad q = r \cos.\, \Pi\,(\alpha).$$

Пусть $x = f\,(c)$, $y = f\,(b)$, гдѣ буква f служитъ знакомъ геометрической функціи, которая при томъ дѣлается нулемъ вмѣстѣ съ ея корнемъ. Ведемъ теперь изъ C между паралельныхъ $C\,C'\,D\,D'$ дугу предѣльной $C\,K = t$, такъ чтобы $C\,C'$, слѣдовательно $D\,D'$ тоже, была бы двумъ дугамъ p, t общей осью. Здѣсь разстояніе $D\,K = x - y = f\,(a)$, послѣ чего

$$f\,(c) = f\,(a) + f\,(b) \qquad (57)$$

Дугу t предѣльной находимъ [ст. 117, ур. (6)]

$$t = p\,e^{y}$$

или

$$t = p\,e^{f\,(b)}$$

или наконецъ

$$t = r\,e^{f\,(b)} \sin.\, \Pi\,(\alpha).$$

Подобнымъ образомъ должно быть

$$q = r\,e^{f\,(a)} \sin.\, \Pi\,(\beta),$$

что сличая съ другимъ значеніемъ q, получимъ

$$\cos.\, \Pi\,(\alpha) = e^{f\,(a)} \sin.\, \Pi\,(\beta).$$

Удержавъ a, можемъ здѣсь α, β перемѣнить на b', c [ст. 136], слѣдовательно

$$\sin.\, \Pi\,(b) = e^{f\,(a)} \sin.\, \Pi\,(c)$$

а въ соединеніи съ уравненіемъ (57)

$$e^{-f(b)} \sin.\, \Pi(b) = e^{-f(a)} \sin.\, \Pi(c)$$

Отсюда заключаемъ также, что

$$e^{-f(a)} \sin.\, \Pi(a) = e^{-f(b)} \sin.\, \Pi(c)$$

А какъ два катета a, b совершенно произвольныя линіи, къ тому $f(a) = o, \Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$ для $a = o$, то для всѣхъ a

$$e^{f(a)} = \sin.\, \Pi(a).$$

Уравненіе (57) теперь даетъ

$$\sin.\, \Pi(c) = \sin.\, \Pi(a) \sin.\, \Pi(b). \tag{58}$$

Оно съ перемѣной b, c на α', β (ст. 136) дѣлается

$$\sin.\, \Pi(\beta) = \sin.\, \Pi(a) \cos.\, \Pi(\alpha) \tag{59}$$

и предполагаетъ

$$\sin.\, \Pi(\alpha) = \sin.\, \Pi(b) \cos.\, \Pi(\beta)$$

а съ перемѣной здѣсь α, b, β на b', α', c (ст. 136),

$$\cos.\, \Pi(b) = \cos.\, \Pi(\alpha) \cos.\, \Pi(c) \tag{60}$$

Между тѣмъ изъ уравненій (49), (50) находимъ

$$\frac{\cos.\, \Pi(b)}{\cos.\, \Pi(\alpha)} = \frac{1 - \tang.\, \frac{1}{2}\Pi(c-\beta) \tang.\, \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}{1 + \tang.\, \frac{1}{2}\Pi(c-\beta) \tang.\, \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}$$

что въ соединеніи съ уравненіемъ (60) даетъ

$$\tang.\, \tfrac{1}{2}\Pi(c)^2 = \tang.\, \tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta) \tang.\, \tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta). \tag{61}$$

Такъ какъ β, c произвольныя линіи не зависятъ другъ отъ друга, то полагая $\beta = c, 2c, 3c \ldots$, заключаемъ вообще для цѣлаго числа n

$$\tang.\, \tfrac{1}{2}\Pi(nc) = \left\{\tang.\, \tfrac{1}{2}\Pi(c)\right\}^n.$$

Это требуетъ чтобы, для всѣхъ линій x

$$\tang.\, \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}. \tag{62}$$

Здѣсь постоянное число e хотя не извѣстно, но должно быть однакожъ болѣе единицы, съ тѣмъ чтобы tang. $\frac{1}{2}\Pi(x) = o$ для $x = \infty$. Можно для простоты въ вычисленіяхъ за e принимать основаніе неперовыхъ логариѳмовъ, оставляя произвольной или неизвѣстной ту линію, въ содержаніи къ которой x выражается числомъ.

Съ пособіемъ уравненія (62) находимъ для произвольныхъ, какъ полижительныхъ такъ отрицательныхъ линій, x, y

$$\text{sin. }\Pi(x+y) = \frac{\text{sin. }\Pi(x)\,\text{sin. }\Pi(y)}{1+\text{cos. }\Pi(x)\,\text{cos. }\Pi(y)} \tag{63}$$

$$\text{cos. }\Pi(x+y) = \frac{\text{cos. }\Pi(x)+\text{cos. }\Pi(y)}{1+\text{cos. }\Pi(x)\,\text{cos. }\Pi(y)} \tag{64}$$

$$\text{tang. }\Pi(x+y) = \frac{\text{cos. }\Pi(x)+\text{cos. }\Pi(y)}{1+\text{cos. }\Pi(x)\,\text{cos. }\Pi(y)}. \tag{65}$$

Уравненіе (62) служитъ основаніемъ Воображаемой Геометріи. Оно было доказано въ другомъ мѣстѣ (¹) по способу границъ не менѣе строгому. Я повторю здѣсь это доказательство.

Мы видѣли (ст. 136), что когда данъ прямолинейный прямоугольный треугольникъ, гдѣ гипотенуза c, катеты a, b, противъ нихъ углы $\Pi(\alpha), \Pi(\beta)$, то долженъ существовать такой же треугольникъ съ гипотенузой β, катетами a, α', съ углами противъ нихъ $\Pi(b'), \Pi(c)$. Двѣ линіи α', b' опредѣляются здѣсь уравненіями

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = \tfrac{1}{2}\pi$$
$$\Pi(b) + \Pi(b') = \tfrac{1}{2}\pi$$

Пусть это будетъ треугольникъ ABC (чер. 133), гдѣ точки A, B, C представляютъ острея въ углахъ $\Pi(c), \Pi(b'), \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно противъ нихъ бока $BC = \alpha', AC = a, AB = \beta$. Вокругъ A представляемъ себѣ сферу съ полупоперечникомъ β. Продолжаемъ AC до пересѣченія въ D со сферой, потомъ къ треугольнику ABC ведемъ другую плоскость чрезъ AD перпендикулярно; въ ней полупоперечникъ AE сферы подъ угломъ $DAE = \Pi(\beta)$ къ AD. Между точками B, D, E на сферѣ дуги большихъ круговъ составляютъ прямоугольный

(¹) Exposition succincte de la Géometrie etc., сочиненіе написанное въ 1826 году, но которое не напечатано. Также въ статьяхъ *о началахъ Геометріи* (Каз. Вѣстн. 1829, 1830 годы).

треугольникъ, гдѣ катетъ $BD = \Pi(c)$, дугой $DE = \Pi(\beta)$, слѣдовательно противъ нихъ углы $BED = \Pi(b)$, $DBE = \Pi(\alpha')$, гипотенуза $BE = \Pi(a)$ [ст. 136]. Опускаемъ изъ точки C къ AE перпендикулъ $CF = x$, потомъ конецъ F этого перпендикула соединяемъ съ точкой B линіей $BF = y$, которая также должна быть перпендикулярна къ AF, потому что плоскости двухъ треугольниковъ ABC, ACF перпендикулярны между собой, ихъ линіи пересѣченія AC перпендикулярна къ BC слѣдовательно BC перпендикулъ къ плоскости CAF; плоскость треугольника BCF, проходя чрезъ BC, перпендикулярна къ плоскости CAF, двумъ этимъ плоскостямъ общая линія CF перпендикулярна къ AF, послѣ чего AF перпендикулъ къ плоскости BCF. Ведемъ теперь чрезъ точки B, C прямыя BG, CH паралельныя съ AE покуда встрѣтятся въ G, H съ предѣльной поверхностію, на которой лежитъ точка E и которой AF, BG, CH служатъ осями. Въ предѣльномъ треугольникѣ GHE полагаемъ гипотенузу $GE = \gamma$, катетъ $HE = \xi$, $HG = \zeta$. Ихъ содержанія будутъ (ст. 123)

$$\frac{\zeta}{\eta} = \sin.\ \Pi(b) \qquad \frac{\xi}{\eta} = \cos.\ \Pi(b).$$

Замѣтимъ къ эмому, что когда въ треугольникѣ ABC увеличиваемъ гипотенузу β, не перемѣняя уголъ $\Pi(b')$ и слѣдовательно предполагая самую линію b постоянной, также какъ уголъ $\Pi(b)$, то катетъ a растетъ до безконечности, тогда какъ другой катетъ α' не переходитъ за границу b'. Итакъ если въ $\triangle BCF$, не перемѣняя уголъ $BFC = \Pi(b)$, увеличиваемъ x покуда наконецъ сдѣлается $\alpha' = b'$, то бока HG, HE, GE предѣльнаго треугольника пріобрѣтутъ то самое большое значеніе, къ которому приближаются съ возрастаніемъ β, когда удерживая точку E на мѣстѣ, двигаемъ A по направленію EA. Развертываемъ, теперь плоскости всѣхъ паралельныхъ и плоскости треугольниковъ, сомкнутыхъ въ точку A, на плоскость ADE, обращая какъ тѣ, такъ и другія на линіяхъ соединенія съ послѣдней. Бока сферическаго треугольника BDE сдѣлаются дугами BD, DE, EB' на кругѣ (чер. 134), котораго центръ A, полупоперечникъ $AB = AD = AE = AB' = \beta$. Бока прямолинейнаго треугольника будутъ теперь: перпендикулъ $B'F = y$ отъ конца B' полупоперечника AB' къ полупоперечнику AE, продолженіе $FC = x$ перпендикула $B'F$ по другую сторону AE до встрѣчи съ полупоперечникомъ AD въ точкѣ C; наконецъ изъ этой точки перпендикулъ $BC = \alpha'$ къ AD. Бока предѣльнаго треугольника соединяются въ одну дугу $G'EHG$ предѣльной проведенной черезъ точку E, тогда какъ полупоперечникъ AE сужитъ ей осью. Самые бока здѣсь находимъ: $EG' = \eta$, когда ведемъ черезъ точку B' паралельную съ AE до встрѣчи въ G' съ предѣльной кривой; $EH = \xi$, когда черезъ

точку C ведемъ паралельную съ AE до встрѣчи въ H съ предѣльной; $HG = \zeta$, когда ставимъ въ C къ HC перпендикулъ $CB'' = \alpha$ черезъ вершину котораго ведемъ $B''G$ паралельно съ AE до встрѣчи съ предѣльной въ G. Ось HC должна пересѣкать кругъ гдѣ нибудь въ m между точекъ H, C. Ось GB'' въ своемъ продолженіи за точку B'' встрѣтитъ кругъ гдѣ нибудь въ n. Разстоянія Gn, Hm, $G'B'$ на паралельныхъ между предѣльной и кругомъ, будучи заключены въ извѣстныхъ границахъ, назначаемыхъ крайними значеніями дугъ GH, HE, EG', уменьшаются съ возрастаніемъ β и могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми (ст. 114). Уголъ $BCB'' = DCH < CAF$, но послѣдній представляетъ $\Pi(\beta)$ и слѣдовательно съ возрастаніемъ β изчезаетъ, также какъ и линія BB'' между двухъ точекъ B, B''. Въ равнобедренномъ треугольникѣ BCB'' углы при основаніи BB'' растутъ вмѣстѣ съ β приближаясь къ $\frac{1}{2}\pi$ до того, что наконецъ разность можетъ быть пренебрежена. Напротивъ уголъ $nB''C = \Pi(\alpha')$ уменьшаясь не можетъ переходить за границу $\Pi(b')$, слѣдовательно линія $B''n$, по крайнѣй мѣрѣ съ возрастаніемъ β за извѣстное значеніе, должна входить внутрь треугольника BCB'', пересѣкаясь уже здѣсь съ кругомъ въ n и составляя такимъ образомъ треугольникъ BnB'', гдѣ уголъ BnB'' тупой потому что смѣжный ему BnK заключается въ остромъ BnA, когда конецъ n дуги Bn соединяемъ полупоперечникомъ An съ центромъ круга. Отсюда слѣдуетъ, что хорда $Bn < BB''$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной линіи, тогда какъ хорда $2\alpha'$ двойнной дуги BD приближается непрестанно къ $2b'$. Это значитъ, что дуга Bn въ сравненіи со всей дугой BD должна быть пренебрегаема при довольно большомъ полупоперечникѣ β. Переходимъ теперь къ дугѣ ED на кругѣ, вмѣсто которой можемъ брать дугу Em безъ различія, какъ скоро полупоперечникъ β достаточно великъ. Чтобъ это доказать, опускаемъ изъ точекъ m, E перпендикулы ml, EL къ полупоперечнику AD. Первый изъ нихъ ml менѣе гипотенузы mC, еще менѣе нежели HC, слѣдовательно можетъ быть сдѣланъ по произволу малымъ, между тѣмъ какъ перпендикулъ $EL > x$ возрастаетъ вмѣстѣ съ β. Итакъ границы, къ которымъ съ возрастаніемъ вмѣстѣ съ β приближаются содержанія дугъ $\frac{BD}{B'E}$, $\frac{DE}{B'E}$ тѣже, что для содержаній $\frac{Em}{B'E}$, $\frac{mn}{B'E}$, слѣдовательно будутъ самыя содержанія $\frac{\xi}{\eta}$, $\frac{\zeta}{\eta}$ дугъ на предѣльной (ст. 116). Поставя $\Pi(c)$, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ вмѣсто $BD, DE, B'E$ мы выразимъ это, написавъ

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(c)}{\Pi(\alpha)} = \frac{\zeta}{\eta}$$

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(\beta)}{\Pi(\alpha)} = \frac{\xi}{\eta}$$

или, какъ нашли выше,

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(c)}{\Pi(a)} = \text{sin.}\,\Pi(b)$$

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(\beta)}{\Pi(a)} = \text{cos.}\,\Pi(b).$$

Отсюда

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(c)}{\Pi(\beta)} = \text{tang.}\,\Pi(b)$$

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(a)}{\Pi(\beta)} = \frac{1}{\text{cos.}\,\Pi(b)}.$$

Потомъ, ставя $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b')$ вмѣсто $\Pi(b)$, получимъ

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(a)+\Pi(c)}{\Pi(\beta)} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(b'),$$

а принимая въ помощь второе изъ уравненій (54),

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(\beta - b')}{\Pi(\beta)} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(b'). \qquad (66)$$

Такъ какъ здѣсь $\beta=\infty$, b' произвольная линія, то разумѣя подъ x,y новыя произвольныя, можемъ полагать одинъ разъ $b' = x$, не перемѣняя β; въ другой разъ $b' = y$, перемѣняя β на $\beta - x$. Такъ находимъ

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(\beta - x)}{\Pi(\beta)} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(x)$$

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(\beta - x - y)}{\Pi(\beta - x)} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(y).$$

Произведеніе двухъ этихъ уравненій даетъ

$$\text{Гр.}\frac{\Pi(\beta - x - y)}{\Pi(\beta)} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(x).\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(y).$$

Это значитъ [ур. (66)]

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(x+y) = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(x).\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(y)$$

что ведетъ снова къ уравненію (62).

ГЛАВА XI.

ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВЪ И БОКОВЪ ТРЕУГОЛЬНИКА.

138. Равенство тѣхъ частей, которыя производятъ одинаковость треугольниковъ, предпогаетъ зависимость съ ними трехъ остальныхъ. Итакъ должны существовать уравненія для частей треугольника, взятыхъ изъ шести по четыре, кромѣ трехъ угловъ, когда разсуждаемъ о прямолинейныхъ треугольникахъ въ Употребительной Геометріи (ст. 92). Такимъ образомъ уравненія могутъ заключать въ себѣ части, какъ сферическаго, такъ и прямолинейнаго треугольника въ Воображаемой Геометріи:

1) *Три бока съ однимъ угломъ.*

2) *Два бока съ двумя противъ нихъ углами.*

3) *Два бока съ угломъ между ними, да съ угломъ противъ одного изъ нихъ.*

4) *Три угла съ однимъ бокомъ.*

Въ Употребительной Геометріи входятъ тѣже случаи, кромѣ послѣдняго для прямолинейныхъ треугольниковъ.

Если называемъ, какъ и вездѣ въ этой главѣ будемъ разумѣть, a, b, c бока, A, B, C противъ нихъ углы треугольника, то всѣ сказанные случаи должны приводить къ уравненіямъ, гдѣ бы заключались:

1) a, b, c, A

2) a, b, A, B

3) a, b, A, C

4) $a, A, B, C.$

Послѣднее невозможно для прямолинейныхъ треугольниковъ въ Употребительной Геометріи. Во всѣхъ этихъ уравненіяхъ можемъ буквы перемѣнять одну на другую по порядку, или вообще сохраняя туже взаимность ихъ отношеній, покуда приходимъ снова къ прежнимъ. Такъ первый случай даетъ уравненія съ буквами:

$$a, b, c, A$$

$$a, b, c, B$$

$$a, b, c, C;$$

второй:

$$a, b, A, B$$

$$a, c, A, C$$

$$b, c, B, C;$$

третій:

$$a, b, A, C$$

$$b, c, B, A$$

$$c, a, C, B$$

$$a, b, B, C$$

$$b, c, C, B$$

$$c, a, A, B;$$

четвертый:

$$a, A, B, C$$

$$b, A, B, C$$

$$c, A, B, C;$$

— всѣхъ пятнадцать уравненій.

139. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ, какъ сферическомъ такъ и прямолинейномъ Воображаемой Геометріи, для каждыхъ трехъ частей можемъ предполагать уравненія, разумѣя къ тому прямой уголъ вмѣсто четвертой данной части.*

Итакъ если $C = \frac{1}{2}\pi$, то должны существовать уравненія между частей:

$$a,\ b,\ c$$

$$a,\ b,\ A$$

$$a,\ c,\ A$$

$$a,\ c,\ B$$

$$a,\ A,\ B$$

$$c,\ A,\ B$$

всего шесть уравненій, изъ которыхъ послѣднія два невозможны въ Употребительной Геометріи для прямолинейныхъ треугольниковъ, тогда какъ уже первыя четыре намъ извѣстны [ст. 105, 123], именно

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = b \text{ tang. } A$$

$$a = c \text{ cos. } A$$

$$a = c \text{ sin. } B.$$

140. Мы видѣли, что въ прямолинейныхъ треугольникахъ Употребительной Геометріи [ур. (28)]

$$c = a \text{ cos. } B + b \text{ cos. } A.$$

По примѣру чего пишемъ еще

$$a = b \text{ cos. } C + c \text{ cos. } B$$

$$b = c \text{ cos. } A + a \text{ cos. } C.$$

Умножаемъ всѣ три уравненія по порядку на a, b, c потомъ вычитая первое съ послѣднимъ изъ втораго, получимъ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \text{ cos. } A. \qquad (67)$$

Уравненіе между a, b, c, A, которое предполагаетъ еще два другихъ (ст. 138)

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a \text{ cos. } B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \text{ cos. } C.$$

Уравненіе съ a, b, A, B было найдено [ур. (26)]

$$a \sin. B - b \sin. A = o \tag{68}$$

и предполагаетъ слѣдовательно два другихъ (ст. 138)

$$b \sin. C - c \sin. B = o$$

$$c \sin. A - a \sin. C = o.$$

какъ и дѣйствительно послѣднее выходитъ изъ двухъ первыхъ съ исключеніемъ b, причемъ $\sin. B$ уничтожается вмѣстѣ самъ собою.

Когда присоединяемъ сюда положеніе, принятое въ Употребительной Геометріи,

$$A + B + C = \pi$$

то можемъ уравненію (68) дать другой видъ

$$a \sin. (A + C) - b \sin. A = o$$

или

$$\frac{b}{a} = \cos. A + \sin. C \cot. A \tag{69}$$

уравненіе между a, b, A, C.

141. Для прямолинейнаго треугольника Воображаемой Геометріи, когда c гипотенуза, a, b катеты, слѣдовательно $C = \frac{1}{2}\pi$, было найдено [ур. (58), (59), (60)]

$$\sin. \Pi (c) = \sin. \Pi (a) \sin. \Pi (b) \tag{70}$$

$$\cos. \Pi (a) = \cos. B \cos. \Pi (c) \tag{71}$$

$$\sin. B = \cos. A \sin. \Pi (a), \tag{72}$$

Съ перемѣной a, B на b, A уравненіе (71) дѣлается

$$\cos. \Pi (b) = \cos. A \cos. \Pi (c).$$

Сюда внеся значеніе $\cos. \Pi (b)$ изъ уравненія (70), получимъ

$$\cos. A^2 = \frac{\cos. \Pi (c)^2 - \cos. \Pi (a)^2}{\sin. \Pi (a)^2 \cos. \Pi (c)^2}$$

далѣе

$$\sin. A^2 = \cot. \Pi (a)^2 \tang. \Pi (c)^2$$

а такъ какъ углы A, $\Pi (a)$, $\Pi (c)$ острые, то

$$\sin. A \tang. \Pi (a) = \tang. \Pi (c). \qquad (73)$$

Поставя сюда значеніе $\tang. \Pi (a)$ изъ уравненія (70), получимъ

$$\sin. A^2 = \frac{\cos. \Pi (a)^2 \sin. \Pi (b)^2}{1 - \sin. \Pi (a)^2 \sin. \Pi (b)^2}$$

слѣдовательно

$$\cos. A^2 = \frac{\cos. \Pi (b)^2}{1 - \sin. \Pi (a)^2 \sin. \Pi (b)^2}$$

и наконецъ

$$\tang. A = \cos. \Pi (a) \tang. \Pi (b). \qquad (74)$$

Изъ уравненій (71), (72) исключивъ a, находимъ

$$\cos. \Pi (c)^2 = \frac{\cos. A^2 - \sin. B^2}{\cos. A^2 \cos. B^2}$$

потомъ

$$\sin. \Pi (c) = \tang. A \tang. B. \qquad (75)$$

Уравненія (70), (71), (72), (73), (74), (75) будутъ тѣ самыя, которыхъ существованіе предполагали. Изъ нихъ достаточно знать три, чтобы находить остальныя; даже можно взять эти три произвольно, но различныя въ числѣ всѣхъ, которыя составятся съ прибавленіемъ сюда новыхъ, когда перемѣняемъ острый уголъ и катетъ на другіе въ треугольникѣ. Такъ въ прибавленіе къ уравненіямъ (71), (72), (73), (74) въ правѣ писать еще четыре

$$\cos. \Pi (b) = \cos. A \cos. \Pi (c) \qquad (76)$$

$$\sin. A = \cos. B \sin. \Pi (b) \qquad (77)$$

$$\tang. \Pi (c) = \sin. B \tang. \Pi (b) \qquad (78)$$

$$\tang. B = \cos. \Pi (b) \tang. \Pi (a) \qquad (79)$$

которыя съ прежними шестью составляютъ всѣхъ уравненій десять для прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника въ Воображаемой Геометріи. Изъ нихъ

пять (73), (74), (75), (78), (79) прямо слѣдуютъ изъ уравненій (55), когда раздѣливъ на 2, беремъ на той и другой сторонѣ тангенсъ, принимая къ тому въ помощь уравненіе (62) и полагая наконецъ $\Pi(\alpha) = A$, $\Pi(\beta) = B$. Напримѣръ изъ уравненій (55) первое даетъ

$$\text{tang.}\, A = \frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(a' - b') - \text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(a' + b')}{1 + \text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(a' - b')\,\text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(a' + b')}$$

$$= \frac{e^{a'}}{e^{2a'} + 1}(e^{b'} - e^{-b'}).$$

Это значитъ

$$\text{tang.}\, A = \cos.\, \Pi(a)\,\text{tang.}\, \Pi(b)$$

Такоежъ уравненіе, какъ и выше [ур. (74)]. Тоже находимъ подобнымъ образомъ изъ втораго уравненія (55).

Изъ уравненій (55) третье даетъ

$$\text{tang.}\, \Pi(a) = \frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(\beta - b') + \text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(\beta + b')}{1 - \text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(\beta - b')\,\text{tang.}\, \frac{1}{2}\Pi(\beta + b')}$$

$$= \frac{e^{\beta}}{e^{2\beta} - 1}(e^{b'} + e^{-b'}).$$

Это значитъ

$$\text{tang.}\, \Pi(a) = \frac{\text{tang.}\, B}{\cos.\, \Pi(b)}.$$

Такоежъ уравненіе, какъ и выше [ур. (79)]. Тоже находимъ изъ пятаго уравненія (55).

Этихъ двухъ примѣровъ довольно, чтобы судить, какимъ образомъ уравненія (55) повѣряютъ нѣкоторыя въ числѣ десяти для треугольника. Остальныя пять слѣдуютъ изъ ихъ соединенія между собою.

Всѣ десять уравненій для треугольника могутъ быть также выведены изъ уравненій (56), когда беремъ въ помощь уравненіе (62). Напримѣръ два первыхъ изъ уравненій (56) даютъ

$$\Pi(\alpha - b) - \Pi(\alpha + b) = \Pi(\beta - a) - \Pi(\beta + a)$$

$$\Pi(\alpha - b) + \Pi(\alpha + b) = \Pi(a - \beta) - \Pi(a + \beta).$$

Раздѣляя каждое на 2, потомъ взявъ на двухъ сторонахъ тангенсъ и ставя наконецъ A, B вмѣсто $\Pi(\alpha), \Pi(\beta)$, получимъ

$$\text{sin. } A \text{ tang. } \Pi(a) = \text{sin. } B \text{ tang. } \Pi(b)$$

$$\text{tang. } A \text{ tang. } B = \text{sin. } \Pi(a) \text{ sin. } \Pi(b).$$

Исключивъ отсюда B, находимъ уравненіе (74); еслижъ исключаемъ b, то приходимъ къ уравненію (72).

Достаточно двухъ различныхъ уравненій изъ всѣхъ десяти, чтобъ отсюда вывести всѣ прочія перемѣняя (ст. 136)

$$\Pi(b) \qquad \Pi(c) \qquad A \qquad B$$

на

$$\tfrac{1}{2}\pi - A \qquad B \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \qquad \Pi(c)$$

потомъ a, b, A, B на b, a, B, A; такъ продолжая, покуда придемъ къ прежнимъ уравненіямъ. Напримѣръ возьмемъ уравненія (70), (75). Первое даетъ

$$\left.\begin{array}{l}
\text{sin. } \Pi(a) \text{ sin. } \Pi(b) = \text{sin. } \Pi(c) \\
\text{sin. } \Pi(a) \text{ cos. } A = \text{sin. } B \\
\text{sin. } \Pi(b) \text{ cos. } B = \text{sin. } A \\
\text{cos. } A \text{ cos. } \Pi(c) = \text{cos. } \Pi(b) \\
\text{cos. } B \text{ cos. } \Pi(c) = \text{cos. } \Pi(a)
\end{array}\right\} \qquad (80)$$

Подобнымъ образомъ изъ уравненія (75) происходятъ

$$\left.\begin{array}{l}
\text{tang. } A \text{ tang. } B = \text{sin. } \Pi(c) \\
\text{tang. } \Pi(b) \text{ sin. } B = \text{tang. } \Pi(c) \\
\text{tang. } \Pi(a) \text{ sin. } A = \text{tang. } \Pi(c) \\
\text{tang. } \Pi(a) \text{ cos. } \Pi(b) = \text{tang. } B \\
\text{tang. } \Pi(b) \text{ cos. } \Pi(a) = \text{tang. } A
\end{array}\right\} \qquad (81)$$

142. Переходимъ теперь къ уравненіямъ для четырехъ частей во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ Воображаемой Геометріи.

Опустивъ изъ острея C къ боку c перпендикулъ p получилъ два прямоугольныхъ треугольника: одинъ съ гипотенузой a катетами p, x, съ угломъ B противъ p; другой съ гипотенузой b, катетами $p, c - x$, съ угломъ A противъ p, когда x положительное число (чер. 121), или съ угломъ $\pi - A$ противъ p, когда x отрицательное (чер 122). Въ обоихъ случаяхъ, также какъ и для $x=o$, получимъ [ур. (74), (71)]

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \Pi(a) &= \sin. B \text{ tang. } \Pi(p) \\ \text{tang. } \Pi(b) &= \sin. A \text{ tang. } \Pi(p) \\ \cos. \Pi(a) \cos. B &= \cos. \Pi(x) \\ \cos. \Pi(b) \cos. A &= \cos. \Pi(c - x) \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Изъ первыхъ двухъ исключивъ tang. $\Pi(p)$, находимъ

$$\text{tang. } \Pi(a) \sin. A = \text{tang. } \Pi(b) \sin. B. \quad (83)$$

Это также слѣдуетъ изъ уравненія (54), когда здѣсь подъ $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \Pi(\gamma)$ разумѣемъ A, B, C. Съ перемѣной a, γ, c, α, на c, α, a, γ будетъ

$$\left.\begin{aligned} \Pi(\beta) &= \Pi(a - \gamma) - \Pi(c + \alpha) \\ \Pi(\beta) &= \Pi(c - \alpha) - \Pi(a + \gamma) \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

Отсюда

$$\Pi(a + \gamma) + \Pi(a - \gamma) = \Pi(c + \alpha) - \Pi(c - \alpha).$$

Раздѣливъ на 2, потомъ взявъ тангенсъ на двухъ сторонахъ, получимъ [ур. (62)]

$$\frac{e^a}{e^{2a} - 1}(e^\gamma + e^{-\gamma}) = \frac{e^c}{e^c + 1}(e^\alpha + e^{-\alpha}).$$

Это значитъ

$$\frac{\text{tang. } \Pi(a)}{\sin. C} = \frac{\text{tang. } \Pi(c)}{\sin. A}. \quad (85)$$

Уравненіе, подобное прежнему [ур. (83)].

Изъ уравненій (82) исключивъ x [ур. (64)], находимъ

$$\cos. \Pi(c) = \frac{\cos. \Pi(a) \cos. B + \cos. \Pi(b) \cos. A}{1 + \cos. \Pi(a) \cos. \Pi(b) \cos. A \cos. B}.$$

Отсюда

$$\cos.\,\Pi\,(a)\cos.\,B = \frac{\cos.\,\Pi\,(c) - \cos.\,\Pi\,(b)\cos.\,A}{1 - \cos.\,\Pi\,(b)\cos.\,\Pi\,(c)\cos.\,A}$$

потомъ

$$\{1 - \cos.\,A\cos.\,\Pi\,(b)\cos.\,\Pi\,(c)\}\{1 - \cos.\,B\cos.\,\Pi\,(c)\cos.\,\Pi\,(a)\} = \sin.\,\Pi\,(c)^2.$$

По примѣру чего

$$\{1 - \cos.\,B\cos.\,\Pi\,(c)\cos.\,\Pi\,(a)\}\{1 - \cos.\,C\cos.\,\Pi\,(a)\cos.\,\Pi\,(b)\} = \sin.\,\Pi\,(a)^2$$

$$\{1 - \cos.\,C\cos.\,\Pi\,(a)\cos.\,\Pi\,(b)\}\{1 - \cos.\,A\cos.\,\Pi\,(b)\cos.\,\Pi\,(c)\} = \sin.\,\Pi(b)^2. \quad (86)$$

Изъ этихъ трехъ уравненій произведеніе перваго на послѣднее, будучи раздѣлено на второе, даетъ

$$\{1 - \cos.\,A\cos.\,\Pi\,(b)\cos.\,\Pi\,(c)\}^2 = \frac{\sin.\,\Pi\,(b)^2\,\sin.\,\Pi\,(c)^2}{\sin.\,\Pi\,(a)^2}$$

слѣдовательно

$$\cos.\,A\cos.\,\Pi\,(b)\cos.\,\Pi\,(c) + \frac{\sin.\,\Pi\,(b)\,\sin.\,\Pi\,(c)}{\sin.\,\Pi\,(a)} = 1. \quad (87)$$

Сюда поставя значеніе $\sin.\,\Pi\,(c)$ изъ уравненія (85), находимъ

$$\cos.\,\Pi\,(c) = \frac{\cos.\,\Pi\,(a)\,\sin.\,C}{\sin.\,\Pi\,(b)\,\sin.\,A + \cos.\,\Pi\,(a)\cos.\,\Pi\,(b)\cos.\,A\,\sin.\,C}.$$

Это значеніе $\cos.\,\Pi\,(c)$ внеся въ уравненіе (86), получимъ послѣ всѣхъ приведеній

$$\cot.\,A\,\sin.\,C\,\sin.\,\Pi\,(b) + \cos.\,C = \frac{\cos.\,\Pi\,(b)}{\cos.\,\Pi\,(a)}. \quad (88)$$

Исключивъ отсюда $\sin.\,\Pi\,(b)$ въ соединеніи съ уравненіемъ (83),

$$\frac{\cos.\,\Pi\,(a)}{\cos.\,\Pi\,(b)}\cos.\,C = 1 - \frac{\cos.\,A\,\sin.\,C}{\sin.\,B}\sin.\,\Pi\,(a).$$

Между тѣмъ уравненіе (88) съ перемѣной a, b, A на b, a, B даетъ

$$\frac{\cos.\,\Pi\,(a)}{\cos.\,\Pi\,(b)} = \cot.\,B\,\sin.\,C\,\sin.\,\Pi\,(a) + \cos.\,C.$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій исключивъ cos.П (b), потомъ раздѣливъ на sin.C и помноживъ на sin. B, получимъ

$$\text{cos. } A + \text{cos. } B \text{ cos. } C = \frac{\text{sin. } B \text{ sin. } C}{\text{sin. } \Pi\,(a)}. \qquad (89)$$

Уравненія (83), (87), (88), (89) тѣ самыя, которыя мы предположили найти для прямолинейныхъ треугольниковъ (ст. 138). Послѣднее можетъ быть выведено прямо изъ уравненій (82), когда напередъ даемъ имъ такой видъ

$$\Pi\,(a - \gamma) - B = \Pi\,(c + \alpha)$$

$$B + \Pi\,(a + \gamma) = \Pi\,(c - \alpha).$$

Послѣ чего

$$\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} B + e^{-\alpha-\gamma}}{1 - \text{tang. } \frac{1}{2} B.\ e^{-\alpha-\gamma}} \cdot \frac{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} B\, e^{-\alpha+\gamma}}{e^{-\alpha+\gamma} - \text{tang. } \frac{1}{2} B} - \text{cot. } \tfrac{1}{2} A^2$$

или

$$\frac{2 \text{ tang. } \frac{1}{2} B + \text{sin. } \Pi\,(a)\left\{\text{tang. } \frac{1}{2} C + \text{tang. } \frac{1}{2} B^2 \text{ cot. } \frac{1}{2} C\right\}}{\text{sin. } \Pi\,(a)\left\{\text{cot. } \frac{1}{2} C + \text{tang. } \frac{1}{2} B^2 \text{ tang. } \frac{1}{2} C\right\} - 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} B} = \text{cot. } \tfrac{1}{2} A^2.$$

Присоединивъ къ обѣимъ сторонамъ единицу, потомъ умноживъ на знаменителя, получимъ

$$2 \frac{\text{sin. } \Pi\,(a)}{\text{sin. } C} \cdot \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} A^2}{\text{cos. } \frac{1}{2} B^2} = \text{sin. } \Pi\,(a) \left\{ \text{cot. } \tfrac{1}{2} C + \text{tang. } \tfrac{1}{2} B^2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2} C \right\} - 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2} B.$$

Умноживъ на sin. C cos. $\frac{1}{2} B^2$ и раздѣливъ на sin. $\Pi\,(a)$,

$$2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = 2 \text{ cos. } \tfrac{1}{2} C^2 \text{ cos. } \tfrac{1}{2} B^2 + 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} B^2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} C^2 - \frac{\text{sin. } B \text{ sin. } C}{\text{sin. } \Pi\,(a)}.$$

Откуда легко вывести самое уравненіе (89).

Когда къ четыремъ уравненіямъ (83), (87) (88), (89) прибавляемъ подобныя съ перемѣной угловъ и боковъ треугольника на другіе, то получимъ всѣхъ уравненій пятнадцать. Если въ нихъ полагаемъ $C = \frac{1}{2}\pi$, гдѣ входитъ этотъ уголъ, то снова находимъ уравненія для прямолинейныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ (ст. 141).

143. Воображаемая Геометрія, какъ мы сказали (ст. 117), происходитъ изъ общаго положенія въ которомъ Употребительная Геометрія заключается какъ ча-

стный случай, когда принимаемъ линіи безк()нечно малыми. Съ этимъ вмѣстѣ самыя уравненія для прямолинейныхъ треугольниковъ Воображаемой Геометріи переходятъ въ уравненія для такихъ же треугольниковъ Употребительной Геометріи.

Пусть бока a, b, c прямолинейнаго треугольника столько малы, что можемъ пренебрѣгать ихъ степенями при нисшихъ, слѣдовательно довольствоваться приближеннымъ значеніемъ (Алгебра, ст. 177)

$$\cot. \tfrac{1}{2} \Pi (a) = 1 + a$$

и съ этимъ вмѣстѣ принимать также

$$\cot. \Pi (a) = a$$

$$\sin. \Pi (a) = 1 - \tfrac{1}{2} a^2$$

$$\cos. \Pi (a) = a$$

подобнымъ образомъ для боковъ b, c. Теперь уравненія Воображаемой Геометріи (83), (87), (88), (89) сдѣлаются

$$b \sin. A - a \sin. B = o$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos. A$$

$$a \sin. (A + C) - b \sin. A = o$$

$$\cos. A + \cos. (B + C) = o.$$

Первыя два тѣже уравненія (67), (68), которыя были найдены для прямолинейныхъ треугольниковъ Употребительной Геометріи. Послѣднія два въ соединеніи съ первымъ требуетъ, чтобъ

$$A + B + C + \pi$$

какъ въ Употребительной Геометріи принято.

Показавъ этотъ переходъ отъ одной Геометріи къ другой, въ правѣ теперь сдѣлать уже заключеніе во всей обширности. Такъ какъ всѣ вычисленія въ Геометріи могутъ единственно быть основаны на тѣхъ уравненіяхъ, которыя выражаютъ зависимость угловъ съ боками въ треугольникѣ, то Воображаемая Геометрія должна всякій разъ переходитъ въ Употребительную съ предположеніемъ линій безконечно малыхъ, представляя всегда согласіе, которое заключается въ

общемъ ихъ источникѣ, именно въ уравненіяхъ (83), (87), (88), (89) для прямолинейныхъ треугольниковъ.

144. Отъ уравненій для прямолинейныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, гдѣ сумма трехъ угловъ предполагается $< \pi$, можно прямо перейти къ уравненіямъ для прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ. Мы видѣли (ст. 136), что когда въ прямолинейномъ треугольникѣ c гипотенуза a, b катеты, $\Pi(\alpha), \Pi(\beta)$ противъ нихъ углы, то существуетъ прямоугольный сферическій треугольникъ (чер. 130), гдѣ гипотенуза $\Pi(a)$, катеты $\Pi(c), \Pi_{\frac{1}{2}}(\beta)$ съ углами противъ нихъ $\Pi(b), \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$. Итакъ стоитъ только въ уравненіяхъ (80), (81) перемѣнить

$$\Pi(a) \qquad \Pi(b) \qquad \Pi(c) \qquad A \qquad B$$

соотвѣтственно на

$$c \qquad A \qquad a \qquad \tfrac{1}{2}\pi - B \qquad b$$

чтобы для сферическаго прямоугольнаго треугольника получить всѣ десять уравненій, которыя такимъ образомъ будутъ

$$\left.\begin{aligned} &\text{sin. } c \text{ sin. } A = \text{sin. } a \\ &\text{sin. } c \text{ sin. } B = \text{sin. } b \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{sin. } A \text{ cos. } b = \text{cos. } B \\ &\text{sin. } B \text{ cos. } a = \text{cos. } A \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

$$\text{cos. } a \text{ cos. } b = \text{cos. } c \tag{92}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{sin. } a \text{ tang. } B = \text{tang. } b \\ &\text{sin } b \text{ tang. } A = \text{tang. } a \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{cos. } B \text{ tang } c = \text{tang. } a \\ &\text{cos. } A \text{ tang. } c = \text{tang. } b \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

$$\text{cot. } A \text{ cot. } B = \text{cos. } c. \tag{95}$$

Замѣтимъ однакожъ, что здѣсь бока a, b, c съ углами A, B предполагаются каждый $< \frac{1}{2}\pi$, также какъ въ прямолинейномъ треугольникѣ углы $\Pi(a), \Pi(b), \Pi(c), \Pi(\alpha), \Pi(\beta)$ необходимо острые. Между тѣмъ послѣднія уравненія справед-

ливы для всѣхъ вообще прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ. Напримѣръ они повѣряются для $a = \frac{1}{2}\pi$, потому что съ этимъ вмѣстѣ должно быть $c = \frac{1}{2}\pi$, $A = \frac{1}{2}\pi$, $B = b$, какой бы ни былъ уголъ B. Итакъ уравненія справедливы также для $b = \frac{1}{2}\pi$, какой бы ни былъ бокъ $a = A$.

Пусть еще $a > \frac{1}{2}\pi, < \pi$, тогда какъ $b < \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $B < \frac{1}{2}\pi, A > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (ст. 75, 46), $c > \frac{1}{2}\pi, < \pi$ (ст. 78). Продолжаемъ бока a, c до взаимной встрѣчи по другую сторону бока b (чер. 135), гдѣ составится такимъ образомъ прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой $\pi - c < \frac{1}{2}\pi$, съ катетами $b < \frac{1}{2}\pi$, $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, съ углами противъ нихъ $B < \frac{1}{2}\pi, \pi - A < \frac{1}{2}\pi$. Уравненія (90), (91), (92), (93), (94), (95), будучи примѣнены къ такому треугольнику, сохраняютъ прежній видъ, а слѣдовательно справедливы также для даннаго треугольника съ катетами $a > \frac{1}{2}\pi, < \pi$ и $b < \frac{1}{2}\pi$.

Полагаемъ $a > \frac{1}{2}\pi, < \pi$, тогда какъ $b > \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $B > \frac{1}{2}\pi, A > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (ст. 75, 46); $c < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 78). Поступая какъ передъ этимъ, получимъ прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой $\pi - c > \frac{1}{2}\pi$, съ катетами $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, $b > \frac{1}{2}\pi$, съ углами противъ нихъ $\pi - A < \frac{1}{2}\pi, B > \frac{1}{2}\pi$, которые бока съ углами, будучи поставлены вмѣстѣ c, a, b, A, B, снова не перемѣняютъ уравненія.

Если $a = \pi$, то $A = \pi$ (ст. 46). $b + c = \pi$, $B = \frac{1}{2}\pi$, которыя значенія повѣряютъ опять уравненія.

Если $a, > \pi$, то $A > \pi$ (ст. 46), Пополнивъ a, покуда составится цѣлый кругъ, получимъ прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой c, катетами $2\pi - a$, b, съ углами противъ нихъ $2\pi - A, \pi - B$, которые не перемѣняютъ однакожъ видъ уравненій.

Произвольныя значенія катетовъ a, b относятся ко всѣмъ безъ исключенія прямоугольнымъ сферическимъ треугольникамъ, для которыхъ слѣдовательно найденныя уравненія будутъ общими.

145. Расматриваемъ произвольно взятой сферическій треугольникъ, гдѣ вѣдемъ изъ угла C къ буку c перпендикулъ p (чер. 136), который или пройдя внутри треугольника раздѣлитъ c на двѣ части: x подъ a, $c - x$ подъ b; или внѣ треугольника встрѣтитъ продолженіе бока c на разстояніи x отъ острея B, $c + x$ отъ A. Первый случай будетъ тотъ когда углы A, B вмѣстѣ острые, или вмѣстѣ тупые (ст. 75); въ другомъ случаѣ предположимъ $A < \frac{1}{2}\pi, B > \frac{1}{2}\pi$. Такъ произойдутъ два прямоугольныхъ треугольника: въ одномъ гипотенуза a, катеты

p, x съ угломъ B либо $\pi - B$ противъ p; въ другомъ гипотенуза b, катетъ $c - x$ либо $c + x$. Для такихъ треугольниковъ находимъ въ обоихъ случаяхъ уравненія [ур (90), (94)]

$$\sin. a \sin. B = \sin. p$$

$$\sin. b \sin. A = \sin. p$$

$$\text{tang}. a \cos. B = \text{tang}. x$$

$$\text{tang}. b \cos. A = \text{tang}. (c - x),$$

какъ скоро принимаемъ x положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, смотря потому, перпендикулъ p падаетъ внутри или внѣ треугольника. Изъ двухъ первыхъ уравненій слѣдуетъ

$$\sin. a \sin. B = \sin. b \sin. A, \tag{96}$$

Изъ двухъ другихъ исключивъ x, находимъ

$$\text{tang}. c = \frac{\text{tang}. a \cos. B + \text{tang}. b \cos. A}{1 - \text{tang}. a \text{tang}. b \cos. A \cos. B}.$$

Отсюда

$$\text{tang}. b \cos. A = \frac{\text{tang}. c - \text{tang}. a \cos. B}{1 + \text{tang}. a \text{tang}. c \cos. B}.$$

Далѣе

$$(1 + \cos. A \text{ tang}. b \text{ tang}. c)(1 + \cos. B \text{ tang}. c \text{ tang}. a) = \frac{1}{\cos. c^2}. \tag{97}$$

Подобнымъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}(1 + \cos. B \text{ tang}. c \text{ tang}. a)(1 + \cos. C \text{ tang}. a \text{ tang}. b) &= \frac{1}{\cos. a^2} \\ (1 + \cos. C \text{ tang}. a \text{ tang}. b)(1 + \cos. A \text{ tang}. b \text{ tang}. c) &= \frac{1}{\cos. b^2}\end{aligned}\right\} \tag{98}$$

слѣдовательно

$$\frac{\cos. a^2}{\cos. b^2 \cos. c^2} = (1 + \text{tang}. b \text{ tang}. c \cos. A)^2.$$

Отсюда должны заключить, что

$$\cos. A \sin. b \sin. c + \cos. b \cos. c = \cos. a \tag{99}$$

или

$$\cos. A \sin. b \sin. c + \cos. b \cos. c + \cos. a = o. \qquad (100)$$

На время допускаемъ послѣднее предположеніе, котораго невѣрность будутъ теперь доказывать и которое должно бы также быть принято для всѣхъ угловъ и боковъ треугольника, какъ этаго требуютъ уравненія (97), (98). Напримѣръ

$$\cos. B \sin. c \sin. a + \cos. c \cos. a + \cos. b = o.$$

Умноживъ уравненіе (100) на sin. a и послѣднее на sin. b, потомъ сложивъ, получимъ [ур. (45)]

$$2 \cos. \tfrac{1}{2}(A+B) \cos. \tfrac{1}{2}(A-B) \sin. a \sin. b \sin. c$$

$$+ \sin. (a+b) \left\{ \cos. c - \cos. (a-b) \right\} = o.$$

Далѣе [ур. (46)]

$$\cos. \tfrac{1}{2}(A+B) \cos. \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$+ \sin. (a+b) \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(b+c-a) \sin. \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin. a \sin. b \sin. c} = o.$$

Если теперь полагаемъ $a < \pi, b < \pi, c < \pi$, слѣдовательно также $A < \pi, B < \pi$, $C < \pi$ (ст. 46), $b+c > a, a+c > b$ (ст. 77), такъ что между всѣми производителями могутъ быть отрицательные только

$$\cos. \tfrac{1}{2}(A+B) \qquad \sin. (a+b)$$

но которые должны быть таковы вмѣстѣ, именно для $A+B > \pi$, $a+b > \pi$ (ст. 74), а слѣдовательно не повѣряютъ уравненіе.

Уравненію (100) не удовлетворяетъ также значеніе $a = \pi$, потому что въ такомъ случаѣ $A = \pi$ (ст. 46), $b+c = \pi$. Послѣ чего нельзя полагать уже ни $b = \pi$, ни $c = \pi$.

Если $a < \pi, b < \pi, c > \pi$, то составляется также треугольникъ изъ боковъ $a, b, 2\pi - c$ съ углами $A, B, 2\pi - C < \pi$. Между тѣмъ этому треугольнику снова принадлежитъ уравненіе (99), которое такимъ образомъ остается вѣрнымъ для всѣхъ вообще треугольниковъ.

Въ уравненіи (99) внеся значеніе sin. c [ур. (96)]

$$\sin. c = \sin. a \frac{\sin. C}{\sin. A}$$

получимъ

$$\text{cot. } A \text{ sin. } a \text{ sin. } b \text{ sin. } C + \text{cos. } b \text{ cos. } c = \text{cos. } a$$

потомъ введя сюда значеніе cos. c [ур. (99)]

$$\text{cos. } c = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } C$$

и раздѣливъ на sin. a sin. b, находимъ

$$\text{cot. } A \text{ sin. } C + \text{cos. } C \text{ cos. } b = \text{cot. } a \text{ sin. } b. \qquad (101)$$

Поставя сюда значеніе sin. b изъ уравненія (96),

$$\text{cos. } A \text{ sin. } C + \text{cos. } b \text{ cos. } C \text{ cos. } A = \text{cos. } a \text{ sin. } B.$$

Подобнымъ образомъ

$$\text{cos. } B \text{ sin. } C + \text{cos. } a \text{ cos. } C \text{ cos. } B = \text{cos. } b \text{ sin. } A.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій исключеніе cos. b дастъ

$$\text{cos. } a \text{ sin. } B \text{ sin. } C - \text{cos. } B \text{ cos. } C = \text{cos. } A. \qquad (102)$$

Уравненія (96), (99), (101), (102) тѣ самыя, которыя предполагали найти для сферическихъ треугольниковъ (ст. 138). Послѣднее прямо слѣдуетъ изъ уравненія (99), когда здѣсь перемѣняемъ a,b,c,A на $\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a$ (ст. 79).

Если къ четыремъ уравненіемъ (96), (99), (101), (102) прибавляемъ подобныя съ перемѣною буквъ на другія въ треугольникѣ, то получимъ всѣхъ пятнадцать; а когда полагаемъ въ нихъ $C = \frac{1}{2}\pi$, тамъ гдѣ C входитъ, то снова получимъ десять уравненій для прямоугольныхъ треугольниковъ.

146. Уравненія для сферическихъ треугольниковъ можно находить съ посо-біемъ одной Употребительной Геометріи, какъ это до сихъ поръ обыкновенно дѣлали.

Предполагаемъ въ сферическомъ треугольникѣ бока $a < \pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$ (чер. 137). Пусть D центръ сферы, полупоперечники AD, BD, CD проведены къ остреямъ угловъ A, B, C, потомъ продолжены за точки B, C до встрѣчи въ B', C' съ перпендикулами AB', AC' къ AD въ концѣ A полупоперечниья AD. Пусть r полупоперечникъ сферы, $B'C' = x$, $AB' = y$, $AC' = z$, $DB' = \gamma$, $DC' = \zeta$.

Здѣсь уголъ $B'DC' = a$, $B'AC' = A$. Въ прямолинейныхъ треугольникахъ $AB'C'$, $DB'C'$ будетъ [ур. (67)]

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos. A$$

$$x^2 = \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta \cos. a.$$

Исключивъ x въ обоихъ уравненіяхъ и раздѣливъ потомъ на r^2, получимъ

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{\xi^2}{r^2} - \frac{y\xi}{r^2} \cos. A$$

$$= \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{\zeta^2}{r^2} - \frac{\eta\zeta}{r^2} \cos. a.$$

Между тѣмъ (ст. 123)

$$\frac{y}{r} = \text{tang. } b \qquad \frac{z}{r} = \text{tang. } c$$

$$\frac{r}{\eta} = \cos. b \qquad \frac{r}{\zeta} = \cos. c.$$

Послѣ чего

$$\text{tang. } b^2 + \text{tang. } c^2 - 2 \text{ tang. } b \text{ tang. } c \cos. A$$

$$= \frac{1}{\cos. b^2} + \frac{1}{\cos. c^2} - \frac{2 \cos. a}{\cos. b \cos. c}.$$

Уравненіе, которое принимаетъ видъ

$$\cos. A \sin. b \sin. c + \cos. b \cos. c = \cos. a \qquad (103)$$

какъ было найдено выше [ур. (99)]. Остается разсмотрѣть случаи, когда a, b, c, A неудовлетворяютъ условіямъ $a < \pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$ $A < \pi$. Замѣтимъ еще, что $A = \pi$ повѣряетъ уравненіе, потому что съ этимъ вмѣстѣ $a = \pi$, $b + c = \pi$.

Пусть $b = \frac{1}{2}\pi$, но $c < \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно надобно доказывать

$$\cos. A \sin. c = \cos. a. \qquad (104)$$

Продолженіе бока c за точку B (чер. 138) дѣлаемъ равнымъ $\frac{1}{2}\pi - c$, потомъ конецъ этого продолженія соединяемъ дугой съ остреемъ угла C. Такъ составится прямоугольной треугольникъ, гдѣ гипотенуза a, катеты A, $\frac{1}{2}\pi - c$, углы противъ нихъ $\pi - B$, $\frac{1}{2}\pi - C$.

Если къ тому $A < \frac{1}{2}\pi$, то въ уравненіи (103) можемъ ставить $\frac{1}{2}\pi, A, \frac{1}{2}\pi - c$ вмѣсто A, b, c, оставляя a безъ перемѣны: это даетъ намъ уравненіе (104). Если $A > \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $a > \frac{1}{2}\pi$, то продолженіе A, a въ прямоугольномъ треугольникѣ по другую сторону бока $\frac{1}{2}\pi - c$ до взаимной встрѣчи, производитъ снова прямоугольный треугольникъ (чер. 139), гдѣ гипотенуза $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, катеты $\frac{1}{2}\pi - c, \pi - A < \frac{1}{2}\pi$, противъ нихъ углы $\frac{1}{2}\pi - C, B$. Въ уравненіи (103) поставя теперь $\frac{1}{2}\pi, \pi - A, \frac{1}{2}\pi - c, \pi - a$ вмѣсто A, b, c, a, получимъ опять уравненіе (104).

Пусть $b > \frac{1}{2}\pi$, но $c < \frac{1}{2}\pi, A < \pi$, слѣдовательно $a < \pi$. Продолжаемъ бока a, b до взаимной встрѣчи по другую сторону бока c Составится новый треугольникъ, гдѣ бока $\pi - a, \pi - b < \frac{1}{2}\pi, c, < \frac{1}{2}\pi$, противъ нихъ углы $\pi - A, \pi - B, C$. Послѣ чего можемъ ставить $\pi - A, \pi - a, \pi - b, c$ въ уравненіе (103), которое не перемѣняетъ отъ этаго своего вида.

Случай $b = \pi$ повѣряетъ уравненіе (103), потому что съ этимъ вмѣстѣ $a + c = \pi$.

Случай $b = \frac{1}{2}\pi, c = \frac{1}{2}\pi$ также повѣряетъ уравненіе (103), потому что съ этимъ вмѣстѣ $a = A$.

Если $b = \frac{1}{2}\pi, c > \frac{1}{2}\pi, < \pi$ то снова надобно доказывать уравненіе (104). Кладемъ дугу $\frac{1}{2}\pi$ на бокъ c отъ острея A (чер. 140); другой конецъ этой дуги соединяемъ съ остреемъ C. Составится прямоугольный треугольникъ, гдѣ гипотенуза a, катеты $A, c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi$, противъ нихъ углы $B, C - \frac{1}{2}\pi$ Удержавъ a, можемъ слѣдовательно ставить $\frac{1}{2}\pi, A, c - \frac{1}{2}\pi$ вмѣсто A, b, c въ уравненія (103), которое такимъ образомъ переходитъ въ уравненіе (104).

Если $b > \frac{1}{2}\pi$, но $< \pi, c > \frac{1}{2}\pi$, но $< \pi$, то продолжаемъ дуги b, c по другую сторону бока a до взаимной встрѣчи. Изъ боковъ $a, \pi - b, \pi - c$, съ углами противъ нихъ $A, \pi - B, \pi - C$, составится треугольникъ, для котораго уравненіе (103) сохраняетъ свой видъ.

Если $a > \pi$, но $b < \pi, c < \pi$, то замѣнивъ a дугой $2\pi - a < \pi$, получимъ треугольникъ съ боками $2\pi - a < \pi, b, c$, съ углами противъ нихъ $2\pi - A$, $\pi - B, \pi - C$. Между тѣмъ уравненіе (103) не перемѣняется для такого треугольника.

Если $b > \pi$, но $a < \pi, c < \pi$, то замѣнивъ бокъ b дугой $2\pi - b < \pi$, составимъ треугольникъ изъ боковъ $a < \pi, 2\pi - b < \pi, c < \pi$, съ углами про-

тивъ нихъ $\pi - A, 2\pi - B, \pi - C$. Уравненіе (203) сохраняетъ опять прежній свой видъ.

Изъ уравненія (103) слѣдуетъ

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}.$$

Послѣ чего $1 + \cos. A, 1 - \cos. A$ даютъ

$$\cos. \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin. \tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. b \sin. c}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(a+c-b) \sin. \tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin. b \sin. c}.$$

Откуда, для краткости положивъ $a+b+c=s$, находимъ

$$\frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{2\sqrt{\sin. \tfrac{1}{2} s. \sin. (\tfrac{1}{2} s - a) \sin. (\tfrac{1}{2} s - b) \sin. (\tfrac{1}{2} s - c}}{\sin. a \sin. b \sin. c}$$

и заключаемъ, что

$$\frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b} \qquad (105)$$

не принимая въ разсужденіе знакъ передъ квадратнымъ корнемъ, потому что $\sin. A, \sin. a$ бываютъ вмѣстѣ положительными числами для $A < \pi$ и вмѣстѣ отрицательными для $A > \pi$. Тоже надобно сказать о синусахъ $\sin. B, \sin. b$.

Уравненія (103), (105) тѣ самыя, которыя были даны выше [ур. (96), (99)] и которыхъ уже довольно, чтобы найти два другія (101), (102) для сферическихъ треугольниковъ, какъ это видѣли (ст. 145).

Итакъ уравненія (96), (99), (101), (102) для сферическихъ треугольниковъ остаются тѣже, принимаемъ ли постояннымъ или перемѣннымъ уголъ паралельности.

Также заслуживаетъ замѣчанія то, что уравненія (83), (87), (88), (89) Воображаемой Геометріи для прямолинейныхъ треугольниковъ, переходятъ въ уравненія (96), (99), (101), (102) для сферическихъ треугольниковъ, когда вмѣсто боковъ a, b, c прямолинейнаго треугольника беремъ $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$,

или все равно, вмѣсто произвольнаго числа e ставимъ

$$e^{\sqrt{-1}}$$

и разумѣемъ снова подъ e основаніе неперовыхъ логариѳмовъ. Съ этой перемѣной должно принимать уже [ур. (62), (63), (64), (65)]

$$\sin.\ \Pi\,(a) = \frac{1}{\cos.\ a}$$

$$\cos.\ \Pi\,(a) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\ \text{tang.}\ a$$

$$\cot.\ \Pi\,(a) = \sqrt{-1}.\ \sin.\ a.$$

ГЛАВА XII.

РѢШЕНІЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ ВЪ УПОТРЕБИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

147. *Рѣшить* треугольникъ, значитъ найти въ немъ неизвѣстныя части помощію трехъ данныхъ, между которыми въ прямолинейныхъ треугольникахъ Употребительной Геометріи по крайней мѣрѣ долженъ быть одинъ бокъ (ст. 138).

Рѣшая треугольникъ, вычисленіе дѣлаютъ обыкновенно съ пособіемъ логариѳмовъ, которые въ таблицахъ даны приблизительно, слѣдовательно съ ошибкой не болѣе половины противъ послѣдней десятичной единицы (Алгебра, ст. 80). Означаемъ ω самую большую погрѣшность на каждый логариѳмъ, такъ что въ таблицахъ съ мантиссой изъ семи десятичныхъ

$$\omega = 0,0000005.$$

Пусть M модуль логариѳмовъ съ основаніемъ 10 (Алгебра, ст. 169, 175), слѣдовательно

$$M = 0,4342945$$

$$\log. M = \overline{9},6377798.$$

Когда теперь a число, $\triangle a$ погрѣшность отъ ошибки ω въ $\log. a$, то

$$\log. (a + \triangle a) - \log. a = \omega$$

или

$$\log. (1 + \frac{\triangle a}{a}) = \omega.$$

Довульствуясь первымъ членомъ въ строкѣ для логариѳма, получимъ

$$\triangle a = \frac{a\,\omega}{M}. \tag{106}$$

Еслижъ a дуга, $\triangle a$ въ ней ошибка, которая происходитъ отъ ω въ log. sin. a, то

$$\log.\sin.(a+\triangle a) - \log.\sin. a = \omega$$

или

$$\log.(\cos.\triangle a + \cot. a \sin.\triangle a) = \omega.$$

Для весьма малаго $\triangle a$, если притомъ a не чрезвычайно близко къ $\frac{1}{2}\pi$, почитая $\cos.\triangle a = 1$, $\sin.\triangle a = \triangle a$ [ур. (80), (40)], затѣмъ въ строкѣ довольствуясь первой степенью $\triangle a$, находимъ

$$\triangle a = \frac{\omega}{M}\,\mathrm{tang}.\, a. \tag{107}$$

Подобнымъ образомъ ошибку $\triangle a$ въ дугѣ, отъ ω въ log. cos. a, должно давать уравненіе

$$\log.(1 - \triangle a\,\mathrm{tang}.\, a) = \omega.$$

Откуда, подъ условіемъ что $\triangle a$ весьма мало и a не весьма близко къ $\frac{1}{2}\pi$,

$$\triangle a = -\frac{\omega}{M}\cot. a. \tag{108}$$

Наконецъ ошибку $\triangle a$ въ a, когда въ log. tang. a недостатокъ ω, находимъ изъ уравненія

$$\log.\{\cot. a\,\mathrm{tang}.(a+\triangle a)\} = \omega$$

гдѣ [урав. (32)]

$$\mathrm{tang}.(a+\triangle a) = \frac{\mathrm{tang}.\, a + \mathrm{tang}.\triangle a}{1 - \mathrm{tang}.\, a\,\mathrm{tang}.\triangle a}.$$

Послѣ чего весьма близко

$$\omega = \log.\left(1 + \frac{2\triangle a}{\sin. 2a}\right)$$

и слѣдовательно

$$\triangle a = \frac{\omega}{2\,M} \sin.\ 2\,a. \qquad (109)$$

поставить сюда $-\omega, \frac{1}{2}\pi - a$ вмѣсто ω, a, получимъ

$$\triangle a = -\frac{\omega}{2\,M} \sin.\ 2\,a$$

ошибку $\triangle a$ въ дугѣ a, которая происходитъ отъ ω въ log. cot. a.

Знакъ $\triangle$ здѣсь употребленъ въ томъ же смыслѣ, въ какомъ и при вычисленіи приращеній но теперь слово *приращеніе* замѣнимъ названіемъ *точность вычисленія*, предполагая всѣ случаи неблагопріятными, такъ что погрѣшности всегда будутъ расти съ числомъ логариѳмовъ, увеличивая другъ друга во всякомъ ихъ соединеніи.

Точность вычисленія такимъ образомъ опредѣляется самой большой ошибкой какая только возможна. И такъ если число не дано строго вѣрнымъ, то всякій разъ надобно предполагать ошибку, когда пріискиваемъ его въ таблицахъ.

Въ отношеніи къ таблицамъ логариѳмовъ отъ тригонометрическихъ функцій замѣтимъ, что здѣсь принимаютъ (ст. 131)

$$\pi = 3,14159265...$$

а къ самымъ логариѳмамъ вездѣ прибавлено число 10, которое слѣдовательно должно напередъ вычитать, или такое вычитаніе показывать чертою надъ характеристикой. Самый уголъ между тѣмъ въ употребительныхъ таблицахъ опредѣляется по шестидесятичному дѣленію круга, а потому какъ скоро хотимъ и точность вычисленія выражать въ такихъ же секундахъ градуса, то надобно модуль M умножать всякій разъ на дугу въ одну секунду, или безъ примѣтной разности, на синусъ отъ одной секунды, котораго логариѳмъ находимъ

$$\log.\ \sin.\ 1'' = \overline{4},6855749$$

послѣ чего

$$\log.\ (M \sin.\ 1'') = \overline{4},3233537$$

$$-\log.\ (M \sin.\ 1'') = 5,6766463.$$

Наконецъ рѣшая треугольники будемъ къ логарѳму приставлять букву n, когда долженъ онъ отвѣчать отрицательному числу.

Подъ a, b, c станемъ разумѣть бока; подъ A, B, C противъ нихъ углы, которыхъ слѣдовательно сумма составляетъ π (ст. 121).

148. *Даны a, b, c, требуется найти A.*

Уравненіе (67)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos. A$$

даетъ

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}.$$

Положивъ $a + b + c = s$, находимъ отсюда

$$\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}{b\,c}} \qquad (110)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s - a)}{b\,c}} \qquad (111)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s.(\frac{1}{2}s - a)}}. \qquad (112)$$

Изъ этихъ трехъ выраженій каждое можетъ служить къ вычисленію дуги A, но съ различною точностію. Если предполагаемъ a, b, c данными вѣрно, то по числу всѣхъ логариѳмовъ съ уравненіемъ (110) должны допускать въ $2\log.\sin.\frac{1}{2}A$ ошибку $4\,\omega$ (ст. 147), потомъ 2ω въ $\log. \sin. \frac{1}{2} A$, наконецъ 3ω въ этомъ же логариѳмѣ, пріискавъ его въ таблицахъ, и слѣдовательно почитать [ур. (107)]

$$\triangle A = \frac{6\,\omega}{M} \tang. \tfrac{1}{2} A.$$

Подобнымъ образомъ въ уравненіи (111) назначаемъ точность вычисленія

$$\triangle A = \frac{6\,\omega}{M} \cot. \tfrac{1}{2} A.$$

Между тѣмъ какъ изъ уравненія (112) находимъ [ур. (109)]

$$\triangle A = \frac{3\,\omega}{M} \sin. A.$$

Откуда видно, что вычисленіе съ уравненіемъ (112) всегда выгоднѣе, нежели съ двумя другими (110), (111).

Напримѣръ даются

$$a = 2{,}37594$$

$$b = 6{,}81345$$

$$c = 5{,}93549$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{2}s = 7{,}56244$$

$$\tfrac{1}{2}s - a = 5{,}18650$$

$$\tfrac{1}{2}s - b = 0{,}74899$$

$$\tfrac{1}{2}s - c = 1{,}62695$$

$$\log.(\tfrac{1}{2}s - b) = \overline{9}{,}8744760$$

$$\log.(\tfrac{1}{2}s - c) = 0{,}2113743$$

$$-\log.\tfrac{1}{2}s = \overline{9}{,}1213381$$

$$-\log.(\tfrac{1}{2}s - a) = \overline{9}{,}2851256$$

$$\overline{\overline{8}{,}4923140}$$

$$\log.\text{tang.}\tfrac{1}{2}A = \overline{9}{,}2461570$$

$$\tfrac{1}{2}A = 9^\circ\,59'\,46''{,}86$$

$$A = 19^\circ\,59'\,33''{,}72$$

$$\omega = 0{,}00000005$$

$$\log.\sin.A = \overline{9}{,}53390$$

$$\log.3\,\omega = \overline{9}{,}17609$$

$$-\log.(M\sin.1'') = 5{,}47665$$

$$\log.\triangle A = \overline{\overline{8}{,}18664}$$

$$\triangle A = 0''{,}015.$$

149. *Даны* a, b, A, *найти* B *или* C.

Уравненіе (68) даетъ

$$\text{sin. } B = \frac{b}{a} \text{ sin. } A. \tag{113}$$

Точность вычисленія [ур. (107)]

$$\triangle B = \frac{4\,\omega}{M} \text{ tang. } B. \tag{114}$$

Наконецъ уголъ C получимъ

$$C = 180^\circ - A - B$$

съ точностію вычисленія тою же, что для B, слѣдовательно

$$\triangle C = \frac{4\,\omega}{M} \text{ tang. } (A + C).$$

Напримѣръ

$$a = 5{,}93549$$

$$b = 2{,}37594$$

$$A = 58^\circ\ 39'\ 46'', 94.$$

Находимъ

$$\log.\ b = 0{,}3758355$$

$$-\log.\ a = \bar{9}{,}2265434$$

$$\log.\ \sin.\ A = \bar{9}{,}9315207$$

$$\log.\ \sin.\ B = \bar{9}{,}5338996$$

$$B = 19^\circ\ 59'\ 33'', 71$$

$$C = 101^\circ\ 20'\ 39'', 35$$

$$\log.\ 4\,\omega = \bar{3}{,}30103$$

$$-\log.\ (M \text{ sin. } 1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\ \text{tang.}\ B = \bar{9}{,}56087$$

$$\log.\ \triangle B = \bar{\bar{8}}{,}53855$$

$$\triangle B = 0'', 02$$

$$\triangle C = 0'', 02.$$

Когда $a > b$, то углу B принадлежитъ одно значеніе (ст. 84). Еслижъ $a < b$, то B можетъ быть острый и тупой уголъ, такъ чтобы сумма двухъ этихъ значеній составляла π (ст. 85, 123).

Уравненіе (114) показываетъ, что съ приближеніемъ B къ $\frac{1}{2}\pi$ точность уменьшается. Однакожъ ошибка не можетъ расти безпредѣльно вмѣстѣ съ tang.B, потому что выраженіе (114) выведено въ предположеніи $\triangle B^2$ чрезвычайно малымъ противъ $\triangle B$ cot. B (ст. 147). Еслижъ въ уравненіи

$$\log.(\cos.\triangle B + \sin.\triangle B \cot. B) = -\frac{4\omega}{M}$$

удерживаемъ $\triangle B^2$ и слѣдовательно принимаемъ

$$\log.(1 - \tfrac{1}{2}\triangle B^2 + \sin.\triangle B \cot. B) = -\frac{4\omega}{M}$$

или

$$\triangle B^2 = \frac{8\omega}{M} + 2\triangle B \cot. B$$

то принимая въ разсужденіе только величину, получимъ

$$\triangle B = -\cot. B + \sqrt{\frac{8\omega}{M} + \cot. B^2}$$

гдѣ подъ корнемъ оба члена разумѣемъ положительными, также какъ и cot. B, съ тою цѣлію, чтобъ ошибкѣ $\triangle B$ дать самое большое значеніе.

Далѣе въ послѣднемъ уравненіи ставя

$$\text{tang.}\, x = \text{tang.}\, B\sqrt{\frac{8\omega}{M}}$$

находимъ

$$\triangle B = \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{8\omega}{M}}$$

напримѣръ

$$a = 2{,}32975$$
$$b = 6{,}81345$$
$$A = 19^\circ\, 59'\, 33''{,}72.$$

Послѣ чего

$$\log. b = 0{,}8333671$$

$$-\log. a = \bar{9}{,}6326907$$

$$\log. \sin. A = \bar{9}{,}5338996$$

$$\log. \sin. B = \overline{\bar{9}{,}9999574}$$

$$B = 89^\circ\ 11'\ 50''$$

$$\log. 8\,\omega = \bar{3}{,}60206$$

$$-\log. M = 0{,}36223$$

$$\overline{\bar{3}{,}96429}$$

$$\bar{6}{,}98214$$

$$\log. \text{tang}. B = 1{,}85350$$

$$\log. \text{tang}. x = \overline{\bar{8}{,}83564}$$

$$x = 3^\circ\ 55'\ 5''$$

$$\tfrac{1}{2}x = 1^\circ\ 57'\ 33''$$

$$\log. \sqrt{\frac{8\,\omega}{M}} = \bar{6}{,}98214$$

$$\log. \text{tang}. \tfrac{1}{2}x = \bar{8}{,}53412$$

$$-\log. \sin. 1'' = 5{,}31443$$

$$\log. \triangle B = \overline{0{,}83069}$$

$$\triangle B = 6'', 77.$$

Самое большое значеніе $\triangle B$ даетъ выраженіе (115) для $B = \frac{1}{2}\pi$ и слѣдовательно для $x = \frac{1}{2}\pi$, именно

$$\log. \sqrt{\frac{8\,\omega}{M}} = \bar{6}{,}98124$$

$$-\log. \sin. 1'' = 5{,}31443$$

$$\log. \triangle B = \overline{2{,}29657}$$

$$\triangle B = 197'', 96$$

$$= 3'\ 17'', 96.$$

150. Особое рѣшеніе, когда даны a, b, A, притомъ $a < b$, и требуется найти B.

Полагаемъ

$$\frac{a}{b} = \sin.(A + \alpha).$$

Уравненіе (113) дѣлается

$$\sin. B = \frac{\sin. A}{\sin.(A + \alpha)}.$$

Отсюда

$$\cos. B^2 = \frac{\sin. \alpha \sin.(2A + \alpha)}{\sin.(A + \alpha)^2}$$

и наконецъ

$$\text{tang. } B = \frac{\sin. A}{\sqrt{\sin. \alpha \sin.(2A + \alpha)}}. \qquad (116)$$

Вспомогательнный уголъ α опредѣляется вѣрнѣе помощію выраженія

$$\text{tang.}(A + \alpha) = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \qquad (117)$$

которое назначаетъ ошибку

$$\triangle \alpha = \frac{3\omega}{2M} \sin.(2A + 2\alpha).$$

Между тѣмъ ошибка въ углѣ B происходитъ какъ отъ неточности логариѳмическихъ таблицъ, такъ отъ невѣрности въ α. Ее находимъ изъ уравненія (116)

$$\frac{2 \triangle B}{\sin. 2B} = \frac{3\omega}{M} + \tfrac{1}{2} \triangle \alpha \{\cot.\alpha + \cot.(2A + \alpha)\}.$$

Впися сюда значеніе $\triangle \alpha$, получимъ

$$\triangle B = \frac{3\omega}{M} \text{tang. } B \{\cos. B^2 + \cos.(A + \alpha)^2\} \qquad (118)$$

или

$$\triangle B = \frac{3\omega}{2M} \cdot \frac{\sin. 2B}{\cos. \xi^2}.$$

положивъ напередъ

$$\text{tang. } \xi = \frac{\cos. (A + \alpha)}{\cos. B}.$$

Сличая выраженіе (118) съ прежнимъ (114) для $\triangle B$ заключаемъ, что послѣднее рѣшеніе выгоднѣе перваго (ст. 149), какъ скоро

$$\cos. B^2 + \cos. (A + \alpha)^2 < \tfrac{4}{3}$$

или другимъ образомъ

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \sin. A^2 > \tfrac{2}{3}.$$

Напримѣръ

$$a = 6{,}81345$$

$$b = 6{,}87020$$

$$A = 78^\circ\ 39'\ 20'', 66.$$

Находимъ

$$b + a = 13{,}68365$$

$$b - a = 0{,}05675$$

$$\log. (b + a) = 1{,}1362020$$

$$\log. (b - a) = \overline{8}{,}7539659$$

$$\log. (b^2 - a^2) = \overline{\overline{9}{,}8901679}$$

$$\tfrac{1}{2} \log. (b^2 - a^2) = \overline{9}{,}9450839$$

$$- \log. \sqrt{b^2 - a^2} = 0{,}0549161$$

$$\log. a = 0{,}8333671$$

$$\log. \text{tang. } (A + \alpha) = \overline{0{,}8882832}$$

$$A + \alpha = 82^\circ\ 37'\ 49'', 97$$

$$\alpha = 3^\circ\ 58'\ 29'', 31$$

$$2\,A + \alpha = 161^\circ\ 17'\ 10'', 63$$

$$\log. \sin. \alpha = \overline{8}{,}8408452$$

$$\log. \sin. (2\,A + \alpha) = \overline{9}{,}5062881$$

$$\overline{\overline{8}{,}3471333}$$

$$-\log.\sqrt{\sin.\alpha\sin.(2A+\alpha)} = 0{,}8264334$$

$$\log.\sin.A = \overline{9}{,}9914312$$

$$\log.\operatorname{tang}.B = \overline{0{,}8178646}$$

$$B = 81^\circ\,21'\,5'',31$$

$$2B = 162^\circ\,42'\,10'',62$$

$$\log.\cos.(A+\alpha) = \overline{9}{,}10811$$

$$-\log.\cos.B = 0{,}82273$$

$$\log.\operatorname{tang}.\xi = \overline{\overline{9}{,}93084}$$

$$\xi = 40^\circ\,27'\,30''$$

$$\log.\cos.\xi = \overline{9}{,}88131$$

$$\log.3\omega = \overline{3}{,}17600$$

$$-\log.(M\sin.1'') = 5{,}67665$$

$$-\log.2 = \overline{9}{,}69897$$

$$\log.\sin.2B = \overline{9}{,}47324$$

$$-2\log.\cos.\xi = 0{,}23738$$

$$\log.\triangle B = \overline{\overline{8}{,}26224}$$

$$\triangle B = 0'',018.$$

Тогда какъ по способу въ статьѣ 149 хотя находимъ тоже значеніе B, но неможемъ быть увѣрены далѣе точности

$$\triangle B = 0'',39.$$

Выраженіе (118) для $\triangle B$ показываетъ, что точность вычисленія уменьшается съ приближеніемъ B къ $\frac{1}{2}\pi$. Однакожъ это возрастаніе $\triangle B$ не должно почитать безпредѣльнымъ, какъ уже подобное замѣчаніе сдѣлали въ статьѣ 149. Если $\triangle\alpha\cot.\alpha$ такъ мало, что $\triangle\alpha^2$ не въ правѣ пренебрегать, то выраженіе (118) не

можетъ быть допущено. Въ такомъ случаѣ снова беремъ уравненіе (116) и пишемъ

$$\log.\left(\frac{1+\triangle B\cot. B}{1-\triangle B\cot. B}\right)=-\frac{3\,\omega}{M}-\tfrac{1}{2}\log.(1+\triangle\alpha\cot.\alpha)-$$

$$\tfrac{1}{2}\log.\{1+\triangle\alpha\cot.(2A+\alpha)\},$$

предполагая всегда $\triangle\alpha, \triangle B$ весьма малыми. Отъ логарифмовъ переходя къ числамъ, получимъ

$$\frac{1-\triangle B\cot. B}{1+\triangle B\cot. B}=10^{3\omega}\sqrt{(1+\triangle\alpha\cot.\alpha)[1+\triangle\alpha\cot.(2A+\alpha]}.$$

Когда B близко къ $\frac{1}{2}\pi$ то можемъ почитать

$$1-\frac{\triangle B}{\sin. B\cos. B}=10^{3\omega}\sqrt{1+\triangle\alpha\frac{\sin.\alpha\sin.(2A+2\alpha)}{\sin.(2A+\alpha)}} \qquad (119)$$

и наконецъ

$$\triangle B=\sin. B\cos. B\left\{-1+\sqrt{1+\frac{6\,\omega}{M}\left[1+\frac{\cos.(A+\alpha)^2}{\cos. B^2}\right]}\right\}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\triangle B&=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi\frac{\sin. B}{\sin.\xi}\cos.(A+\alpha)\sqrt{\frac{6\,\omega}{M}}\\ \text{tang.}\,\xi&=\frac{\cos.(A+\alpha)}{\cos. B}\\ \text{tang.}\,\varphi&=\frac{1}{\cos.\xi}\sqrt{\frac{6\,\omega}{M}}\end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Для $B=\frac{1}{2}\pi$ находимъ $\alpha=0, \xi=\frac{1}{2}\pi, \varphi=\frac{1}{2}\pi$, и слѣдовательно самая большая ошибка въ углѣ B

$$\triangle B=\cos. A\sqrt{\frac{6\,\omega}{M}}$$

менѣе нежели по способу въ статьѣ 149 [урав. (115)], именно съ таблицами на семь десятичныхъ она будетъ

$$\triangle B=161'',1.\cos. A.$$

Въ уравненіи (119) могли бы также принимать

$$\frac{\sin.\,\alpha\,\sin.\,(2\,A+\alpha)}{\triangle\,\alpha\,\sin.\,(2\,A+2\,\alpha)}$$

числомъ отрицательнымъ, болѣе или менѣе единицы, разумѣя къ тому число подъ корнемъ всегда положительнымъ; но легко видѣть, что съ такимъ предположеніемъ значеніе для $\triangle B$ вышло бы менѣе, слѣдовательно выраженіемъ (120) можно довольствоваться во всякомъ случаѣ.

Напримѣръ

$$a = 2{,}32975$$

$$b = 6{,}81345$$

$$A = 19^\circ\ 59'\ 33'',\ 72.$$

Находимъ

$$b + a = 9{,}14320$$

$$b - a = 4{,}48370$$

$$\log.\,(b+a) = 0{,}9610982$$

$$\log.\,(b-a) = 0{,}6516365$$

$$\log.\,(b^2 - a^2) = 1{,}6127347$$

$$\log.\,a = 0{,}3673093$$

$$-\log.\sqrt{b^2-a^2} = 9{,}1936327$$

$$\log.\,\mathrm{tang.}\,(A+\alpha) = \overline{9{,}5609420}$$

$$A + \alpha = 19^\circ\ 59'\ 41'',\ 10$$

$$\alpha = 7'',\ 38$$

$$2\,A + \alpha = 39^\circ\ 39'\ 14'',\ 82$$

$$\log.\,\sin.\,\alpha = \overline{5{,}5527099}$$

$$\log.\,\sin.\,(2\,A+\alpha) = \overline{9{,}8079541}$$

$$\overline{5{,}3606640}$$

$$\overline{7}{,}6803320$$

$$2{,}3196680$$

$$\log.\,\sin.\,A = \overline{9{,}5338997}$$

$$\log.\,\mathrm{tang.}\,B = \overline{1{,}8535676}$$

$$B = 89^\circ\ 11'\ 50'',\ 46$$

$$\log.\ \cos.\ (A+\alpha) = \overline{9},97300$$

$$-\log.\ \cos.\ B = 1,85354$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \xi = \overline{\overline{1,82654}}$$

$$\xi = 89^\circ\ 8'\ 45''$$

$$\log.\ 6\ \omega = \overline{3},47712$$

$$-\log.\ M = 0,36222$$

$$\overline{\overline{3,93934}}$$

$$\log.\sqrt{\frac{6\ \omega}{M}} = \overline{6},96967$$

$$-\log.\ \cos.\ \xi = 1,82660$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = \overline{\overline{8,74627}}$$

$$\varphi = 3^\circ\ 11'\ 28''$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi = 1^\circ\ 35'\ 44''$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varphi = \overline{8},44490$$

$$\log.\ \cos.\ (A+\alpha) = \overline{9},97300$$

$$\log.\ \sin.\ B = \overline{9},99997$$

$$-\log.\ \sin.\ \xi = 0,00004$$

$$\log.\sqrt{\frac{8\ \omega}{M}} = \overline{6},96867$$

$$-\log.\ \sin.\ 1'' = 5,31443$$

$$\log.\ \triangle B = \overline{0,70201}$$

$$\triangle B = 5'',03$$

тогда какъ по способу въ статьѣ 149 найденъ былъ уголъ B съ точностію $\triangle B = 6'',77$.

Въ этомъ послѣднемъ рѣшеніи можемъ достигнуть еще болѣе точности, когда къ таблицамъ логариѳмовъ на семь десятичныхъ беремъ въ помощь таблицу тангенсовъ, какая здѣсь вычислена на пятнадцать десятичныхъ въ дугѣ.

тангенсъ.	*дуга.*			*уголъ.*		
0,001	0,00099	99996	66667	0°	3′	26″,2647374922
0,002	0,00199	99973	33340	0	6	52,5290624560
0,003	0,00299	99910	00049	0	10	18,7925623681
0,004	0,00399	99786	66871	0	13	45,0548247148
0,005	0,00499	99583	33958	0	17	11,3154369975
0,006	0,00599	99280	01555	0	20	37,5739867373
0,007	0,00699	98856	70028	0	24	3,8300614801
0,008	0,00799	98293	39887	0	27	30,0832488016
0,009	0,00899	97570	12809	0	30	56,3331373118
0,010	0,00999	96666	86665	0	34	22,5793116606
0,020	0,01999	73339	73151	1	8	44,7462174304
0,030	0,02999	10048	56878	1	43	6,0888059596
0,040	0,03997	86871	23290	2	17	26,1961534987
0,050	0,04995	83957	21943	2	51	44,6588140023
0,060	0,05992	81551	21208	3	26	1,0693048219
0,070	0,06988	60016	34643	4	0	15,0225865538
0,080	0,07982	99857	12237	4	34	26,1165356431
0,090	0,08975	81741	89951	5	8	33,9524083833
0,100	0,09966	86524	91162	5	42	38,1352949987
0,200	0,19739	55598	49881	11	18	35,7569064728
0,300	0,29145	67944	77867	16	41	57,2792423770
0,400	0,38050	63771	12365	21	48	5,0741508665
0,500	0,46364	76090	00806	26	33	54,1842374808
0,600	0,54041	95002	70584	30	57	49,5235154647
0,700	0,61072	59643	89209	34	59	31,2727148112
0,800	0,67474	09422	23553	38	39	35,3097147243
0,900	0,73281	51017	86507	41	59	13,9649849400
1,000	0,78539	81633	97448	45	0	0

Въ первомъ столбцѣ таблицы написаны тангенсы, во второмъ содержаніе соотвѣтственныхъ дугъ къ полупоперечнику, а въ послѣднемъ углы въ градусахъ, минутахъ, секундахъ и доляхъ секунды на десять десятичныхъ.

Если теперь значеніе tang. $(A+\alpha)$ въ уравненіи (117) вычислено t, а близкій къ нему тангенсъ изъ перваго столбца беремъ t' съ угломъ къ нему T', то ставя передъ тангенсомъ arc.tang. чтобъ означить уголъ его, получимъ [ур. (93)]

$$A+\alpha = T' + \text{arc. tang.}\left(\frac{t-t'}{1+tt'}\right).$$

Пусть далѣе

$$\frac{t - t'}{1 + tt'} = t''$$

а къ t'' близкій тангенсъ изъ перваго столбца t''' съ угломъ къ нему T''', то снова

$$\text{arc. tang.}\,(t'') = T''' + \text{arc. tang.}\left(\frac{t'' - t'''}{1 + t''\,t'''}\right).$$

Приближенный тангенсъ можемъ брать въ первомъ столбцѣ либо менѣе, либо болѣе даннаго. Въ послѣднемъ случаѣ придаточный уголъ къ взятому въ таблицѣ, дѣлается отрицательнымъ.

Такъ продолжаемъ, покуда тангенсъ придаточный послѣдней дуги не сдѣлается менѣе написанныхъ въ таблицѣ. Тогда вычисляемъ напередъ дугу, потомъ самый уголъ помощію безконечной строки

$$\text{arc. tang.}\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdot\cdot$$

Точность вычисленія теперь будетъ болѣе зависѣть отъ угла α, который съ помощію таблицы можетъ всегда быть опредѣленъ до восьми десятичныхъ долей секунды.

Для примѣра беремъ снова (ст. 150)

$$a = 2{,}32975$$
$$b = 6{,}81345$$
$$A = 19^\circ\ 59'\ 33'',72.$$

Находимъ

$$\frac{a^2}{b^2 - a^2} = 0{,}132398746816501.$$

Потомъ съ помощію логариѳмовъ приближенно

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} = 0{,}3638663 = \lambda.$$

Полагаемъ для втораго приближенія

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \lambda + x$$

и слѣдовательно

$$\frac{a^2}{\lambda(b^2-a^2)} = \lambda + 2x + \frac{x^2}{\lambda}$$

пренебрегая квадратомъ отъ x, находимъ

$$x = 0{,}000000085939277$$

потомъ

$$\frac{x^2}{\lambda} = 0{,}000000000000020$$

и слѣдовательно

$$\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} = 0{,}363866385939264.$$

Если довольствуемся приближеніемъ

$$\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} = 0{,}3638663859$$

то

$$A + \alpha = \text{arc. tang. } (0,3) + \text{arc. tang.}\left(\frac{0{,}0638663859}{1{,}1091599158}\right)$$

$$= \text{arc. tang. } (0,3) + \text{arc. tang. } (0,05) + \text{arc. tang.}\left(\frac{0{,}0084083901}{1{,}1123532350}\right)$$

$$= \text{arc. tang. } (0,3) + \text{arc. tang. } (0,05) + \text{arc. tang. } (0,007)$$

$$+ \text{arc. tang.}\left(\frac{0{,}0006219175}{1{,}1124120938}\right).$$

Здѣсь

$$\frac{0{,}000621975}{1{,}1124120938} = 0{,}0005 + \frac{0{,}000065715}{1{,}1124120933}.$$

Далѣе помощію логариѳмовъ вычисляемъ

$$\log. (0{,}0000657115) = \overline{5},8176414$$

$$-\log. (1{,}1124120938) = \overline{9},9537343$$

$$\overline{\overline{5},7713757}$$

$$= \log. (0{,}0000590712).$$

Слѣдовательно

$$\frac{0{,}0006219172}{1{,}1124120938} = 0{,}0005590712.$$

Послѣ чего въ углахъ

$$\text{arc. tang. } (0, 3) = 16^\circ\ 41'\ 57'',279242$$

$$\text{arc. tang. } (0, 05) = \quad 2\ \ 51\ \ 44{,}658814$$

$$\text{arc. tang. } (0, 007) = \quad\ \ 24\ \ \ 3{,}830061$$

$$\text{arc. tang. } (0{,}0005590712) = \quad\ \ 1\ \ 55{,}316700$$

$$A + \alpha = \overline{19^\circ\ 59'\ 41'',084827}$$

$$\alpha = 7'',36483$$

$$2\,A + \alpha = 39^\circ\ 59'\ 14'',80$$

$$\log.\ \sin.\ \alpha = \bar{5},5518301$$

$$\log.\ \sin.\ (2\,A + \alpha) = 9{,}8079540$$

$$\log.\ \{\sin.\ \alpha\ \sin.\ (2\,A + \alpha)\} = \overline{\bar{5},3597841}$$

$$\log.\ \sqrt{\sin.\ \alpha\ \sin.\ (2\,A + \alpha)} = \bar{7},6798920$$

$$-\log.\ \sqrt{\sin.\ \alpha\ \sin.\ (2\,A + \alpha)} = 2{,}3201080$$

$$\log.\ \sin.\ A = \bar{9},5338996$$

$$\log.\ \text{tang.}\ B = \overline{1{,}8540076}$$

$$B = 89^\circ\ 11'\ 53'',383.$$

Ошибка въ B назначается уравненіемъ

$$\triangle B = \frac{3\,\omega}{2\,M} \sin.\ 2\,B + \frac{\sin.\ 2\,B\ \sin.\ (2\,A + 2\,\alpha)}{4\ \sin.\ \alpha\ \sin.\ (2\,A + \alpha)}\ \triangle \alpha.$$

Принимая въ настоящемъ примѣрѣ

$$\triangle \alpha = 0'',00005,$$

находимъ

$$\log.\ \tfrac{1}{2}\omega = \overline{2},87506$$

$$-\log.\ (M \sin.\ 1'') = 5,67665$$

$$\log.\ \sin.\ 2B = \overline{8},44617$$

$$6,99788$$

$$= \log.\ (0,00099)$$

$$\log.\ \sin.\ 2B = \overline{8},44617$$

$$\log.\ \sin.\ (2A + 2\alpha) = \overline{9},80800$$

$$\log.\ \triangle\alpha = \overline{5},69897$$

$$-\log.\ 4 = \overline{9},39794$$

$$-\log.\ \sin.\ \alpha = 4,44817$$

$$-\log.\ \sin.\ (2A + \alpha) = 0,19205$$

$$\overline{7},99130$$

$$= \log.\ (0,0098)$$

$$\triangle B = 0'',01.$$

151. *Особое рѣшеніе, когда даны* a, b, A, *при томъ* $a > b$, *и требуется найти уголъ* B *весьма близкій къ* $\frac{1}{2}\pi$.

Полагая

$$\frac{b}{a} = \sin.\ (B + \alpha). \tag{121}$$

и въ уравненіи (113) части на двухъ сторонахъ въ первый разъ прикладывая къ $\sin.\ (B + \alpha)$, въ другой вычитая, получимъ

$$\left.\begin{aligned} \sin.\ \tfrac{1}{2}\alpha \cos.\ (B + \tfrac{1}{2}\alpha) &= \sin.\ (B + \alpha) \sin.\ (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A)^2 \\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\alpha \sin.\ (B + \tfrac{1}{2}\alpha) &= \sin.\ (B + \alpha) \cos.\ (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A)^2 \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Отсюда

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha \cot.\ (B + \tfrac{1}{2}\alpha) = \text{tang.}\ (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A)^2. \tag{123}$$

Уравненіе (121) даетъ другое

$$\text{tang.}\,(B+\alpha)=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \tag{124}$$

которое служитъ къ опредѣленію $B+\alpha$ съ точностію

$$\triangle B+\triangle\alpha=\frac{3\ \omega}{2\ M}\sin\,(2\ B+2\ \alpha). \tag{125}$$

Если теперь приближенное значеніе B по способу въ статьѣ 149 найдено, слѣдовательно вспомогательный уголъ α также близко знаемъ изъ уравненія (124), но въ α должны сдѣлать поправку δ, то уравненіе (123) будетъ вѣрно, когда сюда вносимъ $\alpha+\delta$, $B-\delta$ вмѣсто α, B. Итакъ

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\delta)\,\text{cot.}\,(B+\tfrac{1}{2}\alpha-\delta)=\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}A)^2.$$

Пусть D, D' разности, въ логариѳмическихъ таблицахъ отвѣчаютъ тангенсамъ tang. $\frac{1}{2}\alpha$, tang. $(B+\frac{1}{2}\alpha)$, то

$$\text{log. tang.}\,(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\delta)=\text{log. tang.}\,\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\delta\,D$$

$$-\text{log. tang.}\,(B+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\delta)=-\text{log. tang.}\,(B+\tfrac{1}{2}\alpha)+\tfrac{1}{2}\delta\,D'.$$

Послѣ чего съ помощію приближенныхъ значеній B, α находимъ поправку δ въ углѣ α

$$\delta=\frac{2}{D+D'}\left\{2\,\text{log. tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}A)-\text{log.}\,\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}{\text{tang.}\,(B+\frac{1}{2}\alpha)}\right\}.$$

Хотя такимъ образомъ уравненіе (123) будетъ удовлетворено, но въ немъ можетъ скрываться недостатокъ отъ невѣрности таблицъ до 4 ω, по числу всѣхъ логариѳмовъ (ст. 147), и который произведетъ въ углахъ B, α ошибки $\triangle B$, $\triangle\alpha$.

Ихъ опредѣляемъ изъ уравненія (125), и такого

$$\frac{\triangle\alpha}{\sin.\,\alpha}-\frac{2\triangle B+\triangle\alpha}{\sin.\,(2\,B+\alpha)}=-\frac{4\,\omega}{M}$$

гдѣ знакъ отрицательный передъ ω поставленъ съ тѣмъ, чтобы дать самое большое значеніе $\triangle B$, которое находимъ, исключивъ $\triangle\alpha$,

$$\triangle B=\frac{\omega}{M}\left\{\frac{2\sin.\,\alpha\sin.\,(2\,B+\alpha)}{\sin.\,(B+\alpha)\cos.\,B}+3\,\text{tang.}\,B\cos.\,(B+\alpha)\right\}.$$

Между тѣмъ изъ произведенія двухъ уравненій (122) слѣдуетъ

$$\sin.\,\alpha \sin.\,(2\,B + \alpha) = \sin.\,(B + \alpha)^2 \cos.\,A^2.$$

Послѣ чего

$$\triangle B = \frac{2\,\omega}{M} \cdot \frac{\sin.\,(B+\alpha)}{\cos.\,B} \cos.\,A^2 \left\{ 1 + \frac{3 \sin.\,B \cos.\,(B+\alpha)^2}{2 \sin.\,(B+\alpha) \cos.\,A^2} \right\}$$

или

$$\triangle B = \frac{2\,\omega\,b \cos.\,A^2}{a\,M \cos.\,B \cos.\,\varphi^2} \qquad (126)$$

гдѣ

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{\cos.\,A} \sqrt{\frac{3 \sin.\,B\,(a^2 - b^2)}{2\,a\,b}}.$$

Напримѣръ

$$a = 6{,}87020$$

$$b = 6{,}81345$$

$$A = 81^\circ\ 21'\ 5''{,}31.$$

По способу въ статьѣ 149 вычисляемъ

$$\log.\,b = 0{,}8333671$$

$$-\log.\,a = \bar{9}{,}1630306$$

$$\log.\sin.\,A = \bar{9}{,}9950335$$

$$\log.\sin.\,B = \overline{\bar{9}{,}9914312}$$

$$B = 78^\circ\ 39'\ 20''{,}70$$

$$\log.\,4\,\omega = \bar{3}{,}30103$$

$$-\log.\,(M \sin.\,1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\,\text{tang.}\,B = 0{,}81793$$

$$\overline{\bar{9}{,}29561} = \log.\,(0{,}1975).$$

Итакъ въ этомъ значеніи B можемъ быть увѣрены только до $0''$, 2. Чтобы достигнуть болѣе точности, почитаемъ отысканное значеніе B приближеннымъ. По способу въ этой статьѣ находимъ

$$-\tfrac{1}{2}\log.(a^2-b^2) = 0{,}0549161$$
$$\log. b = 0{,}8333671$$
$$\log.\operatorname{tang.}(B+\alpha) = 0{,}8882832$$
$$B+\alpha = 82^\circ\ 37'\ 49'', 97.$$

Послѣ чего приближенное значеніе для α принимаемъ

$$\alpha = 3^\circ\ 58'\ 28''$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 1^\circ\ 59'\ 14''.$$

Предполагая въ α поправку δ секундъ, слѣдовательно $-\delta$ въ углѣ B, находимъ

$$\log.\operatorname{tang.}(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\delta) = \bar{8}{,}5402980 + 303{,}5.\,\delta$$
$$\log.\operatorname{cot.}(B+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\delta) = \bar{9}{,}2168838 + 65{,}6.\,\delta$$
$$2\log.\operatorname{tang.}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}A) = \bar{7}{,}7571818 + 369{,}1.\,\delta$$
$$= 7{,}7572300.$$

Отсюда

$$369{,}1.\,\delta = 482$$
$$\delta = 1'', 304$$
$$\alpha = 3^\circ\ 58'\ 29'', 304$$
$$B = 78^\circ\ 39'\ 20'', 67.$$

Назначаемъ теперь точность вычисленія для послѣдняго значенія B

$$\log. 3 = 0{,}47712$$
$$\log.\sin. B = \bar{9}{,}99143$$
$$-\log. 2 = \bar{9}{,}69897$$
$$-\log. a = \bar{9}{,}16303$$
$$-\log. b = \bar{9}{,}16663$$
$$\bar{8}{,}49718$$

$$\log. \sqrt{\frac{3 \sin. B}{2 a b}} = \bar{9},24859$$

$$\tfrac{1}{2} \log. \sqrt{a^2 - b^2} = \bar{9},94508$$

$$- \log. \cos. A = 0,82290$$

$$\log. \text{tang. } \varphi = 0,01657$$

$$\varphi = 46^\circ\ 5'\ 28''$$

$$\log. 2\omega = \bar{3},00000$$

$$- \log. (M \sin. 1'') = 5,67665$$

$$2 \log. \cos. A = \bar{8},35420$$

$$- 2 \log. \cos. \varphi = 0,31788$$

$$\log. b = 0,83337$$

$$- \log. a = \bar{9},16303$$

$$- \log. \cos. B = 0,70618$$

$$\bar{8},05131 = \log. (0,0112)$$

$$\Delta B = 0'', 01.$$

Съ приближеніемъ угловъ A, B къ $\frac{1}{2}\pi$, уголъ α дѣлается весьма малымъ. Полагая $A = \frac{1}{2}\pi$, слѣдовательно $\alpha = o$, изъ уравненія (127) находимъ $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, потомъ

$$\frac{\cos. A}{\cos. \varphi} = \sqrt{\frac{3 \sin. B\,(a^2 - b^2)}{2 a b}}.$$

Наконецъ уравненіе (126) даетъ

$$\Delta B = \frac{3\omega}{M} \sin. B^2 \cos. B.$$

Вычисленіе слѣдовательно тѣмъ будетъ вѣрнѣе, чѣмъ B ближе къ $\frac{1}{2}\pi$, тогда какъ по способу въ статьѣ 149 точность уменьшается всегда съ приближеніемъ B къ $\frac{1}{2}\pi$.

152. *Даны* a, b, A; *найти* c, *когда* $a > b$.

Уравненіе (67) представляемъ напередъ въ такомъ видѣ

$$\frac{c}{2\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2c} = \frac{b \cos. A}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Это значитъ (ст. 137)

$$\cot. \Pi\left(\log. \frac{c}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) = \frac{b \cos. A}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

гдѣ $\sqrt{a^2-b^2}$ разумѣемъ числомъ положительнымъ. Между тѣмъ [ст. 137, ур. (62)]

$$\log.\left(\frac{c}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) = \log. \cot. \tfrac{1}{2}\Pi\left(\log. \frac{c}{\sqrt{a^2-b^2}}\right).$$

Итакъ рѣшеніе заключается въ такихъ двухъ уравненіяхъ

$$\left.\begin{aligned} \cot. x &= \frac{b \cos. A}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ c &= \cot. \tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2-b^2} \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

Первое даетъ единственное значеніе x, то самое при которомъ $\cot. \frac{1}{2}x$ положительное число, тогда какъ другое $\pi + x$ (ст. 126) дѣлаетъ $\cot. \frac{1}{2} x$, и слѣдовательно бокъ c, числомъ отрицательнымъ, а потому невозможнымъ.

Ошибка въ x не превосходитъ [ур. (109)]

$$\Delta x = \frac{2\omega}{M} \sin. 2x.$$

Ошибку въ $\log. c$ должны почитать [ур. (106), (108), (109)]

$$\Delta \log. c = 3\omega + \frac{M \Delta x}{\sin. x}.$$

Послѣ чего точность вычисленія

$$\Delta c = \frac{\omega c}{M}(3 + 4 \cos. x)$$

или

$$\triangle c = \frac{3\,\omega\,c}{M \cos.\,\xi^2}$$

гдѣ

$$\text{tang.}\,\xi = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}\cos.\,x}$$

и гдѣ cos. x всегда разумѣть должно положительнымъ числомъ (ст. 147).

Напримѣръ

$$a = 6{,}81345$$

$$b = 2{,}37594$$

$$A = 101^\circ\,20'\,39'',34.$$

Находимъ

$$a + b = 9{,}18939$$

$$a - b = 4{,}43751$$

$$\log.\,(a+b) = 0{,}9632867$$

$$\log.\,(a-b) = 0{,}6471394$$

$$\log.\,(a^2 - b^2) = \overline{1{,}6104261}$$

$$-\log.\sqrt{b^2 - a^2} = 0{,}8052130$$

$$-\log.\,b = \bar{9}{,}6241645$$

$$-\log.\cos.\,A = 0{,}7061887.\;n$$

$$\log.\,\text{tang.}\,x = \overline{1{,}1355662.}\;n$$

$$x = 94^\circ\,11'\,9'',03$$

$$\tfrac{1}{2}x = 47^\circ\,5'\,34'',51$$

$$\log.\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}x = \bar{9}{,}9682437$$

$$\log.\sqrt{a^2 - b^2} = 0{,}8052130$$

$$\log.\,c = \overline{0{,}7734567}$$

$$c = 5{,}93549$$

$$\log.\cos. x = \overline{8}{,}86327$$

$$-\log. 3 = \overline{9}{,}52288$$

$$\log.(\tfrac{1}{3}\cos. x) = \overline{8{,}39615}$$

$$\log.\sqrt{\tfrac{1}{3}\cos. x} = \overline{9}{,}19807$$

$$\log. 2 = 6{,}30103$$

$$\log.\operatorname{tang}.\xi = \overline{9{,}49910}$$

$$\xi = 47^\circ\ 30'\ 50''$$

$$2\log.\cos.\xi = 0{,}04122$$

$$\log 3\omega = \overline{3}{,}17609$$

$$-\log. M = 0{,}36222$$

$$\log. c = 0{,}77346$$

$$\log..\Delta c = \overline{\overline{4}{,}35299}$$

$$\Delta c = 0{,}00000225.$$

153. *Даны* a, b, A; *найти* c *когда* $a = b$.

Уравненіе (67) въ этомъ случаѣ дѣлается

$$c^2 = 2\,b\,c\cos. A$$

и даетъ два значенія: $c = o$, другое

$$c = 2\,b\cos. A.$$

Точность вычисленія

$$\Delta c = \frac{6\,\omega}{M}\,c.$$

Напримѣръ

$$b = 2{,}37594$$

$$A = 78^\circ\ 39'\ 20'', 66$$

$$\log. 2 = 0{,}3010300$$

$$\log. \cos. A = \overline{9}{,}2938133$$

$$\log. b = 0{,}3758355$$

$$\log. c = \overline{\overline{9}{,}9706768}$$

$$c = 0{,}934720$$

$$\log. 4\omega = \overline{3}{,}30103$$

$$-\log. M = 0{,}36222$$

$$\log. c = \overline{9}{,}97068$$

$$\log. \triangle c = \overline{\overline{3}{,}63393}$$

$$\triangle c = 0{,}000004$$

154. *Даны* a, b, A; *найти* c, *когда* $a < b$.

Уравненіе (67) представляемъ напередъ въ такомъ видѣ

$$\frac{c}{2\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2c} = \frac{b \cos. A}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Отсюда

$$\sin. \Pi\left(\log. \frac{c}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right) = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b \cos. A}$$

гдѣ $\sqrt{b^2 - a^2}$ разумѣется положительнымъ числомъ. Между тѣмъ [ур. (62)]

$$\log. \frac{c}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \log. \cot. \tfrac{1}{2} \Pi\left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right).$$

А какъ синусу принадлежитъ два угла, которыхъ сумма π, то рѣшеніе дае

два значенія для c и заключается въ такихъ уравненіяхъ

$$\left.\begin{aligned} \text{sin. } x &= \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b \text{ cos. } A} \\ c &= \text{tang. } \tfrac{1}{2} x \sqrt{b^2 - a^2} \\ c &= \text{cot. } \tfrac{1}{2} x \sqrt{b^2 - a^2} \end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

Ошибка въ x не превзойдетъ [ур. (107)]

$$\Delta x = \frac{4\omega}{M} \text{ tang. } x$$

въ значеніи же c

$$\Delta c = \frac{3\omega}{M} c + \frac{c \Delta x}{\text{sin. } x}$$

и слѣдовательно точность вычисленія

$$\Delta c = \frac{\omega c}{M}\left(3 + \frac{4}{\text{cos. } x}\right) \qquad (130)$$

или

$$\Delta c = \frac{3\omega c}{M \text{ cos. } \xi^2}$$

гдѣ

$$\text{tang. } \xi = \frac{2}{\sqrt{3 \text{ cos. } x}}.$$

Напримѣръ

$$a = 6{,}81345$$

$$b = 6{,}87020$$

$$A = 78^\circ\ 39'\ 20'', 66$$

$$b + a = 13{,}68365$$

$$b - a = 0{,}05675$$

$$\log.\,(b+a) = 1{,}1362020$$

$$\log.\,(b-a) = \bar{8}{,}7539659$$

$$\log.\,(b^2-a^2) = \overline{\bar{9}{,}8901679}$$

$$\log.\,\sqrt{b^2-a^2} = \bar{9}{,}9450839$$

$$-\log.\,b = \bar{9}{,}1630306$$

$$-\log.\cos.\,A = 0{,}7061834$$

$$\log.\sin.\,x = \overline{\bar{9}{,}8143029}$$

$$x = 40^\circ\ 41'\ 45''{,}\ 82$$

$$\tfrac{1}{2}x = 20^\circ\ 20'\ 57''{,}\ 91$$

$$\log.\,\sqrt{b^2-a^2} = \bar{9}{,}9450839$$

$$\log.\cot.\,\tfrac{1}{2}x = 0{,}4307524$$

$$\log.\,c = \overline{0{,}3758363}$$

$$c = 2{,}37594$$

$$\log.\,\sqrt{b^2-a^2} = \bar{9}{,}9450839$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}x = \bar{9}{,}5692476$$

$$\log.\,c = \overline{\bar{9}{,}5143315}$$

$$c = 0{,}326837$$

$$-\log.\,3 = \bar{9}{,}52288$$

$$-\log.\cos.\,x = 0{,}12024$$

$$\overline{\bar{9}{,}64312}$$

$$-\tfrac{1}{2}\log.\,(3\cos.\,x) = \bar{9}{,}82156$$

$$\log.\,2 = 0{,}30103$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\xi = \overline{0{,}12259}$$

$$\xi = 52^\circ\ 58'\ 50''$$

$$-2 \log. \cos. \xi = 0{,}44068$$

$$\log. 3\,\omega = \bar{3}{,}17609$$

$$-\log. M = 0{,}36222$$

$$\overline{3{,}97899}$$

$$\log. c = 0{,}37583$$

$$\bar{3}{,}97899$$

$$\log. \triangle c = \overline{4{,}35482}$$

$$\triangle c = 0{,}0000023$$

$$\log. c = \bar{9}{,}51433$$

$$\bar{3}{,}97899$$

$$\log. \triangle c = \overline{3{,}49332}$$

$$\triangle c = 0{,}00000031$$

Выраженіе (130) для $\triangle c$ показываетъ, что точность вычисленія уменьшается съ приближеніемъ x къ $\frac{1}{2}\pi$. Однакожъ когда x весьма мало разнится съ прямымъ угломъ, то мы видѣли въ статьѣ 149, что положивъ

$$\text{tang.}\, \eta = \text{tang.}\, x \sqrt{\frac{8\,\omega}{M}}$$

можемъ принимать

$$\triangle x = \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\eta \sqrt{\frac{8\,\omega}{M}}$$

и слѣдовательно

$$\triangle c = \frac{3\,\omega\, c}{M \cos. \zeta^3}$$

гдѣ

$$\text{tang.}\, \zeta = \sqrt[4]{\frac{8\,M}{9\,\omega}} \cdot \sqrt{\frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}\eta}{\sin. x}}.$$

Для $x = \frac{1}{2}\pi$, будетъ $y = \frac{1}{2}\pi$; послѣ чего

$$\text{tang.}\,\zeta = \sqrt{\frac{8\,M}{9\,\omega}}.$$

Съ логариѳмами на семь десятичныхъ это даетъ

$$\log.\,8 = 0{,}90309$$

$$\log.\,M = \bar{9}{,}63378$$

$$-\log.\,9\,\omega = 6{,}34679$$

$$\overline{6{,}88766}$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\zeta = 1{,}72191$$

$$\zeta = 88^\circ\,54'\,47''$$

$$-\,2\log.\,\cos.\,\zeta = 3{,}44388$$

$$\log.\,3\,\omega = \bar{3}{,}17609$$

$$-\log.\,M = 0{,}36222$$

$$\overline{6{,}98219}$$

$$\Delta\,c = 0{,}0009598.\;c.$$

Итакъ ошибка въ значеніи c можетъ доходить до тысячной доли, когда уголъ B весьма близокъ къ прямому.

155. *Особое рѣшеніе, когда даны* a, b, A *притомъ* $a < b$, $a > 2\,b\,\sin.\,\frac{1}{2}A$, *требуется найти* c.

Уравненію (67) можемъ дать еще такой видъ

$$(c-b)^2 + 4\,b\,\sin.\,\tfrac{1}{2}A^2\,(c-b) = a^2 - 4\,b^2\,\sin.\,\tfrac{1}{2}A^2. \qquad (131)$$

Потомъ для $a > 2\,b\,\sin.\,\frac{1}{2}A$

$$\frac{c-b}{2\sqrt{a^2 - 4\,b^2\,\sin.\,\frac{1}{2}A^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\,b^2\,\sin.\,\frac{1}{2}A^2}}{2\,(c-b)} = -\frac{2\,b\,\sin.\,\frac{1}{2}A^2}{\sqrt{a^2 - 4\,b^2\,\sin.\,\frac{1}{2}A^2}}.$$

Это значитъ

$$\cot.\,\Pi\left(\log.\frac{\sqrt{a^2-4\,b^2\sin.\,\frac{1}{2}A^2}}{c-b}\right)=\frac{2\,b\sin.\,\frac{1}{2}A^2}{\sqrt{a^2-4\,b^2\sin.\,\frac{1}{2}A^2}}.$$

Тогда какъ

$$\cot.\,\tfrac{1}{2}\Pi\left\{\log.\frac{\sqrt{a^2-4\,b^2\sin.\,\frac{1}{2}A^2}}{c-b}\right\}=\frac{\sqrt{a^2-4\,b^2\sin.\,\frac{1}{2}A^2}}{c-b}.$$

Итакъ рѣшеніе заключается въ уравненіяхъ

$$\left.\begin{aligned}\sin.\,\varphi&=\frac{2\,b}{a}\sin.\,\tfrac{1}{2}A\\ \cot.\,\psi&=\sin.\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{tang.}\,\varphi\\ c&=b+a\cos.\,\varphi\,\mathrm{tang.}\,\tfrac{1}{2}\psi\\ c&=b-a\cos.\,\varphi\cot.\,\tfrac{1}{2}\psi\end{aligned}\right\}\qquad(132)$$

Ошибки вычисленія

$$\Delta\varphi=\frac{5\,\omega}{M}\,\mathrm{tang.}\,\varphi$$

$$\Delta\psi=\frac{3\,\omega}{2\,M}\sin.\,2\,\psi-\Delta\varphi\,\frac{\sin.\,2\,\psi}{\sin.\,2\,\varphi}$$

$$\frac{\Delta c}{c-b}=\frac{4\,\omega}{M}+\Delta\varphi\,\mathrm{tang.}\,\varphi\pm\frac{\Delta\iota}{\sin.\,\psi}$$

Въ послѣднемъ уравненіи верхній знакъ относится къ первому, нижній ко второму значенію c. Отсюда находимъ для перваго значенія

$$\Delta c=\frac{\omega\,(b-c)}{M}\left\{3\cos.\,\psi-1+\frac{10\cos.\,\frac{1}{2}\psi^2}{\cos.\,\varphi^2}\right\}.\qquad(133)$$

Для втораго значенія c, когда $\sin.\,\varphi^2>\cos.\,\psi$

$$\Delta c=\frac{\omega\,(b-c)}{M}\left\{3\cos.\,\psi-1+\frac{10\sin.\,\frac{1}{2}\psi^2}{\cos.\,\varphi^2}\right\}.\qquad(134)$$

Еслижъ $\sin.\varphi^2 = \cos.\psi$, то

$$\triangle c = \frac{\omega(b-c)}{M}(4+3\cos.\psi) \tag{135}$$

и наконецъ когда $\sin.\varphi^2 < \cos.\psi$

$$\triangle c = \frac{\omega(b-c)}{M}\left\{9+3\cos.\psi-\frac{10\sin.\frac{1}{2}\psi^2}{\cos.\varphi^2}\right\}. \tag{136}$$

Напримѣръ

$$a = 3{,}75940$$

$$b = 6{,}81345$$

$$A = 19^\circ\ 59'\ 33''{,}72$$

$$\tfrac{1}{2}A = 9^\circ\ 59'\ 46'{,}86$$

$$\log.\ 2 = 0{,}3010300$$

$$\log.\ b = 0{,}8333671$$

$$-\log.\ a = \overline{9}{,}6241645$$

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}A = \overline{9}{,}2395133$$

$$\log.\sin.\varphi = \overline{\overline{9}{,}9980749}$$

$$\varphi = 84^\circ\ 36'\ 33''{,}16$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = 1{,}0251861$$

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}A = \overline{9}{,}2395133$$

$$\log.\ \text{cot.}\ \psi = \overline{0{,}2646994}$$

$$\psi = 28^\circ\ 30'\ 46''{,}83$$

$$\tfrac{1}{2}\psi = 14^\circ\ 15'\ 53''{,}41$$

$$\log.\ a = 0{,}3758355$$

$$\log.\cos.\varphi = \overline{8}{,}9728887$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\psi = \overline{9}{,}4052495$$

$$\log.(c-b) = \overline{\overline{8}{,}7539737}$$

$$c-b = 0{,}05675$$

$$c = 6{,}87020$$

$$\log. a = 0{,}3758355$$

$$\log. \cos. \varphi = \bar{8}{,}9728887$$

$$\log. \cot. \tfrac{1}{2}\psi = 0{,}5947595$$

$$\log. (c - b) = \overline{\bar{9}{,}9434747}$$

$$c - b = 0{,}87796$$

$$c = 5{,}93549.$$

Точность вычисленія для перваго значенія c [ур. (139)]

$$\log. \cos. \psi = \bar{9}{,}94377$$

$$\log. 3 = 0{,}47712$$

$$\overline{0{,}42089}$$

$$= \log. (2{,}635)$$

$$\log. \cos. \tfrac{1}{2}\psi = \bar{9}{,}98640$$

$$2 \log. \cos. \tfrac{1}{2}\psi = \bar{9}{,}97280$$

$$-2 \log. \cos. \psi = 2{,}05422$$

$$\log. 10 = 1{,}00000$$

$$\overline{3{,}02702}$$

$$= \log. (1064{,}2)$$

$$\log. (1065{,}8) = 3{,}02768$$

$$\log. c = 8{,}75397$$

$$-\log. M = 0{,}36222$$

$$\log. \omega = \bar{2}{,}69897$$

$$\overline{\bar{4}{,}84284}$$

$$= \log. (0{,}000006963)$$

$$\triangle c = 0{,}000007.$$

Точность вычисленія для втораго значенія c, гдѣ $\sin.\varphi^2 > \cos.\psi$ [ур. (134)]

$$2\log.\sin.\tfrac{1}{2}\psi = \overline{9},39162$$

$$-2\log.\cos.\varphi = 2,03422$$

$$\log.10 = 1,00000$$

$$1,81746$$

$$= \log.(65,685)$$

$$\log.(67,320) = 1,82814$$

$$-\log.M = 0,36222$$

$$\log.\omega = \overline{2},69847$$

$$\log.(c-b) = \overline{9},94347$$

$$\overline{4},83830$$

$$= \log.(0,000006797)$$

$$\triangle c = 0,000007$$

156. *Особое рѣшеніе, когда даны a, b, A, притомъ $a < b$, $a < 2b\sin.\frac{1}{2}A$; требуется найти c.*

Уравненіе (131) перемѣняемъ на такое

$$\frac{b-c}{2\sqrt{4b^2\sin.\frac{1}{2}A^2 - a^2}} + \frac{\sqrt{4b^2\sin.\frac{1}{2}A^2 - a^2}}{2(b-c)} = \frac{2b\sin.\frac{1}{2}A^2}{\sqrt{4b^2\sin.\frac{1}{2}A^2 - a^2}}.$$

Это значитъ

$$\sin.\Pi\left(\log.\frac{b-c}{\sqrt{4b^2\sin.\frac{1}{2}A^2 - a^2}}\right) = \frac{\sqrt{4b^2\sin.\frac{1}{2}A^2 - a^2}}{2b\sin.\frac{1}{2}A^2}.$$

Между тѣмъ какъ

$$\cot.\tfrac{1}{2}\Pi\left(\log.\frac{b-c}{\sqrt{4b^2\sin.\frac{1}{2}A^2 - a^2}}\right) = \frac{b-c}{\sqrt{4b^2\sin.\frac{1}{2}A^2 - a^2}}$$

и слѣдовательно рѣшеніе заключается въ уравненіяхъ

$$\left.\begin{aligned} \cos.\,\varphi &= \frac{a}{2\,b\,\sin.\,\tfrac{1}{2}A} \\ \sin.\,\psi &= \frac{\sin.\,\varphi}{\sin.\,\tfrac{1}{2}A} \\ c &= b - a\,\tang.\,\varphi\,\tang.\,\tfrac{1}{2}\psi \\ c &= b - a\,\tang.\,\varphi\,\cot.\,\tfrac{1}{2}\psi \end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

Ошибки вычисленій могутъ быть

$$\triangle\varphi = \frac{5\,\omega}{M}\cot.\,\varphi$$

$$\triangle\psi = \frac{3\,\omega}{M}\tang.\,\psi + \triangle\varphi\,\cot.\,\varphi\,\tang.\,\psi.$$

Наконецъ въ большомъ значеніи c

$$\triangle c = (b-c)\left\{\frac{4\,\omega}{M} + \frac{2\,\triangle\varphi}{\sin.\,\varphi} + \frac{\triangle\psi}{\sin.\,\psi}\right\}$$

въ меньшомъ значеніи

$$\triangle c = (b-c)\left\{\frac{4\,\omega}{M} + \frac{2\,\triangle\varphi}{\sin.\,\varphi} - \frac{\triangle\psi}{\sin.\,\psi}\right\}.$$

Куда вставляя $\triangle\varphi, \triangle\psi$ заключаемъ о точности

$$\triangle c = \frac{\omega\,(b-c)}{M}\left\{4 + 10\,\cot.\,\varphi^2 + \frac{\sin.\,\tfrac{1}{2}A}{\cos.\,\psi}(3 + 5\,\cot.\,\varphi^2)\right\}$$

$$\triangle c = \frac{\omega\,(b-c)}{M}\left\{4 + 10\,\cot.\,\varphi^2 - \frac{\sin.\,\tfrac{1}{2}A}{\cos.\,\psi}(3 + 5\,\cot.\,\varphi^2)\right\}.$$

Изъ уравненій (137) второе можно замѣнить еще такимъ

$$\tang.\,\psi = \frac{\sin.\,\varphi}{\sqrt{\sin.\,(\tfrac{1}{2}A + \varphi)\,\sin.\,(\tfrac{1}{2}A - \varphi)}} \qquad (138)$$

и которое даетъ ошибку въ углѣ ψ

$$\triangle\psi = \frac{3\,\omega}{2\,M}\sin.\,2\,\psi + \triangle\varphi\,\cot.\,\varphi\,\tang.\,\psi.$$

Послѣ чего ошибки въ двухъ значеніяхъ c

$$\triangle c = \frac{\omega\,(b-c)}{M}\left\{ 4 + 10\cot.\varphi^2 + 3\sin.\varphi + \frac{5\sin.\frac{1}{2}A}{\cos.\psi}\cot.\varphi^2 \right\}$$

$$\triangle c = \frac{\omega\,(b-c)}{M}\left\{ 4 + 10\cot.\varphi^2 - 3\sin.\varphi - \frac{5\sin.\frac{1}{2}A}{\cos.\psi}\cot.\varphi^2 \right\}.$$

Надобно замѣтить, что здѣсь первый членъ

$$\frac{4\,\omega\,(b-c)}{M}$$

можетъ быть взятъ съ произвольнымъ знакомъ, чтобъ увеличить значеніе ошибки.

Это рѣшеніе выгоднѣе прежняго (ст. 154), какъ скоро $b-c$ весьма малое число, даже съ угломъ B въ треугольникѣ весьма близкимъ къ прямому. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ φ переходитъ въ $\frac{1}{2}A$, ψ въ $\frac{1}{2}\pi$. Уравненіе (138) назначаетъ ошибку въ ψ отъ педостатка въ логариѳмахъ и при невѣрности въ углѣ φ

$$\log.\left\{\text{tang.}\,(\psi+\triangle\psi)\cot.\psi\right\} = \triangle\varphi\,[\cot.\varphi - \tfrac{1}{2}\cot.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)]$$

$$-\tfrac{1}{2}\log.\frac{\sin.(\frac{1}{2}A-\varphi-\triangle\varphi)}{\sin.(\frac{1}{2}A-\varphi)} + 3\,\omega.$$

Потомъ

$$\tfrac{1}{2}\log.\frac{(1+\triangle\psi\cot.\psi)^2\left\{\sin.(\frac{1}{2}A-\varphi)-\triangle\varphi\cos.(\frac{1}{2}A-\varphi)\right\}}{(1-\triangle\psi\cot.\psi)^2\sin.(\frac{1}{2}A-\varphi)} =$$

$$3\,\omega + \triangle\varphi\,[\cot.\varphi - \tfrac{1}{2}\cot.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)]$$

или весьма близко

$$\log.\frac{\sqrt{\sin.(\frac{1}{2}A+\varphi)\,[\sin.(\frac{1}{2}A-\varphi)-\triangle\varphi\cos.(\frac{1}{2}A-\varphi)]}}{\sin.\frac{1}{2}A\left(\cos.\psi-\frac{\triangle\psi}{\sin.\psi}\right)} =$$

$$3\,\omega + \triangle\varphi\,[\cot.\varphi - \tfrac{1}{2}\cot.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)].$$

Отъ логарифмовъ переходя къ числамъ, можемъ безъ чувствительной разности принимать

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\left(\cos.\psi-\frac{\triangle\psi}{\sin.\psi}\right) = \left\{1-\frac{3\,\omega}{M}-\triangle\varphi\,[\cot.\varphi - \tfrac{1}{2}\cot.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)]\right\}\sqrt{\sin.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)\,[\sin.(\tfrac{1}{2}A-\varphi)-\triangle\varphi\cos.(\tfrac{1}{2}A-\varphi)]}$$

или даже

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\left(\cos.\psi-\frac{\triangle\psi}{\sin.\psi}\right)=$$

$$\sqrt{\sin.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)\,[\sin.(\tfrac{1}{2}A-\varphi)-\triangle\varphi\cos.(\tfrac{1}{2}A-\varphi)]}$$

тѣмъ болѣе

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\left(\cos.\psi-\frac{\triangle\psi}{\sin.\psi}\right)=$$

$$\sqrt{\sin.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)}\left\{\sqrt{\sin.(\tfrac{1}{2}A-\varphi)}+\sqrt{\triangle\varphi\cos.(\tfrac{1}{2}A-\varphi)}\right\}.$$

Отсюда

$$\triangle\psi=\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}A}\sqrt{\triangle\varphi\sin.(\tfrac{1}{2}A+\varphi)\cos.(\tfrac{1}{2}A-\varphi)}.$$

Для $\varphi=\frac{1}{2}A$, $\psi=\frac{1}{2}\pi$

$$\triangle\psi=\sqrt{2\triangle\varphi\cot.\tfrac{1}{2}A}$$

наконецъ

$$\triangle c=(b-c)\cot.\tfrac{1}{2}A\left(\frac{10\omega}{M}+\sqrt{\frac{10\omega}{M}}\right)$$

или

$$\triangle c=a\left\{\frac{10\omega}{M}+\sqrt{\frac{10\omega}{M}}\right\}$$

слѣдовательно почти

$$\triangle c=c.\,\text{tang.}\,A\sqrt{\frac{10\omega}{M}}.$$

Между тѣмъ какъ по способу въ статьѣ 154, когда $B=\frac{1}{2}\pi$, ошибка въ c могла выходить

$$\triangle c=c\sqrt{\frac{8\omega}{M}}$$

всякій разъ болѣе, какъ скоро

$$\text{tang.}\,A<\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

157. Впрочемъ рѣшеніе предъидущей задачи можетъ быть соединено съ рѣшеніемъ, когда при тѣхъ же данныхъ отыскиваемъ уголъ B (ст. 149), который предположивъ извѣстнымъ, получимъ [ур. (68)]

$$c = a\frac{\sin.\ C}{\sin.\ A}$$

или (ст. 149)

$$c = a\frac{\sin.\ (A+B)}{\sin.\ A} \tag{139}$$

ошибка въ c

$$\triangle c = \frac{4\,\omega\,c}{M} + c\,\triangle B\,\cot.\,(A+B). \tag{140}$$

Куда вставляя значеніе $\triangle B$ [ур. (114)], опредѣляемъ точность вычисленія

$$\triangle c = \frac{4\,\omega\,c}{M}\{1 + \text{tang.}\,B\,\text{tang.}\,C\}. \tag{141}$$

Здѣсь tang.Btang$C$ принимается всегда положительнымъ числомъ и слѣдовательно для $B < \frac{1}{2}\pi$, $C < \frac{1}{2}\pi$

$$\triangle c = \frac{4\,\omega\,c\,\sin.\,A}{M\,\cos.\,B\,\sin.\,C}.$$

Еслижъ $B < \frac{1}{2}\pi$, $C > \frac{1}{2}\pi$, или $B > \frac{1}{2}\pi$, $C < \frac{1}{2}\pi$, то

$$\triangle c = \frac{4\,\omega\,c\,\sin.\,(B-C)}{M\,\cos.\,B\,\sin.\,C}.$$

По способамъ въ статьяхъ 152 и 154 найдено было c съ точностію, для которой выраженіе, когда сюда внесемъ значеніе вспомогательнаго x, дѣлается такимъ

$$\triangle c = \frac{\omega\,c}{M}(3 + 4\,\cot.\,A\,\text{tang.}\,B) \tag{142}$$

и гдѣ $\cot.\,A\,\text{tang.}\,B$ должно всегда принимать за положительное число. Теперь нетрудно заключить, что послѣднее рѣшеніе всякій разъ выгоднѣе, нежели прежнія въ статьяхъ 152 и 154, какъ скоро

$$\frac{4\,b\,(c\,\cos.\,A - a\,\cos.\,C)}{a\,c\,\cos.\,B} > 1$$

гдѣ cos.A, cos. B, cos. C расматриваются числами положительными. Вставляя значенія cos. A, cos. C, получимъ

$$(b^2 + c^2 - a^2) \mp (a^2 + b^2 - c^2) > \tfrac{1}{2} a\, c \cos. B.$$

Итакъ послѣднее рѣшеніе предпочитается прежнимъ, если

$$\cos. A \cos. C > o$$

$$4\,(c^2 - a^2) > a\, c \cos. B$$

или

$$\cos. A \cos. C < o$$

$$4\, b^2 > a\, c \cos. B$$

и когда въ числахъ $c^2 - a^2$, cos. B знаки не принимаются въ разсужденіе.

Для примѣра беремъ

$$a = 2{,}37594$$

$$b = 6{,}81345$$

$$A = 19^\circ\ 59'\ 33'', 72.$$

По способу въ статьѣ 154 вычисляемъ

$$b + a = 9{,}18939$$

$$b - a = 4{,}43751$$

$$\log. (b + a) = 0{,}9632867$$

$$\log. (b - a) = 0{,}6471394$$

$$\log. (b^2 - a^2) = 1{,}6104261$$

$$\log. \sqrt{b^2 - a^2} = 0{,}8052130$$

$$-\log. b = \overline{9}{,}1666329$$

$$-\log. \cos. A = 0{,}0269941$$

$$\log. \sin. x = \overline{\overline{9}{,}9988400}$$

$$x = 85^\circ\ 48'\ 51'', 33$$

$$\tfrac{1}{2} x = 42^\circ\ 54'\ 25'', 66$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,x = \bar{9},9682443$$

$$\log.\ \sqrt{b^2 - a^2} = 0,8052130$$

$$\log.\ c = \overline{0,7734573}$$

$$c = 5,93550$$

$$\log.\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\,x = 0,0317557$$

$$\log.\ \sqrt{b^2 - a^2} = 0,8052130$$

$$\log.\ c = \overline{0,8369687}$$

$$c = 6,87019.$$

Точность вычисленія для перваго значенія

$$-\log.\ \cos.\ x = 1,13661$$

$$-\log.\ 3 = \bar{9},52288$$

$$-\log.\ (3\ \cos.\ x) = \overline{0,65949}$$

$$-\log.\ \sqrt{3\ \cos.\ x} = 0,32924$$

$$\log.\ 2 = 0,30103$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \xi = 0,63027$$

$$\xi = 76^\circ\ 48'\ 50''$$

$$-2\ \log.\ \cos.\ \xi = 1,28370$$

$$\log.\ 3\ \omega = \bar{3},17609$$

$$-\log.\ M = 0,36222$$

$$\overline{\bar{4},82201}$$

$$\log.\left(\frac{3\ \omega}{M\ \cos.\ \xi^2}\right) = \bar{4},82201$$

$$\log.\ c = 0,77346$$

$$\log.\ \Delta\ c = \overline{\bar{5},59547}$$

$$\Delta\ c = 0,00003939$$

Для втораго значенія c

$$\log.\left(\frac{3\,\omega}{M\cos.\,\xi^2}\right) = \bar{4},82201$$

$$\log.\,c = 0,83697$$

$$\log.\,\triangle\,c = \bar{5},65898$$

$$\triangle\,c = 0,0000456$$

Находится теперь уголъ B [урав. (113)]

$$\log.\sin.\,A = \bar{9},5338996$$

$$\log.\,b = 0,8333671$$

$$-\log.\,a = \bar{9},6241645$$

$$\log.\sin.\,B = \bar{9},9914312$$

Отсюда (ст. 149)

$$B = 78^\circ\,39'\,20'',70$$

$$B = 101^\circ\,20'\,39'',30$$

и также для третьяго угла

$$C = 58^\circ\,39'\,46'',98$$

$$C = 81^\circ\,21'\,5'',58.$$

Такія значенія удовлетворяютъ условіямъ

$$\cos.\,A\cos.\,C > o$$

$$4\,(c^2 - a^2) > a\,c\cos.\,B;$$

слѣдовательно послѣдній способъ рѣшенія долженъ быть выгоднѣе. Дѣйствительно, когда

$$B = 78^\circ\,39'\,20'',70$$

$$C = 53^\circ\,39'\,46'',98$$

то

$$\log.\ a = 0{,}3758355$$

$$\log.\ \sin.\ C = \overline{9}{,}9315207$$

$$-\log.\ \sin.\ A = 0{,}4661004$$

$$\log.\ c = 0{,}7734566$$

$$c = 5{,}93549$$

$$\log.\ 4\,\omega = \overline{3}{,}60206$$

$$-\log.\ M = 0{,}36222$$

$$-\log.\ \cos.\ B = 0{,}69418$$

$$\log.\ \sin.\ (B - C) = \overline{9}{,}83117$$

$$-\log.\ \sin.\ C = 0{,}06848$$

$$\log.\ c = 0{,}77346$$

$$\log.\ \Delta\ c = \overline{\overline{5}{,}33157}$$

$$\Delta\ c = 0{,}0000215.$$

Принимая

$$B = 101^\circ\ 20'\ 39'',\ 30$$

$$C = 81^\circ\ 21'\ 5'',\ 58,$$

получимъ

$$\log.\ a = 0{,}3758355$$

$$\log.\ \sin.\ C = \overline{9}{,}9950336$$

$$-\log.\ \sin.\ A = 0{,}4661004$$

$$\log.\ C = \overline{0{,}8369695}$$

$$c = 6{,}87020$$

$$\log. 4\,\omega = \bar{3},60206$$

$$-\log. M = 0,36222$$

$$-\log. \cos. B = 0,69418$$

$$\log. \sin. A = \bar{9},53390$$

$$-\log. \sin. C = 0,00496$$

$$\log. c = 0,83697$$

$$\log. \Delta c = \overline{\overline{5,09431}}$$

$$\Delta c = 0,00001082.$$

Вообще для всякой ошибки ΔB въ углѣ B, ошибка Δc, по способу въ этой статьѣ, должна быть [урав. (140)]

$$\Delta c = \frac{4\,c\,\omega}{M} + \Delta B \cot. C.$$

По способамъ въ статьяхъ 152 и 154 [ур. 142)]

$$\Delta c = \frac{3\,c\,\omega}{M} + \Delta B \cot. A.$$

Итакъ послѣднее наше рѣшеніе выгоднѣе, когда

$$\cot. C < \cot. A - \frac{\omega}{M\,\Delta B}$$

условіе, которое для B весьма близкаго къ $\frac{1}{2}\pi$, дѣлается почти такимъ

$$A < \tfrac{1}{4}\pi.$$

Въ этомъ случаѣ рѣшеніе будетъ заключаться въ уравненіяхъ [ур. (116), (117), (139)]

$$\text{tang.}\,(A+\alpha) = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

$$\text{tang.}\,B = \frac{\sin. A}{\sqrt{\sin.\alpha \sin.(2A+\alpha)}}$$

$$c = a\,\frac{\sin. C}{\sin. A}.$$

Точность вычисленія назначаемъ [ур. (120)]

$$\text{tang. } \xi = \frac{\cos. (A + \alpha)}{\cos. B}$$

$$\text{tang. } \varphi = \frac{1}{\cos. \xi} \sqrt{\frac{6\,\omega}{M}}$$

$$\text{tang. } \eta = \sqrt{\frac{\sin. B}{\sin. \xi} \text{tang. } \tfrac{1}{2}\varphi \cos. (A + \alpha) \cot. C \sqrt{\frac{3\,M}{8\,\omega}}}$$

$$\triangle c = \frac{4\,c\,\omega}{M \cos. \eta^2}.$$

Для $B = \frac{1}{2}\pi$ дѣлается

$$\text{tang. } \eta = \sqrt{\sin. A \sqrt{\frac{3\,M}{8\,\omega}}}$$

$$\triangle c = \frac{4\,c\,\omega}{M \cos. \eta^2}.$$

Это значитъ

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{4\,\omega}{M} + \sin. A \sqrt{\frac{6\,\omega}{M}}.$$

Съ таблицами логарифмовъ на семь десятичныхъ будетъ

$$\frac{\triangle c}{c} = 0{,}000000921 + 0{,}002628. \sin. A.$$

Такимъ образомъ точность вычисленія зависитъ отъ угла A. Она бываетъ достаточна, даже для $B = \frac{1}{2}\pi$, когда A весьма малый уголъ. Иначе должно прибѣгать къ таблицѣ тангенсовъ въ статьѣ 150, чтобы найти напередъ уголъ α, потомъ B, въ которомъ ошибка $\triangle B$ зависитъ отъ $\triangle\alpha$, именно

$$\triangle B = \frac{3\,\omega}{2\,M} \sin. 2B + \frac{\sin. 2B \sin. (2A + 2\alpha)}{4 \sin. \alpha \sin. (2A + \alpha)} \triangle\alpha$$

или для B весьма близкаго къ прямому

$$\triangle B = \frac{\sin. B \cos. B \sin. (A + 2\alpha)}{2 \sin. \alpha \sin. (2A + \alpha)} \triangle\alpha$$

наконецъ

$$\triangle B = \frac{\sin. B^2 \sin. (2A + 2\alpha)}{2 \sin. A \sqrt{\sin. \alpha \sin. (2A + \alpha)}} \triangle \alpha$$

$$\triangle c = \frac{4 c \omega}{M} + \frac{\sin. B^2 \sin. (2A + 2\alpha) \cot. C}{2 \sin. A \sqrt{\sin. \alpha \sin. (2A + \alpha)}} \triangle \alpha$$

или безъ чувствительной разности

$$\triangle c = c \triangle \alpha \sqrt{\frac{\tang. A}{2 \sin. \alpha}}.$$

158. *Даются* a, b, C, *требуется найти* A, B.

Изъ уравненія (68)

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin. A}{\sin. B}$$

выводимъ

$$a + b = \frac{2b}{\sin. B} \sin. \tfrac{1}{2}(A + B) \cos. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$a - b = \frac{2b}{\sin. B} \cos. \tfrac{1}{2}(A + B) \sin. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

потомъ

$$\frac{a + b}{a - b} = \tang. \tfrac{1}{2}(A + B) \cot. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

а какъ $A + B + C = \pi$, то рѣшеніе заключается въ такихъ уравненіяхъ

$$\left.\begin{aligned} A + B &= \pi - C \\ \tang. \tfrac{1}{2}(A - B) &= \frac{a - b}{a + b} \cot. \tfrac{1}{2} C \end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

Ошибки могутъ быть допущены

$$\triangle A + \triangle B = o$$

$$\triangle A - \triangle B = \frac{4\omega}{M} \sin. (A - B)$$

и слѣдовательно точность вычисленія

$$\triangle A = \frac{2\,\omega}{M} \sin.\,(A - B)$$

$$\triangle B = \frac{2\,\omega}{M} \sin.\,(A - B).$$

Напримѣръ

$$a = 6{,}81345$$

$$b = 2{,}37594$$

$$C = 58^\circ\ 39'\ 46'', 4$$

Вычисляемъ

$$a + b = 9{,}18939$$

$$a - b = 4{,}43751$$

$$\tfrac{1}{2}\,C = 29^\circ\ 19'\ 53''\ 47$$

$$\log.\,(a - b) = 0{,}6471394$$

$$\log.\,(a + b) = 9{,}0367133$$

$$\log.\,\cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = 0{,}2503430$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,(A - B) = \overline{9{,}9341957}$$

$$\tfrac{1}{2}\,(A - B) = 40^\circ\ 40'\ 32'', 84$$

$$\tfrac{1}{2}\,(A + B) = 60^\circ\ 40'\ \ 6'', 53$$

$$A = 101^\circ\ 20'\ 39'', 37$$

$$B = \ \ 19^\circ\ 59'\ 33'', 69.$$

Точность вычисленія

$$\log.\,2\,\omega = \overline{3{,}00000}$$

$$-\log.\,\sin.\,(A - B) = \overline{9{,}99503}$$

$$-\log.\,(M \sin.\,1'') = 5{,}67655$$

$$\log.\,\triangle A = \overline{8{,}67168}$$

$$\triangle A = 0'', 047$$

$$\triangle B = 0'', 047.$$

Изъ уравненій (143) второе для $b > a$ должно быть

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(B-A) = \frac{b-a}{b+a}\cot.\,\tfrac{1}{2}C.$$

Уравненія (143) во всякомъ случаѣ даютъ угламъ A, B единственныя значенія. Дѣйствительно, когда называемъ x найденный уголъ $\frac{1}{2}(A-B)$ въ таблицахъ, слѣдовательно $x > o, < \frac{1}{2}\pi$, то можемъ допускать при томъ же тангенсѣ (ст. 126),

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = \pi + x$$

или

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = x - \pi.$$

Въ первомъ случаѣ

$$A = 2\pi + 2x + B$$

тогда какъ должно быть $A < \pi$ (ст. 45). Во второмъ случаѣ

$$B = 2\pi - 2x + A.$$

Откуда $B > \pi$ въ противность статьѣ 45.

159. *Даются* a, b, C; *найти* c, *когда* $C > \frac{1}{2}\pi$.

Уравненію [ур. (67)]

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos.\,C \qquad (144)$$

даемъ напередъ такой видъ

$$c = (a-b)^2 + 4ab\sin.\,\tfrac{1}{2}C^2$$

потомъ полагая

$$\text{tang.}\,x = \frac{2\sin.\,\frac{C}{2}}{a-b}\sqrt{ab}, \qquad (145)$$

получимъ

$$c = \frac{a-b}{\cos.\,x}.$$

Это рѣшеніе, какъ увидимъ ниже, бываетъ вѣрнѣе другаго, когда C уголъ острый.

Здѣсь ошибки вычисленія

$$\triangle x = \frac{5\,\omega}{M} \text{ sin. } x \text{ cos. } x$$

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{3\,\omega}{M} + \triangle x \text{ tang. } x \qquad (146)$$

и слѣдовательно точность вычисленія

$$\triangle c = \frac{3\,c\,\omega}{M \text{ cos. } \xi^2}$$

гдѣ

$$\text{tang. } \xi = \text{sin. } x \sqrt{\tfrac{5}{3}}.$$

Напримѣръ

$$a = 6{,}81345$$

$$b = 2{,}37594$$

$$C = 58^\circ\ 39'\ 46'', 94.$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{2} C = 29^\circ\ 19'\ 53'', 47$$

$$\log. a = 0{,}8333671$$

$$\log. b = 0{,}3758355$$

$$a - b = 4{,}43751$$

$$\log. 2 = 0{,}3010300$$

$$\log. \text{sin. } \tfrac{1}{2} C = \overline{9}{,}6900739$$

$$-\log. (a - b) = \overline{9}{,}3528606$$

$$\log. \sqrt{a\,b} = 0{,}6046013$$

$$\log. \text{tang. } x = \overline{\overline{9}{,}9485658}$$

$$x = 41^\circ\ 36'\ 54'', 32$$

$$\log. (a - b) = 0{,}6471394$$

$$-\log. \text{cos. } x = 0{,}1263172$$

$$\log. c = \overline{0{,}7734566}$$

$$c = 5{,}93549$$

$$\log. 5 = 0{,}69897$$

$$-\log. 3 = \overline{9}{,}52288$$

$$\log. \tfrac{5}{3} = \overline{0{,}22185}$$

$$\log. \sqrt{\tfrac{5}{3}} = 0{,}11092$$

$$\log. \sin. x = \overline{9}{,}82224$$

$$\log. \text{tang.}\, \xi = \overline{\overline{9}{,}93316}$$

$$\xi = 40^\circ\, 36'\, 30''$$

$$-2 \log. \cos. \xi = 0{,}23932$$

$$\log\ 3\,\omega = \overline{3}{,}17609$$

$$-\log. M = 0{,}36222$$

$$\log. c = 0{,}77346$$

$$\log. \triangle c = \overline{\overline{4}{,}55109}$$

$$\triangle c = 0{,}0000036$$

160. Даны a, b, C; найти c, когда $C > \frac{1}{2}\pi$.

Теперь уравненіе (144) перемѣняемъ такъ

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\,a\,b \cos.^2 \tfrac{1}{2} C$$

и полагая

$$\sin. y = \frac{2 \cos. \frac{1}{2} C}{a+b} \sqrt{a\,b}, \qquad (147)$$

получимъ

$$c = (a+b) \cos. y.$$

Ошибки вычисленія

$$\triangle y = \frac{5\,\omega}{M} \text{tang.}\, y$$

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{3\,\omega}{M} + \triangle y \text{ tang.}\, y. \qquad (148)$$

Отсюда

$$\triangle c = \frac{3\,\omega\,c}{M\cos.\,\xi^2}$$

гдѣ

$$\text{tang.}\,\xi = \text{tang.}\,y\sqrt{\tfrac{5}{3}}.$$

Въ этомъ рѣшеніи точность болѣе, нежели въ прежнемъ, какъ скоро значеніе $\triangle c$ здѣсь менѣе, нежели тамъ; когда слѣдовательно

$$\text{tang.}\,y < \sin.\,x.$$

Это въ соединеніи съ уравненіями (144), (145), (146), (147), (148) приводитъ къ заключенію

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}C > 1$$

$$C > \tfrac{1}{4}\pi.$$

Для примѣра возьмемъ

$$a = 5{,}93549$$

$$b = 2{,}37594$$

$$C = 101^\circ\,20'\,39'',34.$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{2}C = 50^\circ\,40'\,19'',67$$

$$a + b = 8{,}31143$$

$$\log.\,a = 0{,}7734566$$

$$\log.\,b = 0{,}3758355$$

$$\log.\,(a\,b) = 1{,}1492921$$

$$\log.\,2 = 0{,}3010300$$

$$\log.\sqrt{a\,b} = 0{,}5746460$$

$$\log.\cos.\tfrac{1}{2}C = \bar{9}{,}8019229$$

$$-\log.\,(a+b) = \overline{9}{,}0803242$$

$$\log.\sin.\,y = \overline{\overline{9}{,}7579231}$$

$$y = 34^\circ\,56'\,18'',04$$

$$\log.\cos. y = \bar{9},9136914$$

$$\log.(a+b) = 0,9196758$$

$$\log. c = \overline{0,8333672}$$

$$c = 6,81345.$$

Точность вычисленія

$$\log.\operatorname{tang}. y = \bar{9},80423$$

$$\log. \sqrt{\tfrac{6}{3}} = 0,11092$$

$$\log.\operatorname{tang}. \xi = \overline{\bar{9},95515}$$

$$\xi = 42^\circ\ 2'\ 50''$$

$$-2\log..\cos. \xi = 0,25850$$

$$\log. 3\,\omega = \bar{3},17609$$

$$-\log. M = 0,36222$$

$$\log. c = 0,83337$$

$$\log.\triangle c = \overline{\bar{4},63048}$$

$$\triangle c = 0,00000427.$$

Когда внесемъ значенія $\triangle x, \triangle y$, то выраженія для $\triangle c$ по способамъ въ двухъ статьяхъ [ур. (146), (148)] будутъ таковы

$$\triangle c = \frac{\omega c}{M}\{3 + 5\sin. x^2\} \qquad (149)$$

$$\triangle c = \frac{\omega c}{M}\{3 + 5\operatorname{tang}. y^2\}. \qquad (150)$$

Изъ перваго видно, что самое большое значеніе для $\triangle c$ будетъ

$$\triangle c = \frac{8\,\omega c}{M}$$

когда x дѣлается $\frac{1}{2}\pi$ для $a = b$ [ур. (145)].

Второе значеніе $\triangle c$ растетъ съ угломъ y. Между тѣмъ уравненіе (147), покуда C тупой уголъ, допускаетъ самое большое значеніе для y вмѣстѣ съ уменьшеніемъ C до $\frac{1}{2}\pi$, именно

$$\text{sin. } y = \frac{\sqrt{2\,a\,b}}{a+b}.$$

Послѣ чего

$$\text{tang. } y^2 = \frac{2\,a\,b}{a^2+b^2}$$

Но какъ всегда

$$a^2 + b^2 \geqq 2\,a\,b$$

то самое большое значеніе tang. y^2 можетъ быть только

$$\text{tang. } y^2 = 1$$

именно въ случаѣ $a = b$, слѣдовательно для $\triangle c$ самое большое значеніе тоже, какъ и выше,

$$\triangle c = \frac{8\,\omega\,c}{M}$$

когда бока a, b треугольника дѣлаются равными. Съ таблицами логариѳмовъ на семъ десятичныхъ это составитъ

$$\log. \frac{\triangle c}{c} = \bar{3},96428$$

$$\triangle c = 0,000000921.\ c.$$

Еслибъ ошибка близкая къ этой почиталось еще чуствительной, то надобно прибѣгнуть къ способамъ, которые далѣе будутъ изложены и которые доставляютъ всегда болѣе точности.

161. *Даются a, b, A; требуется найти c, котораго значеніе извѣстно довольно близко.*

Пусть δ поправка въ приближенномъ значеніи c, такъ что [ур. (112)]

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{(a+c-b+\delta)(b+c-a+\delta)}{(a+b+c+\delta)(a+b-c-\delta)}$$

должно быть вѣрнымъ. Означая $D, E. F, G, H$ разности, которыя въ таблицахъ

отвѣчаютъ лагарѳмамъ отъ

$$(a+c-b),\ (b+c-a),\ (a+b+c),\ (a+b-c)$$

должны получить

$$2\ \text{log. tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C = \text{log.}\left\{\frac{(a+c-b)\,(b+c-a)}{(a+b+c)\,(a+b-c)}\right\} + \delta\,(D+E-F+G).$$

Откуда находимъ поправку

$$\delta = \frac{2\ \text{log. tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C - \text{log.}\left\{\dfrac{(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+b-c)}\right\}}{D+E-F+G}.$$

Если такимъ образомъ найденное значеніе c удовлетворяетъ уравненію

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C^2 = \frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}$$

то ошибка въ c произойдетъ отъ неполноты въ логариѳмахъ, и слѣдовательно

$$\frac{7\ \omega}{2\ M} = \frac{c\,\triangle\,c\,\cdot}{c^2-(a-b)^2} + \frac{c\,\triangle\,c}{(a+b)^2-c^2}$$

$$= \frac{4\,a\,b\,c\,\triangle\,c}{[c^2-(a-b)^2]\,[(a+b)^2-c^2]}.$$

Между тѣмъ [урав. (110), (111)]

$$4\,a^2\,b^2\ \text{sin.}\ C^2 = \left\{c^2-(a-b)^2\right\}\left\{(a+b)^2-c^2\right\}.$$

Послѣ чего

$$\triangle\,c = \frac{7\ \omega}{2\ M}\cdot\frac{a\,b}{c}\ \text{sin.}\ C^2$$

или

$$\triangle\,c = \frac{7\ \omega}{2\ M}\,c.\ \text{sin.}\ A\ \text{sin.}\ B. \qquad (151)$$

Между тѣмъ выраженія (149), (150), когда сюда внесемъ sin. x, tang. y [ур. (145) (147)], дѣлаются

$$\triangle\,c = \frac{\omega\,c}{M}\left\{3+\frac{20\,a\,b}{c^2}\ \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\,C^2\right\}$$

$$\triangle\,c = \frac{\omega\,c}{M}\left\{3+\frac{20\,a\,b}{c^2}\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\,C^2\right\}$$

или въ другомъ видѣ

$$\triangle c = \frac{\omega c}{M}\left\{3 + \frac{5 \sin. A \sin. B}{\cos. \frac{1}{2} C^2}\right\}$$

$$\triangle c = \frac{\omega c}{M}\left\{3 + \frac{5 \sin. A \sin. B}{\sin. \frac{1}{2} C^2}\right\}$$

слѣдовательно во всякомъ случаѣ болѣе, нежели значеніе $\triangle c$ [ур. (151)] по послѣднему способу, который такимъ образомъ, въ отношеніи къ точности, долженъ быть предпочтенъ двумъ прежнимъ [ст. 159, 160].

Пусть напримѣръ даны

$$a = 5{,}93549$$

$$b = 2{,}37594$$

$$C = 101^\circ\ 20'\ 39'', 34$$

и приближенное значеніе

$$c = 6{,}81340.$$

Находимъ δ

$$b + c - a = 3{,}25385$$

$$a + c - b = 10{,}37295$$

$$a + b - c = 1{,}49803$$

$$a + b + c = 15{,}12483$$

$$\log. (a + c - b + \delta) = 1{,}0159023 + \ 4, 2. \delta$$

$$\log. (b + c - a + \delta) = 0{,}5123976 + 13, 3. \delta$$

$$-\log. (a + b + c + \delta) = \bar{8}{,}8203094 - \ 2, 9. \delta$$

$$-\log. (a + b - c - \delta) = \bar{9}{,}8244795 + 29, 0. \delta$$

$$2 \log. \text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \overline{0{,}1730888 + 43, 6. \delta}$$

$$= 0{,}17311088$$

$$220 = 43, 6. \delta$$

$$\delta = 0{,}0000505$$

$$c = 6{,}81345.$$

Точность вычисленія

$$\log. 7\,\omega = \bar{3},54407$$

$$-\log. M = 0,36222$$

$$-\log. 2 = \bar{9},69897$$

$$\log. a = 0,77346$$

$$\log. b = 0,37584$$

$$-\log. c = \bar{9},16663$$

$$2\log. \sin. C = \bar{9},93828$$

$$\log. \triangle c = \overline{\overline{3},85947}$$

$$\triangle c = 0,00000072.$$

162. *Даны* a, b, C; *найти* c, *когда* a, b *почти равны.*

Сперва находимъ A, B (ст. 158)

$$A + B = \pi - C$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b}\cot.\,\tfrac{1}{2} C$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle A = \frac{2\,\omega}{M}\sin.\,(A - B)$$

$$\triangle B = -\frac{2\,\omega}{M}\sin.\,(A - B).$$

Потомъ [ур. (139)]

$$c = a\frac{\sin. C}{\sin. A}$$

$$c = b\frac{\sin. C}{\sin. B}.$$

Отсюда

$$c^2 = a\,b\frac{\sin. C^2}{\sin. A \sin. B}.$$

Ошибка въ c

$$2\frac{\triangle c}{c} = \frac{7\,\omega}{M} + \triangle A \cot. A + \triangle B \cot. B$$

а когда поставимъ значенія $\triangle A, \triangle B$

$$\triangle c = \frac{\omega\, c}{M}\left\{\frac{7}{2} + \frac{\sin.\,(A-B)^2}{\sin. A \sin. B}\right\}.$$

Здѣсь

$$\frac{\sin.\,(A-B)^2}{\sin. A \sin. B}$$

не чувствительно, когда предполагаются a, b почти равными; слѣдовательно можно почитать

$$\triangle c = \frac{7\,\omega\, c}{2\,M}.$$

Такимъ образомъ это рѣшеніе, въ томъ случаѣ который разсматривается, всегда бываетъ вѣрнѣе прежнихъ въ статьяхъ 159 и 160. Еслижъ оно въ точности нѣсколько уступаетъ данному въ предъидущей статьѣ, то съ другой стороны не предполагаетъ приближеннаго значенія c, а также доставляетъ большую выгоду по краткости вычисленія, когда требуется не только найти c, но вмѣстѣ и углы A, B.

Для примѣра беремъ

$$a = 6{,}87020$$
$$b = 6{,}81345$$
$$C = 19^\circ\,59'\,33'',72.$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{2}C = 9^\circ\,59'\,46'',86$$
$$a - b = 0{,}05675$$
$$a + b = 13{,}68365$$
$$\log.\,(a-b) = \overline{8},7539659$$
$$-\log.\,(a+b) = \overline{8},8637980$$
$$\log.\cot.\tfrac{1}{2}C = 0{,}7538431$$
$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \overline{\overline{8},3716070}$$

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 1^\circ\ 20'\ 52'',35$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 80^\circ\ \ 0'\ 13'',14$$

$$A = 81^\circ\ 21'\ \ 5'',49$$

$$B = 78^\circ\ 39'\ 20''\ 79$$

$$\log.\ a = 0{,}8369694$$

$$\log.\ b = 0{,}8333671$$

$$-\log.\ \sin.\ A = 0{,}0049664$$

$$-\log.\ \sin.\ B = 0{,}0085688$$

$$2\log.\ \sin.\ C = \bar{9}{,}1677992$$

$$2\log.\ c = \overline{0{,}7516709}$$

$$\log.\ c = 0{,}3758354$$

$$c = 2{,}37594$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 7\,\omega = \bar{3}{,}54407$$

$$-\log.\ M = 0{,}37222$$

$$-\log.\ 2 = \bar{9}{,}69897$$

$$\log.\ c = 0{,}37583$$

$$\log.\ \triangle c = \overline{\bar{3}{,}98109}$$

$$\triangle c = 0{,}00000096.$$

163. *Даны* $a, B\ C$; *опредѣлить уголъ* A, *бока* b, c.

Уголъ A находимъ

$$A = \pi - B - C.$$

Подобнымъ образомъ третій уголъ всегда будетъ извѣстенъ, когда даны которые нибудь два; затѣмъ b находимъ, также какъ c, именно [ур. (139)]

$$b = a\frac{\sin.\ B}{\sin.\ A}$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle b = \frac{4\,\omega\,b}{M}.$$

Напримѣръ

$$a = 6{,}87020$$

$$B = 78^\circ\ 39'\ 20'', 79$$

$$C = 19^\circ\ 59'\ 33'', 72.$$

Находимъ

$$A = 81^\circ\ 21'\ \ 5'', 49$$

$$\log.\ a = 0{,}8369694$$

$$\log.\ \sin.\ B = \overline{9}{,}9914312$$

$$-\log.\ \sin.\ A = 0{,}0049664$$

$$\log.\ b = \overline{0{,}8333670}$$

$$b = 6{,}81345$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 4\,\omega = \bar{3}{,}30103$$

$$-\log.\ M = 0{,}36222$$

$$\log.\ b = 0{,}83337$$

$$\log.\ \triangle b = \overline{\bar{4}{,}49662}$$

$$\triangle b = 0{,}0000031.$$

164. Назначая точность вычисленія, мы предполагали всѣ случаи неблагопріятными (ст. 147), тогда какъ ошибки въ ихъ соединеніи могутъ быть одна другой противными, слѣдовательно частію по крайней мѣрѣ уничтожаться. Ожидать этого тѣмъ скорѣе должно, чѣмъ болѣе чиселъ складываются; а потому весьма рѣдко бываетъ, чтобы здѣсь невѣрность выходила по возможности самая большая. Итакъ достоинство рѣшенія будетъ опредѣлено вполнѣ тогда только, когда сверхъ точности вычисленія покажемъ, съ какою *вѣроятностію* происходятъ ошибки. Подъ словомъ вѣроятность разумѣютъ содержаніе числа благопріятныхъ случаевъ къ числу всѣхъ случаевъ вмѣстѣ.

Приступая къ изслѣдованію такого предмета, наперед замѣтимъ, что выраженіе

$$p^{\backsim q}$$

которое назовемъ *уступъ*, для всякого числа p и для цѣлаго положительнаго q, будетъ у насъ представлять произведеніе изъ q производителей, именно

$$p\,(p-1)\,(p-2)\ldots(p-q+1).$$

Число q — *показатель уступа*, подобно тому какъ говорятъ, *показатель степени*, когда всѣ производители равны. Къ этому прибавимъ, что всякій разъ уступъ обращается въ единицу, когда показатель нуль, и дѣлается нулемъ, когда показатель отрицательное цѣлое.

Выраженіе

$$p_c^{\backsim q}$$

представляетъ дробь

$$\frac{p\,(p-1)\,(p-2)\ldots(p-q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ .\ .\quad q}$$

которая слѣдовательно можетъ иначе быть написана

$$\frac{p^{\backsim q}}{q^{\backsim q}}.$$

Легко доказать что

$$p^{\backsim q} = (p-1)^{\backsim q} + (p-1)^{\backsim q-1}. \tag{152}$$

Пусть еще $C_r\,(m)$ выражаетъ сумму

$$\Sigma\,(-1)^{\lambda}\,[r-2\,\lambda)\,a+m+r-1-\lambda]_c^{\backsim r-1} r_c^{\backsim \lambda}$$

гдѣ знакъ суммованія относится къ цѣлымъ числамъ λ, отъ $\lambda = o$, покуда

$$\lambda \leqq \frac{r\,a+m+1}{2\,a+1}$$

и гдѣ r, a цѣлыя положительныя, m цѣлое положительное или отрицательное. Такъ напримѣръ для $m \leqq r\,a$

$$\left.\begin{aligned} C_0\,(m) &= o \\ C_1\,(m) &= 1 \\ C_1\,(-m) &= 1 \\ C_2\,(m) &= 2\,a - m + 1 \\ C_2\,(-m) &= 2\,a - m + 1 \end{aligned}\right\} \tag{153}$$

Основываясь на уравненіи (152), находимъ

$$C_r(m+1) = C_r(m) + \Sigma(-1)^\lambda r_c^{\lambda}\,[(r-2\lambda)a + m + r - 1 - \lambda]_c^{r-2}$$

$$= C_r(m) + \Sigma(-1)^\lambda (r-1)_c^{\lambda}\,[(r-2\lambda)a + m + r - 1 - \lambda]_c^{r-2}$$

$$+ \Sigma(-1)^\lambda (r-1)\,[(r_c^{\lambda-1} - 2\lambda)a + m + r - 1 - \lambda]_c^{r-2}$$

$$= C_r(m) + C_{r-1}(a+m) - \Sigma(-1)^\lambda (r-1)_c^{\lambda}\,[(r-2\lambda)a + m - 2a + r - 2 - \lambda]_c^{r-2}$$

Наконецъ

$$C_r(m+1) = C_r(m) + C_{r-1}(a+m+1) - C_{r-1}(m-a). \qquad (154)$$

Выраженію $C_r(m)$ принадлежитъ еще такое свойство

$$C_r(m) = C_r(-m) \qquad (155)$$

которое повѣряется само собой для всякаго r, когда $m = o$, и также на уравненіяхъ (153) для $r = o$, $r = 1$, $r = 2$. Полагаемъ уравненіе (155) вообще справедливымъ для какого нибудь r. Между тѣмъ уравненіе (154) даетъ

$$C_{r+1}(m+1) = C_{r+1}(m) + C_r(a+m+1) - C_r(m-a)$$

$$C_{r+1}(-m) = C_{r+1}(-m-1) + C_r(a-m) - C_r(-m-a-1)$$

$$= C_{r+1}(-m-1) + C_r(m-a) - C_r(m+a+1)$$

Отсюда

$$C_{r+1}(m+1) = C_{r+1}(-m-1) + C_{r+1}(m) - C_{r+1}(-m).$$

Здѣсь ставя вмѣсто m по порядку числа 0, 1, 2 и т. д., заключаемъ что уравненіе (155) должно быть вѣрнымъ и для $r+1$, слѣдовательно для всѣхъ чиселъ r.

Для $r = 2$, $m = 2a$ находимъ

$$C_2(2a) = 1.$$

Для $r = 2$, $m = 2a + \alpha$, гдѣ $\alpha > o$, выраженіе $C_r(m)$ дѣлается

$$C_2(2a+\alpha) = o. \qquad (156)$$

Вообще для всякаго $r > 1$

$$C_r(ra) = 1. \qquad (157)$$

Къ чему легко придти, когда ставимъ — ra вмѣсто m въ общемъ выраженіи для

$C_r(m)$ и пишемъ, основываясь на уравненіи (155),

$$C_r(r\,a) \equiv \Sigma\,(-1)^\lambda\, r_c^{\smile\lambda}\,(r-2\,\lambda\,a-\lambda-1)_c^{\smile r-1}.$$

Ясно, что здѣсь λ можно принимать только нулемъ, слѣдовательно

$$C_r(r\,a) \equiv (r-1)_c^{\smile r-1} \equiv 1.$$

Для всякаго r и для $m > r\,a$ будетъ

$$C_r(m) \equiv o. \qquad (158)$$

Полагаемъ что послѣднее уравненіе справедливо вообще для какого нибудь числа $r > 1$, какъ этому примѣръ видѣли, когда $r{=}2$ [урав. (156)]. Пусть $m{=}ra{+}\alpha$, гдѣ $\alpha > o$. Уравненіе (154) дѣлается

$$C_r(r\,a+\alpha) \equiv C_r(r\,a+\alpha-1) + C_{r-1}[(r+1)\,a+\alpha] - C_{r-1}[(r-1)a+\alpha-1].$$

Здѣсь для $\alpha \equiv 1$, какъ мы доказали,

$$C_r(r\,a) \equiv 1 \qquad C_{r-1}[(r-1)\,a] \equiv 1$$

и какъ предположили

$$C_{r-1}(r\,a+\alpha) \equiv o.$$

Послѣ чего

$$C_r(r\,a+1) \equiv o.$$

Еслижъ $\alpha > 1$, то какъ предположили

$$C_r[(r+1)\,a+\alpha] \equiv o \qquad C_{r-1}[(r-1)\,a+\alpha-1] \equiv o.$$

Послѣ чего

$$C_r(r\,a+\alpha) \equiv C_r(r\,a+\alpha-1).$$

Ставя сюда по порядку $\alpha \equiv 1$, $\alpha \equiv 2$ и т. д., заключаемъ о справедливости уравненія (158).

Обращаемся теперь къ вѣроятности въ ошибкахъ, которыя пусть въ каждомъ значеніи могутъ быть всѣ цѣлыя числа, какъ положительныя такъ отрицательныя, тутъ же самый нуль, начиная съ $+a$ до $-a$, всего слѣдовательно возможныхъ ошибокъ $2\,a+1$. Когда подобныхъ значеній соединяется r, складываясь или вычитаясь одно съ другимъ, то границы самыхъ большихъ ошибокъ должны

быть $+ r\,a$, $- r\,a$; число же всѣхъ

$$(2\,a + 1)^r.$$

Изъ нихъ какая нибудь m, если по величинѣ $m < ra$, встрѣтится нѣсколько разъ въ такомъ числѣ, которое назовемъ *случайность* и которое, какъ сейчасъ будемъ доказывать, должно быть

$$C_r\,(m).$$

Дѣйствительно когда $r = 1$, то каждая ошибка встрѣтится только одинъ разъ, лишь бы по величинѣ было $m \leqq a$, слѣдовательно для такого m

$$C_1\,(m) = 1 \qquad (159)$$

какъ и въ уравненіяхъ (153). Далѣе для всякаго $m = r\,a$ случайность ошибки m должна быть

$$C_r\,(r\,a) = 1$$

согласно съ уравненіемъ (157). А какъ ошибка $m > r\,a$ не возможна, то для такого m

$$C_r\,(m) = o \qquad (160)$$

тоже, какъ было выше [урав. (158)]. Теперь для всѣхъ прочихъ значеній m, r довольно разсмотрѣть только положительныя m, потому что случайность отрицательныхъ ошибокъ таже, что положительныхъ и какъ съ другой стороны тоже было доказано для выраженій $C_r\,(m)$ {урав. (155)}. Итакъ пусть $m < r\,a$ положительное число. Когда $r = 2$, то

$$C_2\,(m) = \Sigma\, C_1\,(p)$$

гдѣ p цѣлыя числа, которыя надобно ставить начиная съ $p = m - a$ до $p = a$. Между тѣмъ для всѣхъ такихъ чиселъ p

$$C_1\,(p) = 1$$

слѣдовательно

$$C_2\,(m) = 2\,a - m + 1$$

также какъ и выше [ур. (153)].

Пусть вообще для $r > 1$ справедливо, что

$$C_r\,(m) = \Sigma\,(-1)^\lambda\, r_c^{\lambda}\, \{(r - 2\,\lambda)\,a + m + r - \lambda - 1\}_c^{r-1} \qquad (161)$$

гдѣ сумма распространяется съ цѣлыми числами λ, отъ $\lambda = o$, покуда

$$\lambda \leqq \frac{r\,a + m + 1}{2\,a + 1}.$$

Переходя къ случайности съ числомъ повтореній $r + 1$ вмѣсто r, должны принимать

$$C_{r+1}(m) = \Sigma\, C_r(p).\, C_1(m - p) \begin{cases} \text{отъ } p = m - a \\ \text{до } p = m + a \end{cases}$$

потому что случайность $C_1(m-p)$ возможныхъ ошибокъ въ границахъ $m-p=+a$, $m - p = -a$ должна помножаться на случайность $C_r(p)$ всѣхъ ошибокъ, между которыми хотя бы встрѣтились и невозможныя внутри границъ $p=m-a, p=m+a$, но какъ случайность такихъ сама собой обращается въ нуль [ур. (160)], то всегда [ур. (159)]

$$C_{r+1}(m) = \Sigma\, C_r(p) \begin{cases} \text{отъ } p = m - a \\ \text{до } p = m + a \end{cases}$$

Внеся значеніе $C_r(p)$ [ур. (161)], потомъ суммуя въ отношеніи къ p, получимъ

$$C_{r+1}(m) = \Sigma\,(-1)^\lambda\, r_c^{\backsim\lambda} \left\{(r - 2\lambda)\,a + p + r - \lambda\right\}_c^{\backsim r} + A$$

гдѣ вмѣсто p должны поставить $m+a$, затѣмъ опредѣлить A такъ, чтобы сумма дѣлалась нулемъ для $p = m - a - 1$ слѣдовательно

$$A = -\Sigma\,(-1)^\lambda\, r_c^{\backsim\lambda} \left\{(r - 2\lambda)\,a + m - a - 1 + r - \lambda\right\}_c^{\backsim r}$$

отъ $\lambda = o$ до [ур. (162)]

$$\lambda \leqq \frac{r\,a + m - a}{2\,a + 1}$$

или съ перемѣной λ на $\lambda - 1$

$$A = \Sigma\,(-1)^\lambda\, [(r + 1 - 2\lambda)\,a + m + r]_c^{\backsim r}\, r_c^{\backsim\lambda - 1}$$

отъ $\lambda = o$ до

$$\lambda \leqq \frac{(r+1)\,a + m + 1}{2\,a + 1}.$$

Послѣ чего

$$C_{r+1}(m) = \Sigma\,(-1)^\lambda\, r_c^{\backsim\lambda} \left\{(r + 1 - 2\lambda)\,a + m + r\right\}_c^{\backsim r}$$
$$+ \Sigma\,(-1)^\lambda\, r_c^{\backsim\lambda - 1} \left\{(r + 1 - 2\lambda)\,a + m + r\right\}_c^{\backsim r}$$

гдѣ границы для λ въ обѣихъ суммахъ тѣже, именно $\lambda = o$ и [ур. (162)]

$$\lambda \leqq \frac{(r+1)\,a + m + 1}{2\,a + 1}.$$

Соединяя двѣ суммы въ одну, получимъ [ур. (152)]

$$C_{r+1}(m) = (-1)^{\lambda}\left\{(r+1-2\lambda)\,a + m + r\right\}_{c}^{\smile r}(r+1)_{c}^{\smile \lambda}$$

тоже выраженіе (161) когда сюда ставимъ $r+1$ вмѣсто r, и которое было доказано для $r = 1, r = 2$, слѣдовательно должно быть вѣрнымъ для всѣхъ цѣлыхъ чиселъ r.

Въ выраженіи (161) ставя $-m$ вмѣсто $+m$ получимъ тоже значеніе для случайности [ур. (155)]

$$C_r(m) = \Sigma\,(-1)^{\lambda}\, r_{c}^{\smile \lambda}\left\{(r-2\lambda)\,a - m + r - 1 - \lambda\right\}_{c}^{\smile r-1}$$

отъ $\lambda = o$ до [ур. (162)

$$\lambda \leqq \frac{r\,a - m + 1}{2\,a + 1}.$$

Соединяя всѣ значенія $C_r(m)$ отъ извѣстнаго m до $m = 1$, находимъ случайность всѣхъ ошибокъ отъ единицы до m

$$\sum_{+1}^{+m} C_r(m) = A - \Sigma\,(-1)^{\lambda}\, r_{c}^{\smile \lambda}\left\{(r-2\lambda)\,a - m + r - \lambda\right\}_{c}^{\smile r}$$

гдѣ постоянное A такъ опредѣляется, чтобы сумма случайностей обращалась въ нуль вмѣстѣ съ $m = o$; слѣдовательно

$$A = \Sigma\,(-1)^{\lambda}\, r_{c}^{\smile \lambda}\left\{(r-2\lambda)\,a + r - \lambda\right\}_{c}^{\smile r}$$

отъ $\lambda = o$ до

$$\lambda \leqq \frac{r\,a + 1}{2\,a + 1}.$$

Послѣ чего

$$\sum_{+1}^{+m} C_r(m) = \Sigma\,(-1)^{\lambda}\, r_{c}^{\smile \lambda}\left\{[r-2\lambda)\,a + r - \lambda]_{c}^{\smile r} - [(r-2\lambda)\,a - m + r - \lambda]_{c}^{\smile r}\right\}.$$

Удвоивъ это значеніе, потомъ прибавя случайность ошибки нуль, получимъ случайность всѣхъ ошибокъ въ границахъ $-m, +m$

$$\sum_{-m}^{+m} C_r(m) = 2\sum(-1)^\lambda r_c^{\backsim\lambda}\{[(r-2\lambda)a+r-\lambda]_c^{\backsim r} - [(r-2\lambda)a-m+r-\lambda]_c^{\backsim r}\}$$

$$+\sum(-1)^\lambda r_c^{\backsim\lambda}\{(r-2\lambda)a+r-\lambda-1\}_c^{\backsim r-1} \qquad (163)$$

гдѣ подъ знакомъ суммы λ растетъ, покуда въ уступѣ не сдѣлается производитель отрицательный.

Для $m = ra$ должно быть

$$(2a+1)^r = \sum(-1)^\lambda r_c^{\backsim\lambda}\{2[(r-2\lambda)a+r-\lambda]_c^{\backsim r}$$

$$+[(r-2\lambda)a+r-\lambda-1]_c^{\backsim r-1}\}. \qquad (164)$$

Вѣроятность ошибокъ, которую означимъ $B_r(m)$, между границъ $+m$, $-m$ будетъ содержаніе случайности всѣхъ такихъ ошибокъ къ числу всѣхъ ошибокъ возможныхъ; слѣдовательно

$$B_r(m) = \frac{1}{(2a+1)^r}\sum_{-m}^{+m} C_r(m).$$

Раздѣливъ уравненія (163), (164) на $(2a+1)^r$, потомъ полагая въ нихъ

$$\frac{m}{ra} = x \qquad a = \infty$$

получимъ

$$B_r(x) = \frac{2}{r^{\backsim r}}\sum(-1)^\lambda r_c^{\backsim\lambda}\left\{\left(\tfrac{1}{2}r-\lambda\right)^r - \left[\tfrac{1}{2}r(1-x)-\lambda\right]^r\right\}$$

$$r^{\backsim r} = 2\sum(-1)^\lambda r_c^{\backsim\lambda}\left(\tfrac{1}{2}r-\lambda\right)^r.$$

Отсюда

$$B_r(x) = 1 - \frac{1}{r^{\backsim r}\,2^{r-1}}\sum(-1)^\lambda r_c^{\backsim\lambda}(r-rx-2\lambda)^r \qquad (165)$$

гдѣ цѣлое λ растетъ, начиная съ $\lambda = o$, покуда $r - rx - 2\lambda$ положительное.

Выраженіе (165) представляетъ такимъ образомъ, для r повтореній, вѣроятность всѣхъ ошибокъ въ границахъ $+x$, $-x$, когда самыя большія по величинѣ не превосходятъ $+1$, -1.

Напримѣръ для $r = 2$ уравненіе (165) дѣлается

$$B_2(x) = 1 - (1-x)^2.$$

Такъ находимъ для числа 2 повтореній

Ошибка.	Вѣроятность.
1,0	1,00
0,9	0,99
0,8	0,96
0,7	0,91
0,6	0,84
0,5	0,75
0,4	0,64
0,3	0,51
0,2	0,36
0,1	0,19
0,0	0,00

Можно слѣдовательно держать 3 противъ 1, что суммѣ двухъ чиселъ принадлежитъ таже точность, какая предполагается въ каждомъ слагаемомъ. Можно держать, даже съ нѣкоторой выгодой, одинъ противъ одного, что въ суммѣ двухъ чиселъ ошибка не превосходитъ трехъ десятыхъ той, какая бы могла выйти самая большая по возможности.

Если въ каждомъ числѣ допускаемъ самую большую ошибку ω, то соединеніе r такихъ чиселъ произведетъ ошибку $r\,\omega\,x$ съ вѣроятностію $B_r(x)$. Напримѣръ для $r = 3$, покуда $x > \frac{1}{3}$ выраженіе (165) даетъ

$$B_3(x) = 1 - \tfrac{9}{8}(1-x)^3.$$

Еслижъ $x < \frac{1}{3}$, то

$$B_3(x) = 1 - \tfrac{9}{8}(1-x)^3 + \tfrac{1}{8}(1-3x)^3.$$

Къ тому принимая

$$\omega = 0{,}00000005$$

находимъ

Ошибка.	Вѣроятность.
0,00000015	1,000
0,00000014	1,000
0,00000013	0,997
0,00000012	0,991
0,00000011	0,980
0,00000010	0,958
0,00000009	0,928
0,00000008	0,886
0,00000007	0,829
0,00000006	0,757
0,00000005	0,667
0,00000004	0,557
0,00000003	0,432
0,00000002	0,295
0,00000001	0,122
0,00000000	0,000

165. Наше разсужденіе объ ошибкахъ вычисленій можетъ быть примѣнено, какъ замѣтили прежде, къ ошибкамъ въ наблюденіяхъ. Онѣ могутъ происходить какъ отъ невѣрности самыхъ орудій, употребляемыхъ въ измѣреніи, такъ отъ неточности въ ихъ установкѣ. Вліяніе тѣхъ и другихъ уменьшаютъ орудія *повторительныя*, какъ устраиваются преимущественно круги, помощію которыхъ измѣреніе дѣлается разъ только, тогда какъ наблюденіе повторяется въ нѣсколько пріемовъ. Раздѣляя величину на число повтореній, получаютъ *среднее наблюденіе*. Отъ орудія сюда войдутъ ошибки только съ крайними наблюденіями; а потому съ большимъ числомъ повтореній, изчезаютъ. Отъ самыхъ наблюденій ошибки, слѣдовательно такія которыя происходятъ отъ недостатка нашихъ чуствъ, повторяясь непрестанно, хотя могутъ оставаться тѣже въ среднемъ выводѣ, но покрайней мѣрѣ различная степень вѣроятности назначаетъ для нихъ извѣстныя границы. Вотъ почему способъ повтореній особенно выгоденъ съ орудіями малаго размѣра, тогда какъ мелкость и вѣрность дѣленія на большихъ, не уменьшая тѣхъ ошибокъ, которыя происходятъ отъ нашихъ чувствъ, можетъ только придавать болѣе вѣроятности въ пользу желаемой точности.

Означая $+1, -1$ самыя большія возможныя ошибки въ среднемъ наблюденіи, вѣроятность всякой ошибки x, внутри такихъ границъ, должны принимать (ур. 165)

$$B_r(x) = 1 - \frac{1}{r^{cxr}\,2^{r-1}} \Sigma (-1)^\lambda\, r_c^{c\lambda} (r - rx - 2\lambda)^r$$

гдѣ цѣлое λ растетъ отъ $\lambda = o$, покуда $r - rx - 2\lambda$ положительное число. Такъ для $r = 10$, $x > 0{,}8$ дѣлается

$$B_{10}(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10}.$$

Для $x > 0{,}6$

$$B_{10}(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181440}.$$

Для $x > 0{,}4$

$$B_{10}(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40320}.$$

Для $x > 0{,}2$

$$B_{10}(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40320} + \frac{(2-5x)^{10}}{15120}.$$

Для $x < 0{,}2$

$$B_{10}(x) = 1 - \frac{390625}{72576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{182440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40320} + \frac{(2-5x)^{10}}{15120} - \frac{(1-5x)^{10}}{8640}.$$

Вычисляя, находимъ

Ошибка.	Вѣроятность.
1,0	1,00000
0,9	1,00000
0,8	1,00000
0,7	0,99968
0,6	0,99944
0,5	0,99506
0,4	0,96179
0,3	0,89910
0,2	0,72220
0,1	0,41096
0,0	0,00000

Можно слѣдовательно держать 9 противъ 1, что послѣ 10 повтореній ошибка въ среднемъ числѣ не превзойдетъ трехъ десятыхъ той, которая бы могла выйти самая большая въ каждомъ наблюденіи. Можно держать 7 противъ 3, что такая ошибка менѣе пятой части той какая бы могла случиться съ однимъ только наблюденіемъ.

166. Такъ какъ данныя треугольники всего чаще бываютъ опредѣлены непосредственнымъ измѣреніемъ; а потому не должны предполагаться строго вѣрными, то весьма важно сдѣлать изъ нихъ выборъ, чтобъ уклоненія не могли произвести большого вліянія на числа искомыя. Зависимость ошибокъ въ этихъ послѣднихъ отъ невѣрности въ измѣреніи находимъ, когда въ уравненіяхъ для прямолинейнаго треугольника [ур. (67), (68), (69)]

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos.\,A \\ a\sin.\,B &= b\sin.\,A \\ \frac{a}{b} &= \cos.\,C + \sin.\,C\cot.\,A \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

разсматриваемъ всѣ величины перемѣнными, допуская въ каждомъ столько малыя приращенія, чтобъ ихъ квадратъ и далѣе степени могли быть пренебрѣгаемы.

Такъ получимъ изъ перваго уравненія (166)

$$a \triangle a = (b - a \cos. A) \triangle b + (c - b \cos. A) \triangle c + b\, c \sin. A \triangle A$$

или [ур. (28)]

$$a \triangle a = a \cos. C \triangle b + a \cos. B \triangle c + b\, c \sin. A \triangle A.$$

Наконецъ раздѣливъ на a,

$$\triangle a = \triangle b \cos. C + \triangle c \cos. B + c \sin. B \triangle A. \tag{167}$$

Изъ уравненій (166) второе даетъ

$$\triangle a \sin. B - \triangle b \sin. A = b \cos. A \triangle A - a \cos. B \triangle B. \tag{168}$$

Изъ уравненій (166) третье

$$\frac{a \triangle b - b \triangle a}{a^2} = \triangle C \{\cos. C \cot. A - \sin. C\} - \frac{\sin. C}{\sin. A^2} \triangle A$$

а послѣ умноженія на $a \sin. A$

$$\triangle b \sin. A - \triangle a \sin. B = a \cos. B \triangle C - c \triangle A. \tag{169}$$

Итакъ если даются a,b,c, то невѣрности въ нихъ $\triangle a, \triangle b, \triangle c$ произведутъ ошибку $\triangle A$ въ A [ур. (167)]

$$\triangle A = \frac{\triangle a - \triangle b \cos. C - \triangle c \cos. B}{c \sin. B}. \tag{170}$$

Если даются a, b, A, то [ур. (167) (169)]

$$\left.\begin{aligned} \triangle c &= \frac{1}{\cos. B}\{\triangle a - \triangle b \cos. C - c \sin. B \triangle A\} \\ \triangle B &= \frac{1}{a \cos. B}\{\triangle a \sin. B - \triangle b \sin A - b \cos. A \triangle A\} \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

Если даются a, b, C, то [ур. (167), (169)]

$$\left.\begin{aligned} \triangle c &= \triangle a \cos. B + \triangle b \cos. A + b \sin. A \triangle C \\ \triangle A &= \tfrac{1}{c}\{\triangle a \sin. B - a \cos. B \triangle c - \triangle b \sin. A\} \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Если даются a, A, B, то [ур. (168), (169)]

$$\left.\begin{aligned} \triangle b &= \frac{1}{\sin. A}\{\triangle a \sin. B + a \cos. B \triangle B - b \cos. A \triangle A\} \\ \triangle c &= \frac{1}{\sin. A}\{\triangle a \sin. C + a \cos. C \triangle B - b \triangle A\} \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

Отсюда легко видѣть, въ чемъ должны состоять условія самыя выгодныя для рѣшенія. Напримѣръ когда даны a, b, A, то бокъ c съ угломъ B тѣмъ вѣрнѣе будутъ отысканы [ур. (171)], чѣмъ уголъ B менѣе; напротивъ ошибка можетъ произойти весьма значительная, какъ скоро B близко къ прямому углу. Тоже бываетъ отъ недостатка вычисленія, какъ видѣли въ статьяхъ 149, 154. Вообще неточность логарифмомъ можетъ быть отнесена къ недостаткамъ въ самыхъ данныхъ, а слѣдовательно невыгодное рѣшеніе въ вычисленіи всякій разъ служитъ признакомъ того, что выборъ уже самыхъ данныхъ не можетъ обѣщать желаемой точности въ опредѣленіи неизвѣстыхъ.

Общія замѣчанія въ правѣ сдѣлать такія.

Когда даны a, b, c, то рѣшеніе тѣмъ выгоднѣе, чѣмъ менѣе перпендикулъ изъ вершины искомаго угла на противоположный бокъ [ур. (170)].

Когда даны a, b, A, то рѣшеніе тѣмъ выгоднѣе, чѣмъ уголъ B или $\pi - B$ менѣе [ур. (171)].

Когда даны a, A, B, то рѣшеніе тѣмъ выгоднѣе, чѣмъ уголъ A ближе къ прямому [ур. (173)].

Когда даны a, b, C, то въ рѣшеніи точность никогда не выходитъ изъ должныхъ границъ [ур. (172)].

Если самыя большія ошибки въ данныхъ какимъ нибудь образомъ извѣстны, то условія выгоднаго рѣшенія могутъ быть опредѣлены ближе. Напримѣръ послѣ того, что было сказано выше о способахъ измѣренія [ст. 165], нетрудно заключить, что въ углахъ ошибки должны почитаться постоянными, а въ бокахъ пропорціональными линіямъ. Итакъ если въ уравненіи (170) полагаемъ

$$\Delta a = \pm \omega a$$

$$\Delta b = \pm \omega b$$

$$\Delta c = \pm \omega c$$

то самое большое значеніе для ΔA выходитъ

$$\Delta A = \frac{2 a \omega}{c \sin. B}$$

или

$$\Delta A = \frac{2 \omega \sin. A}{\sin. B \sin. C}.$$

Наконецъ произведеніе sin. B sin. C пріобрѣтаетъ самое большое значеніе, когда $B = C$, слѣдовательно въ самомъ выгодномъ рѣшеніи

$$\triangle A = \omega \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A.$$

Это значитъ, что тѣмъ уголъ A вѣрнѣе находимъ, чѣмъ онъ менѣе, и чѣмъ его бока ближе къ равенству.

167. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ и съ большею точностію рѣшеніе треугольника можетъ быть сдѣлано помощію безконечныхъ строкъ, выводомъ которыхъ теперь мы займемся.

Ставя вмѣсто sin. x, cos. x степени съ воображаемымъ показателемъ $x\sqrt{-1}$ [ур. (41), (42)], получимъ

$$\frac{\sin. x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos. x} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{1 + \alpha^2 - \alpha(e^{x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}})}$$

$$= \frac{1}{2\alpha\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha e^{x\sqrt{-1}}} - \frac{1}{1 - \alpha e^{-x\sqrt{-1}}} \right\},$$

Здѣсь послѣднія двѣ дроби для $\alpha < 1$ разлагая по степенямъ α, потомъ переходя снова къ тригонометрическимъ функціямъ, заключаемъ

$$\frac{\sin. x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos. x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha^{n-1} \sin. n x \qquad (174)$$

гдѣ для составленія строки вмѣсто n должно ставить по порядку числа 1, 2, 3... и т. д.

Подобнымъ образомъ разложеніе

$$\log. \left\{ (1 - \alpha e^{x\sqrt{-1}})(1 - \alpha e^{-x\sqrt{-1}}) \right\}$$

по степенямъ α даетъ

$$\tfrac{1}{2} \log. (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos. x) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \tfrac{1}{n} \alpha^n \cos. n x \qquad (175)$$

Пусть еще

$$\operatorname{tang.} x = \alpha \operatorname{tang.} y$$

гдѣ $\alpha < 1$ положительное число. Отсюда

$$\frac{1 + \sqrt{-1}. \operatorname{tang.} x}{1 - \sqrt{-1}. \operatorname{tang.} x} = \frac{\cos. y + \alpha\sqrt{-1} \sin. y}{\cos. y - \alpha\sqrt{-1} \sin. y}.$$

Потомъ [ур. (41), (42)]

$$e^{2w\sqrt{-1}} = \frac{(1+\alpha)\,e^{y\sqrt{-1}} + (1-\alpha)\,e^{-y\sqrt{-1}}}{(1-\alpha)\,e^{y\sqrt{-1}} + (1+\alpha)\,e^{-y\sqrt{-1}}}$$

$$= e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,e^{-2y\sqrt{-1}}}{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,e^{-y2\sqrt{-1}}}.$$

Взявъ логариѳмы, раздѣляя на $2\sqrt{-1}$, разлагая по степенямъ α и переходя отъ показательныхъ функцій къ тригонометрическимъ, находимъ

$$x = y + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n \text{sin. } 2\,n\,y. \qquad (176)$$

Если же беремъ уравненіе

$$\text{tang. } x = \cos.\,\lambda \text{ tang. } y$$

то

$$e^{2w\sqrt{-1}} = \frac{\cos. y + \cos.\lambda \sin. y\sqrt{-1}}{\cos. y - \cos.\lambda \sin. y\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{-1}\,\text{tang. }\frac{1}{2}y\,e^{\lambda\sqrt{-1}}}{1-\sqrt{-1}\,\text{tang. }\frac{1}{2}y\,e^{-\lambda\sqrt{-1}}}.$$

Взявъ съ обѣихъ сторонъ логариѳмы, раздѣляя на $2\sqrt{-1}$ и разлагая по степенямъ tang. $\frac{1}{2}y$, получимъ

$$x = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,\text{tang. }\tfrac{1}{2}y^{2n+1}\cos.(2n+1)\lambda. \qquad (177)$$

168. *Въ треугольникѣ даются a, b, C; предполагается бокъ a весьма малымъ; требуется найти c.*

Беремъ [ур. (67)]

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2-2ab\cos. C}.$$

Отсюда

$$\log.\frac{c}{b} = \tfrac{1}{2}\log.\left\{1+\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}\cos. C\right\}$$

и слѣдовательно [ур. (175)]

$$\log. hyp. \frac{c}{b} = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^n}{n\, b^n} \cos. n\, C. \qquad (178)$$

Умноживъ на модуль M логариѳмовъ, получимъ

$$\log. \frac{c}{b} = - M \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^n}{n\, b^n} \cos. n\, C.$$

Вычисляя членъ за членомъ въ строкѣ, покуда значенія чувствительны, находимъ $\log. \frac{a}{b}$ помощію логариѳмовъ, съ точностію тѣмъ болѣе, чѣмъ содержаніе a къ b менѣе. Затѣмъ уже можно прибѣгнуть къ дополнительнымъ таблицамъ, которыя прибавлены на двадцать десятичныхъ и служатъ къ опредѣленію соотвѣтственныхъ чиселъ вполнѣ со всѣми долями.

Означая, какъ и прежде, ω ошибку для каждаго логариѳма, должны допускать въ

$$\log. \left(\frac{M\, a^n}{n\, b^n} \cos. n\, C \right)$$

ошибку $(2\, n + 3)\, \omega$, а въ соотвѣтственномъ числѣ [ур. (106)]

$$(2\, n + 4)\, \omega \frac{a^n}{n\, b^n} \cos. n\, C$$

и слѣдовательно

$$\triangle \log. \frac{c}{b} = \omega \sum_{n=1}^{n=\infty} (2\, n + 4) \frac{a^n}{n\, b^n} \cos. n\, C$$

съ тѣмъ однакожъ, чтобы каждый членъ въ строкѣ разумѣли положительнымъ. Для a чрезвычайно малаго въ содержаніи къ b, можемъ довольствоваться первымъ членомъ и принимать

$$\triangle \log. \frac{c}{b} = \frac{5\, \omega\, a}{b} \cos. C$$

потомъ ошибку въ самомъ числѣ

$$\triangle c = \frac{5\, \omega\, a\, c}{M\, b} \cos. C.$$

Еслижъ a не такъ мало, чтобъ удовольствоваться первымъ членомъ строки, то по крайней мѣрѣ всегда

$$\triangle \log. \frac{c}{b} < \omega\, \Sigma \frac{2\, n + 4}{n} \cdot \frac{a^n}{b^n}$$

и слѣдовательно

$$\triangle \log. \frac{c}{b} < 4\omega \left\{ \frac{a}{b-a} - \frac{2}{M} \log. (1 - \frac{a}{b}) \right\}.$$

Откуда видно, что предложенный нами способъ всегда можетъ быть употребленъ; однакожъ тѣмъ выгоднѣе, чѣмъ a менѣе въ содержаніи къ b.

Если довольствоваться точностію, какую могутъ доставить полныя таблицы логариѳмовъ, то гораздо короче вычислять прямо непперовъ логариѳмъ [ур. (178)]: потомъ перейти къ числу тоже помощію безконечной строки:

$$x = 1 + \log. x + \tfrac{1}{2} (\log. x)^2 + \frac{1}{2.3} (\log. x)^3 + \cdots$$

Если въ логариѳмическихъ таблицахъ ω самая большая ошибка, то въ рѣшеніи могутъ ошибки почитаться

$$\triangle \log. hyp. \frac{c}{b} = \frac{4\omega a}{b} \cos. C$$

$$\triangle c = 4\omega \frac{a c}{b} \cos. C.$$

Напримѣръ

$$a = 0{,}00714$$

$$b = 6{,}81345$$

$$C = 70^\circ\ 0'\ 26'', 28.$$

Находимъ

$$\log. a = \overline{7}{,}8536982$$

$$-\log. b = \overline{9}{,}1666329$$

$$\log. \tfrac{a}{b} = \overline{\overline{7}{,}0203311}$$

$$\log. \cos. C = \overline{9}{,}1677992$$

$$\log. (\tfrac{a}{b} \cos. C) = 6{,}1881303$$

$$\tfrac{1}{b} \cos. C = 0{,}0001542163$$

$$2 \log. \tfrac{a}{b} = \overline{4}{,}0406622$$

$$\log. \cos. 2C = \overline{9}{,}8897576. n$$

$$-\log. 2 = \overline{9}{,}6989700$$

$$\log. (\frac{a^2}{2b^2} \cos. 2C) = \overline{\overline{3}{,}6293898}. n$$

$$-\frac{a^2}{2\,b^2}\cos.\,2\,C = +\,0{,}0000004260$$

$$-\frac{a}{b}\cos.\,C = -\,0{,}0001542163$$

$$\log.\,hyp.\,\frac{b}{c} = \overline{-\,0{,}0001537903}$$

$$2\log.\,(0{,}0001537903) = \bar{2}{,}3738578$$

$$-\log.\,2 = \bar{9}{,}6989700$$

$$\log.\,(0{,}0000000118) = \overline{\bar{2}{,}0728278}$$

$$1 + \log.\,hyp.\,\frac{b}{c} = 0{,}9998462097$$

$$\tfrac{1}{2}\,(\log.\,hyp.\,\frac{b}{c})^2 = 0{,}0000000118$$

$$\frac{b}{c} = \overline{0{,}9998462215}$$

$$\log.\left(\frac{b-c}{b}\right) = 6{,}1668956$$

$$\log.\,b = 0{,}8333671$$

$$\log.\,(b-c) = \overline{\bar{7}{,}0002627}$$

$$b - c = 0{,}001000605$$

$$c = 6{,}812449395$$

Точность вычисленія

$$\log.\,4\,\omega = \bar{3}{,}30103$$

$$\log.\,(\tfrac{a}{b}\cos.\,C) = \bar{6}{,}18813$$

$$\log.\,c = 0{,}83337$$

$$\log.\,\Delta\,c = \overline{\bar{0}{,}32253}$$

$$\Delta\,c = 0{,}00000000021.$$

169. *Даны* a, b, C *въ предположеніи* a *весьма малымъ; требуется найти* A, B.

Изъ уравненій (143) беремъ второе

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,(B-A) = \frac{b-a}{b+a}\cot.\,\tfrac{1}{2}\,C.$$

Примѣняя сюда строку (176), получимъ

$$A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^n}{n\, b^n} \text{ sin. } n\, C. \qquad (179)$$

Потомъ находимъ другой уголъ

$$B = \pi - A - C.$$

Вычисляя членъ за членомъ въ строкѣ (179) получимъ дугу A, которую выразимъ въ градусахъ помощію таблицъ, прилагаемыхъ обыкновенно къ логариѳмическимъ. Если самое вычисленіе дѣлаемъ посредствомъ логариѳмовъ и называемъ ω самую большую ошибку, то въ

$$\log. \left\{ \frac{a^n}{n\, b^n} \text{ sin. } n\, C \right\}$$

она будетъ $(2\,n + 2)\,\omega$, а въ соотвѣтственномъ числѣ

$$\frac{(2\,n + 3)\,\omega\, a^n}{n\, b^n\, M} \text{ sin. } n\, C.$$

Довольствуясь первымъ членомъ въ строкѣ (179), ошибку въ углѣ A должны полагать

$$\triangle A = \frac{5\,\omega\, a \text{ sin. } C}{b\, M \text{ sin. } 1''}.$$

Еслибъ ошибка въ прочихъ членахъ могла быть чувствительна, то въ такомъ случаѣ

$$\triangle A < \frac{\omega}{M} \Sigma\, (2\,n + 3)\, \frac{a^n}{n\, b^n}$$

$$< \frac{2\,\omega}{M} \left\{ \frac{a}{b - a} + 3 \log. \frac{b}{b - a} \right\}.$$

Пусть напримѣръ даются

$$a = 0{,}00714$$

$$b = 6{,}81345$$

$$C = 70^\circ\ 0'\ 26'',28.$$

Находимъ

$$\log. \tfrac{a}{b} = \overline{7}{,}0203311$$

$$\log. \text{ sin. } C = \overline{9}{,}9730059$$

$$\log. \left(\tfrac{a}{b} \text{ sin. } C\right) = \overline{\overline{6}{,}9933370}$$

$$\tfrac{a}{b} \text{ sin. } C = 0{,}000984775$$

$$2 \log. \tfrac{a}{b} = \overline{4},0406622$$

$$\log. \sin. 2\,C = \overline{9},7999809$$

$$-\log. 2 = \overline{9},6989700$$

$$\log. \left(\frac{a^2}{2\,b^2} \sin. 2\,C\right) = \overline{\overline{3},5396131}$$

$$\frac{a^2}{2\,b^2} \sin. 2\,C = 0,000000346418$$

$$\tfrac{a}{b} \sin. C = 0,000984775$$

$$\frac{a^2}{2\,b^2} \sin. 2\,C = 0,000000346$$

$$A = \overline{0,000985121}$$

$$= 3'\,23'',1958.$$

Точность вычисленія

$$\log. 5\,\omega = \overline{3},39794$$

$$\log. (\tfrac{a}{b} \sin. C) = \overline{6},99334$$

$$-\log. (M \sin. 1'') = 5,67665$$

$$\log. \triangle A = \overline{\overline{6},06793}$$

$$\triangle A = 0''0001169.$$

170. *Даются* a, b, *и уголъ* C *весьма близкій къ* π; *требуется найти* A, B.

Уравненіе (143) даетъ

$$\text{tang.}\,(A - \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}C) = \frac{a-b}{a+b} \cot. \tfrac{1}{2}C.$$

Примѣняя сюда строку (177), получимъ

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}C + 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cos. (2n+1)\lambda \text{ tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C)^{2n+1} \qquad (180)$$

гдѣ

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\tfrac{b}{a}}.$$

Ошибка въ значеніи λ можетъ быть

$$\triangle \lambda = \frac{2\,\omega}{M} \sin. \lambda.$$

Когда tang. $(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}C)$ такъ мало, что можемъ довольствоваться въ строкѣ (180) первымъ членомъ, то, вычисляя помощію логариѳмовъ, должны почитать ошибку въ A

$$\Delta A = (\frac{4\omega}{M} + \Delta\lambda \text{ tang. } \lambda) \text{ cos. } \lambda \text{ tang. } (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C).$$

Куда вставляя значеніе $\Delta\lambda$, получимъ

$$\Delta A = \frac{2\omega}{M}(2 \text{ cos. } \lambda + \text{sin. } \lambda^2) \text{ tang. } (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C).$$

Если же въ строкѣ (180) нельзя довольствоваться первымъ только членомъ, такъ ошибка въ каждомъ

$$\frac{2}{2n+1} \text{ cos. } (2n+1)\lambda \text{ tang. } (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C)^{2n+1}$$

будетъ

$$\frac{2\omega}{(2n+1)M}\{n+2+(2n+1) \text{ sin. } \lambda \text{ tang. } (2n+1)\lambda\}$$

$$\times \text{ cos. } (2n+1)\lambda \text{ tang. } (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C)^{2n+1}$$

$$< \frac{2\omega}{M}[n+2+(2n+1) \text{ sin. } \lambda] \frac{\text{tang. } (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}C)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Суммуя въ отношеніи къ n, отъ $n = o$ до $n = \infty$, заключаемъ отсюда

$$\Delta A < \frac{\omega}{M}\{(\tfrac{1}{2} + \text{sin. } \lambda) \text{ cot. } \tfrac{1}{2}C + \tfrac{3}{2} \text{ log. cot. } \tfrac{1}{4}C\}.$$

Тѣмъ менѣе слѣдовательно ΔA, чѣмъ C ближе къ π.

Опредѣливъ уголъ A, находимъ

$$B = \pi - A - C.$$

Пусть для примѣра

$$a = 6{,}81345$$

$$b = 2{,}37594$$

$$C = 179^\circ\ 50'\ 35'', 23.$$

Вычисляемъ

$$\pi - C = 0^\circ\ 9'\ 24'', 77$$

$$\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}C = 0^\circ\ 4'\ 42'', 38$$

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C = 0^\circ\ 2'\ 21'', 19$$

$$\log.\ a = 0{,}8333671$$

$$\log.\ b = 0{,}3758355$$

$$\log.\ \frac{b}{a} = \bar{9}{,}5424684$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\lambda = \bar{9}{,}7712342$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 30^\circ\ 33'\ 45''{,}63$$

$$\lambda = 61^\circ\ \ 7'\ 31''{,}26$$

$$\log.\ \cos.\ \lambda = \bar{9}{,}6838527$$

$$\log.\ \text{tang.}\ (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C) = \bar{6}{,}8352871$$

$$\log.\ 2 = 0{,}3010300$$

$$\bar{6}{,}8201698$$

$$= \log.\ (0{,}000066095176)$$

$$A - \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}C = 2'\ 16''{,}33109$$

$$A = 6'\ 58''{,}7111$$

$$B = 2'\ 26''{,}0589.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 2 = 0{,}30103$$

$$\log.\ \cos.\ \lambda = \bar{9}{,}68386$$

$$\log.\ (2\ \cos.\ \lambda) = \bar{9}{,}98489$$

$$2\ \cos.\ \lambda = 0{,}966$$

$$2\ \log.\ \sin.\ \lambda = \bar{9}{,}88468$$

$$\sin.\ \lambda^2 = 0{,}767$$

$$\sin.\ \lambda^2 + 2\ \cos.\ \lambda = 1{,}733$$

$$\log.\ (\sin.\ \lambda^2 + 2\ \cos.\ \lambda) = 0{,}23880$$

$$\log.\ 2\,\omega = \bar{2}{,}00000$$

$$-\log.\ (M \sin.\ 1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\ \text{tang.}\ (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}C) = \bar{6}{,}83529$$

$$\log.\ \Delta A = \bar{5}{,}75074$$

$$\Delta A = 0''{,}00005633.$$

ГЛАВА XIII.

РѢШЕНІЕ СФЕРИЧЕСКИХЪ ПРЯМОУГОЛЬНЫХЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

171. Означаемъ a, b катеты, A, B противоположные углы, c гипотенузу въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ, для котораго, какъ мы видѣли (ст. 139, 144), существуютъ шесть различныхъ уравненій между частями

$$a, b, c$$
$$a, b, A$$
$$a, c, A$$
$$a, c, B$$
$$a, A, B$$
$$a, A, B.$$

Предполагая по двѣ части данными, прочія неизвѣстными, заключаемъ, что число различныхъ задачъ можетъ быть предложено шестнадцать, какъ здѣсь показано въ перечнѣ

Данныя.	Искомыя.
a, b	c
	A, B
a, c	b
	A
	B
a, A	b
	c
	B
a, B	b
	c
	A
A, B	a, b
	c

Въ сферическомъ треугольникѣ мы будемъ предполагать каждый бокъ, а слѣдовательно также каждый уголъ $< \pi$ (ст. 46). Противный случай легко приводимъ къ этому же, когда вмѣсто бока $> \pi$, беремъ его дополненіе къ кругу.

Рѣшая треугольникъ помощію логариѳмическихъ таблицъ, будемъ допускать самую большую ошибку ω на каждый логариѳмъ, отъ чего въ искомомъ числѣ произойдетъ ошибка, величина которой назначаетъ уже точность вычисленія.

172. *Даются* a, b; *требуется найти* c.

Значеніе c даетъ уравненіе (92)

$$\cos. c = \cos. a \cos. b \tag{181}$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle c = \frac{3\omega}{M} \cot. c. \tag{182}$$

Дугѣ c въ уравненіи (181) могутъ принадлежать только два значенія, которыхъ сумма 2π, слѣдовательно въ самомъ треугольникѣ только одно (ст. 171).

Напримѣръ

$$a = 51^\circ\ 12'\ 35'',27$$

$$b = 65^\circ\ \ 5'\ 13'',12.$$

Находимъ

$$\log. \cos. a = \bar{9},7969007$$

$$\log. \cos. b = \bar{9},6245316$$

$$\log. \cos. c = \bar{9},4214323$$

$$c = 74^\circ\ 41'\ 55'',16.$$

Точность вычисленія

$$\log. 3\,\omega = \bar{3},17609$$

$$\log. \cot. c = 9,43707$$

$$-\log. (M \sin. 1'') = 5,67665$$

$$\log. \triangle c = \bar{8},28981$$

$$\triangle c = 0'',019.$$

Изъ уравненія (182) надобно заключить, что съ уменьшеніемъ c ростетъ ошибка $\triangle c$. Точность вычисленія не должна переходить однакожъ за границу, которую

находимъ, когда выраженіе (182) для весьма малаго c, замѣняемъ такимъ (ст. 149)

$$\triangle c = -\operatorname{tang.} c + \sqrt{\frac{6\,\omega}{M} + \operatorname{tang.} c^2}.$$

Самую большую ошибку получимъ для $c = o$

$$\triangle c = \sqrt{\frac{6\,\omega}{M}}.$$

Съ таблицами логариѳмовъ на семь десятичныхъ это составитъ

$$\log. 6\,\omega = \bar{3},47712$$

$$-\log. M = 0,36223$$

$$\log. \frac{6\,\omega}{M} = \overline{\bar{3},83935}$$

$$\log. \sqrt{\frac{6\,\omega}{M}} = \bar{6},91967$$

$$-\log. \sin. 1'' = 5,31443$$

$$\log. \triangle c = \overline{2,23410}$$

$$\triangle c = 171'', 43$$

$$= 2'\,51'', 43.$$

173. Если бока a, b весьма малы или близки къ π, то рѣшеніе передъ этимъ [ур. (181), 182)] послужитъ только для перваго приближенія, котораго впрочемъ можно достигнуть еще, почитая треугольникъ изъ a, b или изъ $\pi - a$, $\pi - b$ за прямолинейной, и къ чему надобно прибѣгнуть въ особенности тогда, когда дуги a, b или $\pi - a$, $\pi - b$ не выходятъ даже за границы ошибокъ въ вычисленіи (ст. 172).

Далѣе предполагая по величинѣ $\sin. a \leqq \sin. b$, изъ уравненія (181) находимъ

$$\left.\begin{aligned} \sin.\tfrac{1}{2} a^2 &= \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(c+b)\sin.\tfrac{1}{2}(c-b)}{\cos. b} \\ \cos\tfrac{1}{2} a^2 &= \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(c+b)\cos.\tfrac{1}{2}(c-b)}{\cos. b} \end{aligned}\right\} \quad (183)$$

Отсюда

$$\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2} a = \sqrt{\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}(c+b)\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}(c-b)}. \quad (184)$$

Если теперь c приближенное значеніе, δ поправка въ немъ, то

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c+b+\delta)\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c-b+\delta)}.$$

Означая D, E разности, которыя въ таблицахъ логариѳмовъ отвѣчаютъ log. tang. $\frac{1}{2}(b+c)$, log. tang. $\frac{1}{2}(c-b)$ для одной секунды въ углѣ, получимъ

$$2\,\text{log. tang.}\tfrac{1}{2}a = \text{log. tang.}\tfrac{1}{2}(c+b) + \text{log. tang.}\tfrac{1}{2}(c-b) + \delta\,(D+E)$$

и слѣдовательно

$$\delta = \frac{1}{D+E}\,\text{log.}\left\{\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}a^2}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c+b)\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c-b)}\right\}.$$

Если теперь исправленное такимъ образомъ значеніе c удовлетворяетъ уравненію (184), то могутъ ошибки быть

$$\frac{2\,\omega}{M} = \frac{\Delta\,c}{\text{sin.}\,(c+b)} + \frac{\Delta\,c}{\text{sin.}\,(c-b)} = \frac{2\,\Delta\,c\,\text{sin.}\,c\,\text{sin.}\,b}{\text{sin.}\,(c+b)\,\text{sin.}\,(c-b)}.$$

Между тѣмъ уравненія (183) даютъ

$$\text{sin.}\,a^2\,\text{cos.}\,b^2 = \text{sin.}\,(c+b)\,\text{sin.}\,(c-b)$$

и слѣдовательно

$$\Delta\,c = \frac{\omega}{M}\,\frac{\text{sin.}\,a^2}{\text{sin.}\,c}\,\text{cos.}\,b.$$

Это рѣшеніе всякій разъ выгоднѣе прежнихъ [ур. (181), (182)], какъ скоро по величинѣ

$$3\,\text{cos.}\,a > \text{sin.}\,a^2.$$

Полагая

$$3\,\text{cos.}\,\xi = \text{sin.}\,\xi^2$$

$$\text{cos.}\,\eta = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Находимъ

$$\pm\,\text{cos.}\,\xi = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

$$= \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\eta^2\sqrt{13}$$

а вычисляя

$$\text{log.}\,13 = 1{,}1139431$$

$$\text{log.}\,\sqrt{13} = 0{,}5569715$$

$$\text{log.}\,3 = 0{,}4771212$$

$$-\log.\sqrt{13} = \overline{9},4430285$$

$$\log.\cos.\eta = \overline{9},9201497$$

$$\eta = 33^\circ\ 41'\ 24''.15$$

$$\tfrac{1}{2}\eta = 16^\circ\ 50'\ 42'',07$$

$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}\eta = 9,4620743$$

$$2\log.\sin.\tfrac{1}{2}\eta = \overline{8},9241486$$

$$\log.\sqrt{13} = 0,5569715$$

$$\log.\cos.\xi = \overline{9},4811201$$

$$\xi = 72^\circ\ 22'\ 32'',88.$$

Такъ что всякій разъ, когда по величинѣ $\sin.a < \sin.\xi$, послѣднее рѣшеніе должно предпочитать, а первымъ пользоваться какъ способомъ приближенія.

Беремъ для примѣра

$$a = 175^\circ\ 20'\ 15'',24$$

$$b = \ 10^\circ\ 15'\ 20'',16.$$

Находимъ

$$\log.\cos.a = \overline{9},9985605.n$$

$$\log.\cos.b = 9,9930053$$

$$\log.\cos.c = \overline{9},9915658.n$$

$$c = 168^\circ\ 44'\ 40'',48.$$

Точность вычисленія

$$\log.3\omega = \overline{3},17609$$

$$\log.\cot.c = 0,70112$$

$$-\log.(M\sin.1'') = 5,67665$$

$$\log.\Delta c = \overline{9},55386$$

$$\Delta c = 0'',358.$$

Разсматривая такое значеніе c какъ приближенное и полагая въ немъ поправку δ,

$$\tfrac{1}{2}(c+b) = 89^\circ\ 30'\ \ 0'',32$$

$$\tfrac{1}{2}(c-b) = 79^\circ\ 14'\ 40'',16$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a = 1{,}3903002$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,(c+b+\delta') = 2{,}0592188 + 1207.\,\delta'$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,(c-b+\delta') = 0{,}7213473 + \quad 57.\,\delta'$$

$$2\,\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \overline{2{,}7805661 + 1264.\,\delta'}$$

$$1{,}3903002 = 1{,}3902830 + \quad 632.\,\delta'$$

$$\delta' = +0'',272$$

$$c = 168^\circ\ 44'\ 40'',752.$$

Точность вычисленія

$$2\,\log.\,\sin.\,a = \bar{7}{,}82002$$

$$\log.\,\cos.\,b = \bar{9}{,}99301$$

$$-\log.\,\sin.\,c = 0{,}70955$$

$$\log.\,\omega = \bar{2}{,}69897$$

$$-\log.\,(M\,\sin.\,1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\,\Delta\,c = \overline{\bar{6}{,}89820}$$

$$\Delta\,c = 0'',00079.$$

174. *Даются* a, b; *найти* A *и* B.

Изъ уравненій (93) второе даетъ значеніе A

$$\text{tang.}\,A = \frac{\text{tang.}\,a}{\sin.\,b}$$

съ точностію вычисленія

$$\Delta\,A = \frac{3\,\omega}{2\,M}\sin.\,2\,A.$$

Углу A принадлежитъ здѣсь одно только значеніе, потому что другое $\pi + A$ разсматривать въ треугольникѣ намъ не нужно (ст. 171). Подобнымъ образомъ находимъ уголъ B.

Пусть

$$a = 51^\circ\ 12'\ 35'',27$$

$$b = 65^\circ\ \ 5'\ 13'',12.$$

Вычисляемъ

$$\log.\ \text{tang.}\ a = 0{,}0948849$$

$$-\log.\ \sin.\ b = 0{,}0424174$$

$$\log.\ \text{tang.}\ A = \overline{0{,}1373023}$$

$$A = 53^\circ\ 54'\ 35''{,}36.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ \sin.\ 2\,A = \bar{9}{,}97866$$

$$\log.\ 3\,\omega = \bar{3}{,}17609$$

$$-\log.\ 2 = \bar{9}{,}69897$$

$$-\log.\ (M\ \sin.\ 1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\ \triangle A = \overline{\bar{8}{,}53037}$$

$$\triangle A = 0''{,}034.$$

175. *Даются a, c; найти b.*

Рѣшеніе выгоднѣе другихъ будетъ такое [ур. (184)]

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c+a)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c-a)} \qquad (186)$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle b = \frac{2\,\omega}{M}\ \sin.\ b.$$

Въ уравненіи (186) квадратный корень можетъ быть взятъ съ двумя знаками, откуда происходятъ два значенія для b, которыхъ сумма 2π.

Для примѣра беремъ

$$a = 51^\circ\ 12'\ 35''{,}27$$

$$c = 74^\circ\ 41'\ 55''{,}16.$$

Вычисляемъ

$$\tfrac{1}{2}(c+a) = 62^\circ\ 57'\ 15''{,}21$$

$$\tfrac{1}{2}(c-a) = 11^\circ\ 44'\ 39''{,}94$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c+a) = 0{,}2919769$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c-a) = \bar{9}{,}3178521$$

$$2\log.\,\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}b = \overline{9},6098290$$

$$\log.\,\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}b = \overline{9},8049145$$

$$\tfrac{1}{2}b = 32^\circ\ 32'\ 36'',55$$

$$b = 65^\circ\ \ 5'\ 13'',10.$$

Точность вычисленія

$$\log.\,2\omega = \overline{3},00000$$

$$-\log.\,(M\sin.\,1'') = 5,67665$$

$$\log.\,\sin.\,b = \overline{9},95758$$

$$\log.\,\triangle b = \overline{8},63423$$

$$\triangle b = 0'',043.$$

176. *Даются* a, c; *найти* A.

Изъ уравненій (90) первое даетъ прямо рѣшеніе

$$\sin.\,A = \frac{\sin.\,a}{\sin.\,c} \qquad (187)$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle A = \frac{3\,\omega}{M}\,\mathrm{tang}.\,A. \qquad (188)$$

Въ уравненіи (187) углу A принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма π. Изъ нихъ одно находится въ треугольникѣ съ бокомъ $b<\pi$, другое съ бокомъ $b>\pi$, какъ легко заключить изъ уравненія [ур. (93)]

$$\sin.\,b = \mathrm{tang}.\,a\,\mathrm{cot}.\,A.$$

Пусть на примѣръ

$$a = \ 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$

$$b = 168^\circ\ 44'\ 40'',75$$

находимъ

$$\log.\,\sin.\,a = \overline{9},2505169$$

$$-\log.\,\sin.\,c = 0,7095605$$

$$\log.\,\sin.\,A = \overline{9},9600774$$

$$A = 65^\circ\ 48'\ 26'',81.$$

Точность вычисленія

$$\log.\,3\,\omega = \overline{3},17609$$

$$\log.\,\mathrm{tang}.\,A = 0,34750$$

$$-\log.\,(M\sin.\,1'') = \underline{5,67665}$$

$$\log. \triangle A = \bar{9},20024$$

$$\triangle A = 0'',1586.$$

Изъ уравненія (188) надобно заключить, что рѣшеніе не выгодно, какъ скоро tang. A весьма большое число; но впрочемъ ошибка въ A никогда не можетъ превзойти 2′51″,43, какъ это было доказано для подобнаго случая выше (ст. 172).

177. *Другое рѣшеніе, когда даны a, c и требуется найти A.*

Изъ уравненія (187) слѣдуютъ

$$\sin.\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A\right)^2 = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(c-a)\cos.\tfrac{1}{2}(c+a)}{\sin. c}$$

$$\cos.\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A\right)^2 = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(c-a)\sin.\tfrac{1}{2}(c+a)}{\sin. c}.$$

Откуда для вычисленія угла A

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A\right) = \sqrt{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c-a)\cot.\tfrac{1}{2}(c+a)}.$$

Это рѣшеніе также даетъ углу A два значенія, которыхъ сумма π, потому что квадратный корень можно принимать отрицательнымъ и положительнымъ. Точность вычисленія будетъ

$$\triangle A = \frac{2\omega}{M}\cos. A$$

тѣмъ болѣе, чѣмъ уголъ A ближе къ $\frac{1}{2}\pi$ или къ $\frac{3}{4}\pi$. Самое рѣшеніе выгоднѣе перваго [ур. (188)], какъ скоро по величинѣ

$$3\ \text{tang.}\ A > 2\cos. A$$

и слѣдовательно sin. A по величинѣ болѣе sin. 30°.

Беремъ снова примѣръ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 27'',16$$

$$c = 168^\circ\ 44'\ 40'',75.$$

Вычисленіе даетъ

$$\tfrac{1}{2}(c+a) = 89^\circ\ 30'\ \ 0'',455$$

$$\tfrac{1}{2}(c-a) = 79^\circ\ 14'\ 40'',295$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c-a) = 0,7213495$$

$$\log.\ \cot.\ \tfrac{1}{2}(c+a) = \underline{\bar{7},9407487}$$

$$2 \log. \text{tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A) = \overline{8},6620982$$

$$\log. \text{tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A) = \overline{9},3310491$$

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}A = 12^\circ\ \ 5'\ 40'',563$$

$$\tfrac{1}{2}\pi - A = 24^\circ\ 11'\ 21'',13$$

$$A = 65^\circ\ 48'\ 26'',87.$$

Точность вычисленія

$$\log. 2\,\omega = \overline{3},00000$$

$$\log. \cos. A = \overline{9},61260$$

$$-\log. (M \sin. 1'') = 5,67665$$

$$\log. \triangle A = \overline{\overline{8},28925}$$

$$\triangle A = 0'',0195.$$

178. *Даются* a, c; *требуется найти* B.

Изъ уравненій (94) первое даетъ

$$\cos. B = \text{tang.}\, a \cot. c \qquad (189)$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle B = \frac{3\,\omega}{M} \cot. B. \qquad (190)$$

Углу B принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма 2π. Должно брать $B < \pi$ вмѣстѣ съ третьимъ бокомъ b треугольника (ст. 46), и какъ требуетъ уравненіе [ур. (90)]

$$\sin. c \sin. B = \sin. b.$$

Изъ двухъ значеній B каждое отвѣчаетъ также одному изъ двухъ значеній угла A (ст. 176), согласно уравненіемъ (95)

$$\cot. A \cot. B = \cos. c.$$

Для примѣра беремъ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$

$$c = 168^\circ\ 44'\ 40'',75.$$

Находимъ

$$\log. \text{tang.}\, a = \overline{9},2575115$$

$$\log. \cot. c = 0,7011265\ n.$$

$$\log. \cos. B = \overline{\overline{9},9586380}\ n.$$

$$B = 155^\circ\ 23'\ 19'',79.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 3\,\omega = \bar{3},17609$$

$$\log.\ \cot.\ B = 0,33907$$

$$-\log.\ (M \sin.\ 1'') = 5,67665$$

$$\log.\ \Delta B = \overline{\bar{9},19181}$$

$$\Delta B = 0'',155.$$

Уравненіе (190) показываетъ, что точность уменьшается съ возрастаніемъ cot. B. Однакожъ самая большая ошибка въ углѣ B, именно для $B = o$ или $B = \pi$, не можетъ превзойти $2'51'',43$ (ст. 172).

179. *Другое рѣшеніе, когда даны a, c и требуется найти B.*

Отъ уравненія (189) переходимъ къ такимъ

$$2 \sin.\ \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\sin.\ (c - a)}{\cos.\ a \sin.\ c}$$

$$2 \cos.\ \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\sin.\ (c + a)}{\cos.\ a \sin.\ c}$$

и наконецъ опредѣляемъ уголъ B

$$\tang.\ \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin.\ (c - a)}{\sin.\ (c + a)}}$$

съ точностію

$$\Delta B = \frac{2\,\omega}{M} \sin.\ B.$$

Углу B снова принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма 2π (ст. 178), потому что квадратный корень можетъ быть взятъ отрицательный и положительный.

Послѣднее рѣшеніе выгоднѣе прежняго, какъ скоро $3 \cos.\ B > 2 \sin.\ B^2$ [ур. (190)] и слѣдовательно когда по величинѣ $\sin.\ B$ менѣе, нежели синусъ угла въ $30°$.

Напримѣръ

$$a = 10°\ 15'\ 20'',16$$

$$c = 168°\ 44'\ 40'',75.$$

Вычисляемъ

$$c + a = 179°\ \ 0'\ \ 0'',91$$

$$c - a = 158°\ 29'\ 20''.59$$

$$\log.\ \sin.\ (c-a) = \bar{9},5642860$$
$$-\log.\ \sin.\ (c+a) = 1,7582545$$
$$2\log.\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}B = \overline{1,3225405}$$
$$\tfrac{1}{2}B = 77^\circ\ 41'\ 39'',92$$
$$B = 155^\circ\ 23'\ 19'',84.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 2\,\omega = \bar{3},00000$$
$$\log.\ \sin.\ B = \bar{9},61957$$
$$-\log.\ (M\sin.\ 1'') = 5,67665$$
$$\log.\ \triangle B = \overline{\bar{8},29622}$$
$$\triangle B = 0'',01978.$$

180. *Даются a, A; найти b.*

Изъ уравненій (93) второе даетъ значеніе b

$$\sin.\ b = \mathrm{tang.}\ a\ \mathrm{cot.}\ A \qquad (191)$$

съ точностію

$$\triangle b = \frac{3\,\omega}{M}\,\mathrm{tang.}\ b. \qquad (192)$$

Боку b принадлежитъ здѣсь два значенія, которыхъ сумма π.

Для примѣра беремъ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$
$$A = 65^\circ\ 48'\ 26'',87.$$

Находимъ

$$\log.\ \mathrm{tang.}\ a = \bar{9},2575115$$
$$\log.\ \mathrm{cot.}\ A = \bar{9},6524990$$
$$\log.\ \sin.\ b = \overline{\bar{8},9100105}$$
$$b = 4^\circ\ 39'\ 44'',76.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 3\,\omega = \bar{3},17609$$
$$\log.\ \mathrm{tang.}\ b = \bar{8},91133$$

$$-\log.\,(M \sin.\,1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\,\triangle b = \overline{7{,}76407}$$

$$\triangle b = 0'',0058.$$

Когда b близко къ $\frac{1}{2}\pi$ или къ $\frac{3}{2}\pi$, то можетъ ошибка въ b, какъ показываетъ уравненіе (192), простираться до $2'\,51'',44$ (ст. 172).

181. *Другое рѣшеніе, когда даны a, A и требуется найти b.*

Изъ уравненія (191) слѣдуютъ еще

$$2 \sin.\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}b)^2 = \frac{\sin.\,(A-a)}{\cos.\,a \sin.\,A}$$

$$2 \cos.\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}b)^2 = \frac{\sin.\,(A+a)}{\cos.\,a \sin.\,A}$$

и наконецъ для вычисленія дуги b

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}b) = \sqrt{\frac{\sin.\,(A-a)}{\sin.\,(A+a)}} \qquad (193)$$

съ точностію

$$\triangle b = \frac{2\,\omega}{M} \cos.\,b \qquad (194)$$

а потому рѣшеніе (193) всякій разъ выгоднѣе, какъ скоро [ур. (192)]

$$3 \sin.\,b > 2 \cos.\,b^2$$

или когда по величинѣ $\sin.\,b$ болѣе нежели синусъ угла въ $30°$.

Въ уравненіи (193) дугѣ b также принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма π (ст. 180).

Напримѣръ

$$a = 51°\,12'\,35'',27$$

$$A = 53°\,54'\,35'',37.$$

Вычисляемъ

$$A - a = \quad 2°\,42'\quad 0'',10$$

$$A + a = 105°\quad 7'\,10'',64$$

$$\log.\,\sin.\,(A-a) = \overline{8{,}6730849}$$

$$-\log.\,\sin.\,(A+a) = \underline{0{,}0153002}$$

$$2 \log.\,\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}b) = \overline{8{,}6883851}$$

$$\log.\ \text{tang.}\ (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}b) = \bar{9},3441925$$

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}b = 12^\circ\ 27'\ 23'',42$$

$$b = 65^\circ\ \ 5'\ 13'',16.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 2\,\omega = \bar{3},00000$$

$$\log.\ \cos.\ b = 9,62454$$

$$-\log.\ (M \sin.\ 1'') = 5,67665$$

$$\log.\ \Delta b = \overline{\bar{8},30119}$$

$$\Delta b = 0'',02.$$

182. *Даются* a, b; *найти* c.

Изъ уравненій (90) первое служитъ къ опредѣленію c

$$\sin.\ c = \frac{\sin.\ a}{\sin.\ A} \qquad (195)$$

съ точностію вычисленія

$$\Delta c = \frac{3\,\omega}{M}\,\text{tang.}\ c. \qquad (196)$$

Дугѣ c въ уравненіи (195) принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма π.

Изъ уравненія (181)

$$\cos.\ c = \cos.\ a\ \cos.\ b$$

можно видѣть, какія значенія боковъ b, c соотвѣтствуютъ одно другому (ст. 180, 181).

Напримѣръ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$

$$A = 65^\circ\ 48'\ 26'',84.$$

Находимъ

$$\log.\ \sin.\ a = \bar{9},2505169$$

$$-\log.\ \sin.\ A = 0,0399226$$

$$\log.\ \sin.\ c = \overline{\bar{9},2904395}$$

$$c = 11^\circ\ 15'\ 19'',25.$$

Точность

$$\log.\ 3\,\omega = \bar{3},17609$$

$$\log.\ \text{tang.}\ c = \bar{9},29888$$

$$-\log.(M\sin.1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\triangle c = \overline{8{,}15162}$$

$$\triangle c = 0'',0142.$$

Когда бокъ c близокъ къ $\frac{1}{2}\pi$ или $\frac{3}{2}\pi$, то въ значеніи c можетъ ошибка доходить до $2'\,51'',43$ (ст. 172).

183. *Другое рѣшеніе, когда даны a, A и требуется найти c.*

Изъ уравненія (195) слѣдуютъ еще такія

$$\sin.(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}c)^2 = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A-a)\cos.\frac{1}{2}(A+a)}{\sin.A}$$

$$\cos.(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}c)^2 = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A-a)\sin.\frac{1}{2}(A+a)}{\sin.A}.$$

Наконецъ для вычисленія дуги c

$$\text{tang.}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}c) = \sqrt{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-a)\cot.\tfrac{1}{2}(A+a)}$$

съ точностію

$$\triangle c = \frac{2\omega}{M}\cos.c.$$

Это рѣшеніе выгоднѣе прежняго (ст. 182), какъ скоро по величинѣ sin. c болѣе sin. $30°$.

Напримѣръ

$$a = 51°\,12'\,35'',27$$

$$A = 53°\,54'\,35'',37.$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{2}(A-a) = \quad 1°\quad 2'\quad 0'',05$$

$$\tfrac{1}{2}(A+a) = 52°\,33'\,35'',32$$

$$\log.\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-a) = \overline{8},3722960$$

$$\log.\cot.\tfrac{1}{2}(A+a) = 9{,}8840425$$

$$2\log.\text{tang.}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}c) = \overline{\overline{8},2563385}$$

$$\log.\text{tang.}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}c) = \overline{9},1281692$$

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}c = \quad 7°\,39'\quad 2'',43$$

$$c = 74°\,41'\,55'',14.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 2\,\omega = \overline{3},00000$$

$$\log.\ \cos.\ c = \overline{9},42143$$

$$-\log.\ (M \sin.\ 1'') = 5,67665$$

$$\log.\ \Delta\, c = \overline{\overline{8},09808}$$

$$\Delta\, c = 0'',0125.$$

184) *Даются* a, A; *требуется найти* B.

Изъ уравненій (91) второе

$$\sin.\ B = \frac{\cos.\ A}{\cos.\ a} \tag{197}$$

служитъ къ вычисленію B съ точностію

$$\Delta B = \frac{3\,\omega}{M} \operatorname{tang}.\ B. \tag{198}$$

Углу B въ уравненіи (197) принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма π. Изъ уравненій (91) первое

$$\sin.\ A \cos.\ b = \cos.\ B$$

рѣшаетъ, какъ значенія b, B соотвѣтствуютъ одно другому (ст. 180). Изъ уравненій (94) первое

$$\cos.\ B \operatorname{tang}.\ c = \operatorname{tang}.\ a$$

указываетъ, какъ значенія c, B могутъ быть приняты вмѣстѣ (ст. 182).

Напримѣръ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$

$$A = 65^\circ\ 48'\ 26'',87.$$

Находимъ

$$\log.\ \cos.\ A = 9,6125764$$

$$-\log.\ \cos.\ a = 0,0069947$$

$$\log.\ \sin.\ B = \overline{\overline{9},6195711}$$

$$B = 24^\circ\ 36'\ 40'',17.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 3\,\omega = \overline{3},17609$$

$$\log.\ \operatorname{tang}.\ B = \overline{9},66093$$

$$-\log.\,(M\sin.\,1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\,\triangle B = \overline{8{,}51367}$$

$$\triangle B = 0'',0326.$$

Изъ уравненія (198) должно заключать, что точность уменьшается съ возрастаніемъ tang. B, до того что съ приближеніемъ B къ $\frac{1}{2}\pi$ или къ $\frac{3}{2}\pi$, ошибка можетъ доходить до $2'\,51'',44$ (ст. 172).

185. *Другое рѣшеніе, когда даны* a, A *и требуется найти* B.

Изъ уравненія (197) находимъ еще другія

$$\sin.\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B)^2 = \frac{\sin.\,\frac{1}{2}(A-a)\sin.\,\frac{1}{2}(A+a)}{\cos.\,a}$$

$$\cos.\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B)^2 = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}(A-a)\cos.\,\frac{1}{2}(A+a)}{\cos.\,a}.$$

Отсюда для вычисленія B

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B) = \sqrt{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A-a)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+a)} \qquad (199)$$

съ точностію

$$\triangle B = \frac{2\,\omega}{M}\cos.\,B. \qquad (200)$$

Это рѣшеніе выгоднѣе прежняго (ст. 184) всякой разъ, когда

$$3\sin.\,B > 2\cos.\,B^2$$

слѣдовательно какъ скоро по величинѣ $\sin.\,B > \sin.\,30°$.

Здѣсь [ур. (199)] углу B принадлежатъ тоже два значенія, которыхъ сумма π (ст. 184), потому что квадратный корень берется съ тѣмъ и другимъ знакомъ.

Напримѣръ

$$a = 4°\,39'\,44'',76$$

$$A = 24°\,36'\,40'',16.$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{2}(A+a) = 14°\,38'\,12'',46$$

$$\tfrac{1}{2}(A-a) = 9°\,58'\,27'',70$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A-a) = \overline{9}{,}2451809$$

$$\log.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+a) = \underline{\overline{9}{,}4169173}$$

$$2 \log. \text{tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B) = \bar{8},6620982$$

$$\log. \text{tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B) = \bar{9},3310491$$

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B = 12^\circ\ \ 5'\ 46'',56$$

$$B = 65^\circ\ 48'\ 26'',88.$$

Точность вычисленія

$$\log. 2\,\omega = 3,00000$$

$$\log. \cos. B = \bar{9},41256$$

$$-\log. (M \sin. 1'') = 5,67665$$

$$\log. \triangle B = \overline{\bar{8},27921}$$

$$\triangle B = 0'',0192.$$

186. *Даются* a, B; *найти* b.

Изъ уравненій (93) первое

$$\text{tang.}\, b = \sin. a \sin. B \qquad (201)$$

служитъ къ вычисленію b, съ точностію

$$\triangle b = \frac{3\,\omega}{2\,M} \sin. 2\,b.$$

Боку b въ треугольникѣ [ур. (201)] принадлежатъ два значенія, которыхъ разность π, а слѣдовательно одно только $b < \pi$ (ст. 171).

Для примѣра беремъ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$

$$B = 24^\circ\ 36'\ 40'',16.$$

Находимъ

$$\log. \sin. a = \bar{9},2505169$$

$$\log. \text{tang.}\, B = \bar{9},6609331$$

$$\log. \text{tang.}\, b = \overline{\bar{8},9114500}$$

$$b = 4^\circ\ 39'\ 44'',75.$$

Точность вычисленія

$$\log. 3\,\omega = \bar{3},17609$$

$$-\log. 2 = \bar{9},69897$$

$$\log.\ \sin.\ 2\,b = \overline{9},20961$$
$$-\log.\ (M\sin.\ 1'') = 5,67665$$
$$\log.\ \triangle b = \overline{\overline{7},76132}$$
$$\triangle b = 0'',006.$$

187. *Даются* a, B; *найти* c.

Изъ уравненій (94) первое

$$\text{tang.}\ c = \frac{\text{tang.}\ a}{\cos.\ B} \qquad (202)$$

служитъ къ вычисленію c, съ точностію

$$\triangle c = \frac{3\,\omega}{2\,M}\sin.\,2\,c.$$

Дугѣ c въ уравненіи (202) принадлежатъ два значенія, которыхъ разность π. Изъ нихъ надобно взять то, которое $< \pi$.

Напримѣръ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$
$$B = 24^\circ\ 36'\ 40'',16.$$

Находимъ

$$\log.\ \text{tang.}\ a = \overline{9},2575115$$
$$-\log.\ \cos.\ B = 0,0413620$$
$$\log.\ \text{tang.}\ c = \overline{\overline{9},2988735}$$
$$c = 11^\circ\ 15'\ 19'',25$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 3\,\omega = \overline{3},17609$$
$$-\log.\ 2 = \overline{9},69897$$
$$\log.\ \sin.\ 2\,c = \overline{9},58585$$
$$-\log.\ (M\sin.\ 1'') = 5,67665$$
$$\log.\ \triangle c = \overline{\overline{8},13756}$$
$$\triangle c = 0'',0137.$$

188. *Даются a, B; найти A.*

Изъ уравненій (91) второе

$$\cos. A = \sin. B \cos. a \tag{203}$$

служитъ къ вычисленію угла A, съ точностію

$$\triangle A = \frac{3\omega}{M} \cot. A. \tag{204}$$

Углу A въ уравненіи (203) принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма π. Изъ нихъ одно будетъ менѣе π вмѣстѣ съ дугой a.

Напримѣръ

$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'',16$$
$$B = 24^\circ\ 36'\ 40'',16.$$

Находимъ

$$\log. \sin. B = \bar{9},6195711$$
$$\log. \cos. a = \bar{9},9930053$$
$$\log. \cos. A = 9,6126764$$
$$A = 65^\circ\ 48'\ 26'',87.$$

Точность вычисленія

$$\log. 3\omega = \bar{3},17609$$
$$\log. \cot. A = \bar{9},65248$$
$$-\log. (M \sin. 1'') = 5,67665$$
$$\log. \triangle A = \bar{\bar{8}},50522$$
$$\triangle A = 0'',032.$$

Рѣшеніе не выгодно, какъ показываетъ уравненіе (204), когда cot. A весьма большое число, до того что можетъ ошибка въ $\triangle A$ доходить до $2'51'',44$ (ст. 172).

189. *Другое рѣшеніе, когда даны a, B и требуется найти A.*

Уравненіе (203) представляемъ въ другомъ видѣ

$$2 \cos. A = \sin. (B + a) + \sin. (B - a).$$

Потомъ отсюда находимъ

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} A^2 = \sin. (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} B - \tfrac{1}{2} a)^2 + \sin. (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} a)^2.$$

Полагаемъ теперь

$$\text{tang. } x = \pm \frac{\text{sin. } (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}a)}{\text{sin. } (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}a)}.$$

Послѣ чего

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sin. } (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}a)}{\text{cos. } x \sqrt{2}}. \qquad (205)$$

Точность вычисленія для вспомогательной дуги x

$$\triangle x = \frac{3\,\omega}{2\,M} \text{sin. } 2x$$

для угла A

$$\triangle A = \text{sin. } A \left\{ \frac{4\,\omega}{M} + \triangle x \text{ tang. } x \right\}.$$

Куда вставляя значеніе $\triangle x$, получимъ

$$\triangle A = \frac{4\,\omega}{M} \text{sin. } A \left\{ 1 + \tfrac{3}{4} \text{sin. } x \right\}$$

или

$$\triangle A = \frac{8\,\omega}{M} \text{sin. } A \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\xi^2$$

гдѣ

$$\text{cos. } \xi = \tfrac{1}{2} \text{sin. } x \sqrt{3}.$$

Это рѣшеніе даетъ уголъ A тѣмъ выгоднѣе, чѣмъ уголъ A менѣе или ближе къ π. Въ уравненіи (205) углу A принадлежатъ также два значенія, которыхъ сумма 2π (ст. 188), потому что здѣсь уголъ x можетъ быть какъ отрицательный, такъ и положительный.

Напримѣръ

$$a = 4^\circ\ 39'\ 44'',76$$

$$B = 89^\circ\ 48'\ 26'',86.$$

Вычисляемъ

$$\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\pi = 2^\circ\ 14'\ \ 5'',81$$

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}a = 2^\circ\ 25'\ 38'',95$$

$$\text{log. sin. } (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}a) = \bar{8},5910345$$

$$-\text{ log. sin. } (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}a) = 0,3730958$$

$$\text{log. tang. } x = \overline{\bar{9},9641303}$$

$$x = 42^\circ\ 38'\ 11'',65$$

$$\log.\sin.(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}a) = \bar{8},6269042$$
$$-\log.\cos. x = 0,1333200$$
$$-\log.\sqrt{2} = \bar{9},8494850$$
$$\log.\sin.\tfrac{1}{2}A = \overline{\bar{8},6097092}$$
$$\tfrac{1}{2}A = 2^\circ\,19'\,59'',52$$
$$A = 4^\circ\,39'\,59'',04.$$

Точность вычисленія

$$\log.\sin. x = \bar{9},83081$$
$$-\log. 2 = \bar{9},69897$$
$$\log.\sqrt{3} = 0,23956$$
$$\log.\cos.\xi = \overline{\bar{9},76834}$$
$$\xi = 54^\circ\,5'\;\;0''$$
$$\tfrac{1}{2}\xi = 27^\circ\,2'\,30''$$
$$2\log.\cos.\tfrac{1}{2}\xi = \bar{9},89944$$
$$\log.\sin. A = \bar{8},91040$$
$$\log. 8\,\omega = \bar{3},60206$$
$$-\log.(M\sin. 1'') = 5,67665$$
$$\log.\triangle A = \overline{\bar{8},08855}$$
$$\triangle A = 0'',0109.$$

190. *Даются* A, B; *найти* a *или* b.

Изъ уравненій (91) второе служитъ къ опредѣленію a

$$\cos. a = \frac{\cos. A}{\sin. B} \tag{206}$$

съ точностію

$$\triangle a = \frac{3\,\omega}{M}\cot. a. \tag{207}$$

Дугѣ a въ уравненіи (206) принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма 2π; одно слѣдовательно въ томъ треугольникѣ, который разсматривается (ст. 171). Подобнымъ образомъ находимъ другой бокъ b.

Рѣшеніе (206) не выгодно, когда cot. a весьма большое число, такъ что можетъ ошибка въ a доходитъ до $2'\,51'',44$, когда бокъ a близокъ къ нулю или къ π.

Напримѣръ

$$A = 89^\circ\,48'\,26'',86$$
$$B = \;\;4^\circ\,39'\,59'',04.$$

Находимъ

$$\log.\cos. A = \bar{7},5263958$$
$$-\log.\sin. B = 1,0896209$$
$$\log.\cos. a = \overline{\bar{8},6160167}$$
$$a = 87^\circ\,37'\,57'',53.$$

Точность вычисленія

$$\log. 3\,\omega = \bar{3},17609$$
$$\log.\cot. a = \bar{8},61636$$
$$-\log.(M\sin. 1'') = \bar{5},67665$$
$$\log. \triangle a = \overline{\bar{7},46910}$$
$$\triangle a = 0'',0029.$$

191. *Другое рѣшеніе, когда даны A, B и требуется найти a или b.*

Изъ уравненія (206) слѣдуютъ два другія

$$\sin.\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}\pi)\cos.(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)}{\sin. B}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\cos.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}\pi)\sin.(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)}{\sin. B}.$$

Отсюда для вычисленія дуги a

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\text{tang.}(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}\pi)\,\text{tang.}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A)} \qquad (208)$$

съ точностію

$$\triangle a = \frac{2\,\omega}{M}\sin. a. \qquad (209)$$

Въ уравненіи (208) дугѣ a принадлежатъ два значенія, которыхъ сумма 2π, потому что квадратный корень можно брать съ тѣмъ и другимъ знакомъ. Это рѣ-

шеніе выгоднѣе прежняго, всякій разъ когда

$$3 \cos. a > 2 \sin. a^2$$

слѣдовательно какъ скоро $\sin. a < \sin. 60^\circ$.

Напримѣръ

$$A = 24^\circ\ 36'\ 40'', 16$$

$$B = 65^\circ\ 48'\ 26'', 87.$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{4} \pi = \ 0^\circ\ 12'\ 33'', 515$$

$$\tfrac{1}{4} \pi - \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} A = 24^\circ\ 24'\ \ 6'', 645$$

$$\log. \tang. (\tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{4} \pi) = \bar{7}, 5626686$$

$$\log. \tang. (\tfrac{1}{4} \pi - \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} A) = \bar{9}, 6567295$$

$$2 \log. \tang. \tfrac{1}{2} a = \overline{\bar{7}, 2193981}$$

$$\log. \tang. \tfrac{1}{2} a = \bar{8}, 6096990$$

$$\tfrac{1}{2} a = 2^\circ\ 19'\ 52'', 37$$

$$a = 4^\circ\ 39'\ 44'', 74.$$

Точность вычисленія

$$\log. 2\omega = \bar{3}, 00000$$

$$\log. \sin. a = \bar{8}, 91002$$

$$- \log. (M \sin. 1'') = 5, 67665$$

$$\log. \Delta a = \overline{\bar{7}, 58667}$$

$$\Delta a = 0'', 00386.$$

192. *Даются* A, B; *найти* c.

Изъ уравненія (95)

$$\cos. c = \cot. A \cot. B$$

слѣдуютъ еще два такихъ

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\cos. (\pi - A - B)}{\sin. A \sin. B}$$

$$2 \cos. \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\cos. (A - B)}{\sin. A \sin. B}.$$

Отсюда для вычисленія дуги c

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,c = \sqrt{\frac{\cos.\,(\pi - A - B)}{\cos.\,(A - B)}}\,. \qquad (210)$$

съ точностію

$$\triangle\, c = \frac{2\,\omega}{M}\,\sin.\,c.$$

Какъ уравненіе (95), такъ и послѣднее (210) даютъ c два значенія, которыхъ сумма $2\,\pi$. Изъ нихъ одно $< \pi$, другое $> \pi$.

Напримѣръ

$$A = 24^\circ\ 36'\ 40'',16$$

$$B = 65^\circ\ 48'\ 26'',87.$$

Находимъ

$$\pi - A - B = 89^\circ\ 34'\ 52'',97$$

$$A - B = 41^\circ\ 11'\ 46'',71$$

$$\log.\cos.\,(\pi - A - B) = \bar{7},8636929$$

$$-\log.\cos.\,(A - B) = 0,1235181$$

$$2\log.\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,c = \overline{\bar{7},9872110}$$

$$\log.\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,c = \bar{8},9936055$$

$$\tfrac{1}{2}\,c = 5^\circ\ 37'\ 39'',62$$

$$c = 11^\circ\ 15'\ 19'',62.$$

Точность вычисленія

$$\log.\,2\,\omega = \bar{3},00000$$

$$-\log.\,(M \sin.\,1'') = 5,57665$$

$$\log.\,\triangle\, c = \overline{\bar{7},56773}$$

$$\triangle\, c = 0'',0037.$$

193. Ошибки въ искомыхъ еще зависятъ отъ невѣрности въ данныхъ, которыя прямо находятъ измѣреніемъ. Эту зависимость открываемъ въ уравненіяхъ между частями треугольника (ст. 144), предполагая во всѣхъ углахъ весьма ма-

лые приращенія. Такъ получимъ

$$\triangle a \text{ cot. } a = \triangle c \text{ cot. } c + \triangle A \text{ cot. } A$$

$$\triangle b \text{ cot. } b = \triangle c \text{ cot. } c + \triangle B \text{ cot. } B$$

$$\triangle B \text{ tang. } B = \triangle b \text{ tang. } b - \triangle A \text{ cot. } A$$

$$\triangle A \text{ tang. } A = \triangle a \text{ tang. } a - \triangle B \text{ cot. } B$$

$$\triangle c \text{ tang. } c = \triangle a \text{ tang. } a + \triangle b \text{ tang. } b$$

$$\frac{2 \triangle b}{\text{sin. } 2a} = \triangle b \text{ cot. } b + \frac{2 \triangle A}{\text{sin. } 2A}$$

$$\frac{2 \triangle b}{\text{sin. } 2b} = \triangle a \text{ cot. } a + \frac{2 \triangle B}{\text{sin. } 2B}$$

$$\frac{2 \triangle a}{\text{sin. } 2a} = \frac{2 \triangle c}{\text{sin. } 2c} - \triangle B \text{ tang. } B$$

$$\frac{2 \triangle b}{\text{sin. } 2b} = \frac{2 \triangle c}{\text{sin. } 2c} - \triangle A \text{ tang. } A$$

$$\triangle c \text{ tang. } c = \frac{2 \triangle A}{\text{sin. } 2A} + \frac{2 \triangle B}{\text{sin. } 2B}.$$

Снова пользуясь уравненіями (90), (91), (92), (93), (94), (95) назначаемъ ошибки въ искомыхъ отъ невѣрности данныхъ.

Если даны a, b, то невѣрности $\triangle a$, $\triangle b$ произведутъ ошибки

$$\triangle c = \triangle a \text{ cos. } B + \triangle b \text{ cos. } A$$

$$\triangle A = \frac{1}{\text{sin. } c}\{\triangle a \text{ sin. } B - \triangle b \text{ cos. } a \text{ cos. } B\}$$

$$\triangle B = \frac{1}{\text{sin. } c}\{\triangle b \text{ sin. } A - \triangle a \text{cos. } b \text{ cos. } A\}.$$

Если даны a, c, то невѣрности $\triangle a$, $\triangle c$ произведутъ ошибки

$$\triangle b = \frac{1}{\text{cos. } A}\{\triangle c - \triangle a \text{ cos. } B\}$$

$$\triangle A = \frac{1}{\text{sin. } b}\{\triangle a - \triangle c \text{ cos. } B\}$$

$$\triangle B = \frac{1}{\text{cos. } a \text{ sin. } b}\{\triangle c \text{ sin. } A - \triangle a \text{ cos. } b\}.$$

Отъ невѣрности въ данныхъ a, A происходятъ ошибки

$$\triangle b = \frac{\triangle a \sin. B - \triangle A \sin. c}{\cos. a \cos. B}$$

$$\triangle c = \frac{\triangle a - \triangle A \sin. b}{\cos. B}$$

$$\triangle B = \frac{\triangle a \sin. b - \triangle A}{\cos. c}.$$

Отъ ошибокъ въ данныхъ a, B происходятъ

$$\triangle b = \frac{1}{\sin. A}\{\triangle a \cos. b \cos. A + \triangle B \sin. c\}$$

$$\triangle c = \frac{1}{\sin. A}\{\triangle a \cos. b + \triangle B \cos. a \sin. b\}$$

$$\triangle A = \triangle a \sin. b - \triangle B \cos. c.$$

Отъ ошибокъ въ данныхъ A, B

$$\triangle a = \frac{1}{\sin. b}\{\triangle A + \triangle B \cos. c\}$$

$$\triangle b = \frac{1}{\sin. a}\{\triangle B + \triangle A \cos. c\}$$

$$\triangle c = \frac{\sin. c}{\sin. a \sin. b}\{\triangle A \cos. b + \triangle B \cos. a\}.$$

Одного взгляда на такія выраженія довольно, чтобы судить каковы должны быть условія для выгоднаго рѣшенія.

194. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ съ выгодою быть употреблено вычисленіе помощію строкъ (ст. 167).

Даются a, b, при томъ a близко къ $\frac{1}{2}\pi$, требуется найти B.

Примѣняя сюда уравненіе (176), получимъ

$$B = b + \sum_{n=1}^{\infty} \text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^{2n} \sin. 2n b.$$

Въ логариѳмѣ каждаго члена

$$\sin. 2n b \,\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^{2n}$$

ошибка можетъ быть $(2n+1)\omega$, слѣдовательно въ самомъ числѣ

$$\frac{2n+2}{M}\omega \sin. 2n b \,\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^{2n}$$

а во всей строкѣ не можетъ превзойти

$$\Delta B = \frac{2\omega}{M \sin. 1''} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \text{tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^{2n}.$$

Это значитъ

$$\Delta B = \frac{2\omega \sin. (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}a)^2}{M \sin. 1'' \sin. a^2} \left\{ \sin. a - \sin. (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^2 \right\}.$$

Если же довольствуемся первымъ членомъ въ строкѣ, то

$$\Delta B = \frac{4\omega}{M \sin. 1''} \sin. 2b \text{ tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^2.$$

Напримѣръ

$$a = 89^\circ\ 45'\ 26'',16$$

$$b = 5^\circ\ 7'\ 40'',08.$$

Находимъ

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a = 0^\circ\ 14'\ 33'',84$$

$$2 \text{ log. tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a) = \overline{4},6519548$$

$$\text{log. sin. } 2b = \overline{9},2505169$$

$$-\text{log. sin. } 1'' = 5,3144251$$

$$\text{log.} (B - b) = \overline{\overline{9},2168968}$$

$$B - b = 0'',4486990.$$

Точность вычисленія

$$\text{log. } 4\omega = \overline{3},30103$$

$$\text{log. sin. } 2b = \overline{9},25052$$

$$2 \text{ log. tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a) = \overline{4},65195$$

$$-\text{log.} (M \sin. 1'') = 5,67665$$

$$\text{log. } \Delta B = \overline{\overline{2},88015}$$

$$\Delta B = 0'',00000007588.$$

195. *Даны a, b, при томъ b весьма близко къ $\frac{1}{2}\pi$; найти B.*

Примѣняя сюда уравненіе (177), находимъ

$$B = \tfrac{1}{2}\pi - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin. (2n+1)a. \text{ tang.} (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}b)^{2n+1}.$$

Ошибка въ каждомъ членѣ можетъ быть

$$\frac{2\,(2\,n+5)\,\omega}{(2\,n+1)\,M\sin.\,1''}\sin.\,(2\,n+1)\,a.\,\mathrm{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{2}\,b)^{2n+1}$$

слѣдовательно въ углѣ B не превосходитъ

$$\triangle B=\frac{2\,\omega}{M\sin.\,1''}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,n+5}{2\,n+1}\,\mathrm{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{2}\,b)^{2n+1}.$$

Это значитъ

$$\triangle B=\frac{2\,\omega}{M\sin.\,1''}\Big\{\cot.\,b+\frac{4}{M}\log.\cot.\,\tfrac{1}{2}\,b\Big\}.$$

Если довольствуемся первымъ членомъ въ строкѣ, то

$$B=\tfrac{1}{2}\,\pi-2\,\mathrm{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{2}\,b)\sin.\,a$$

$$\triangle B=\frac{8\,\omega}{M\sin.\,1''}\sin.\,a\,\mathrm{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{2}\,b).$$

Напримѣръ

$$a=10^{\circ}\;15'\;20'',16$$

$$b=89^{\circ}\;45'\;26'',16.$$

Вычисленіе даетъ

$$\log.\,2=0{,}3010300$$

$$\log.\,\mathrm{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{2}\,b)=\overline{7}{,}3259774$$

$$\log.\sin.\,a=\overline{9}{,}2505169$$

$$-\log.\sin.\,1''=5{,}3144251$$

$$\log.\,(\tfrac{1}{2}\,\pi-B)=\overline{2}{,}1919494$$

$$\tfrac{1}{2}\,\pi-B=2'\;35'',57843.$$

Точность

$$\log.\,8\,\omega=3{,}60206$$

$$\log.\sin.\,a=\overline{9}{,}25052$$

$$\log.\,\mathrm{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\,\pi-\tfrac{1}{2}\,b)=\overline{7}{,}32598$$

$$-\log.\,(M\sin.\,1'')=5{,}67665$$

$$\log.\,\triangle B=\overline{5}{,}85421$$

$$\triangle B=0'',0000715.$$

196. *Даются* a, B; *при томъ* a *весьма близко къ* $\frac{1}{2}\pi$; *найти* b.

Помощію строки представляемъ b [ур. (176)]

$$b = B + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin.\, 2\,n\,B \operatorname{tang}.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^{2n}.$$

Ошибка въ каждомъ членѣ менѣе

$$\frac{(2\,n+2)\,\omega}{M \sin.\, 1''} \operatorname{tang}.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^{2n}$$

слѣдовательно

$$\triangle b = \frac{2\,\omega}{M \sin.\, 1''} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{tang}.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^{2n}$$

или

$$\triangle b = \frac{2\,\omega}{M \sin.\, 1'' \sin.\, a^2} \sin.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^2 \left\{ \sin.\, a + \cos.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^2 \right\}.$$

Если довольствуемся первымъ членомъ въ строкѣ, то

$$b = B - \sin.\, 2\,B \operatorname{tang}.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^2$$

съ точностію

$$\triangle b = \frac{4\,\omega}{M \sin.\, 1''} \sin.\, 2\,B \operatorname{tang}.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a)^2.$$

Напримѣръ

$$a = 89^\circ\ 45'\ 26'',16$$
$$B = \ 5^\circ\ \ 7'\ 40'',08.$$

Находимъ

$$\begin{aligned}
2 \log.\, \operatorname{tang}.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a) &= \overline{4},6519548 \\
\log.\, \sin.\, 2\,B &= \overline{9},2505169 \\
-\log.\, \sin.\, 1'' &= 5,3144251 \\
\hline
&= \overline{9},2168968 \\
&= \log.\, (0,4486990) \\
4 \log.\, \operatorname{tang}.\, (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}a) &= \overline{9},3039096 \\
\log.\, \sin.\, 4\,B &= \overline{9},5445523 \\
-\log.\, \sin.\, 1'' &= 5,3144251 \\
\hline
&= \overline{4},1628870 \\
&= \log.\, (0,000001455) \\
B - b &= 0'',4486975.
\end{aligned}$$

Точность вычисленія

$$\log.\ 4\,\omega = \bar{3},30103$$

$$\log.\ \sin.\ 2\,B = \bar{9},25052$$

$$\log.\ \mathrm{tang.}\ (\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\,a) = \bar{4},65195$$

$$-\log.\ (M\sin.\ 1'') = 5,67665$$

$$\log.\ \triangle\, b = \overline{\bar{2},88015}$$

$$\triangle\, b = 0'',00000007588.$$

197. *Даются* a, B; *найти* c, *когда* B *весьма малый уголъ.*

Рѣшеніе помощію строки [ур. (176)]

$$c = a + \sum_{n=1}^{\infty} \sin.\ 2\,n\,a\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B^{2n}.$$

Ошибка въ каждомъ членѣ менѣе

$$\omega\,\frac{2\,n+2}{M\sin.\ 1''}\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B^{2n}$$

во всей строкѣ

$$\frac{2\,\omega}{M\sin.\ 1''}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B^{2n}$$

и слѣдовательно

$$\triangle\, c = \frac{2\,\omega\sin.\ \frac{1}{2}\,B^2}{M\sin.\ 1''\cos.\ B^2}\,(2\cos.\ \tfrac{1}{2}\,B^2 - \sin.\ \tfrac{1}{2}\,B^2)$$

или короче

$$\triangle\, c = \frac{\omega\ \mathrm{tang.}\ B^2}{M\sin.\ 1''}.$$

Если довольствуемся первымъ членомъ въ строкѣ, то

$$c = a + \sin.\ 2\,a\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B^2$$

$$\triangle\, c = \frac{4\,\omega\sin.\ 2\,a}{M\sin.\ 1''}\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B^2.$$

Напримѣръ

$$a = 12^\circ\ 18'\ 20'',08$$

$$B = \ 5^\circ\ \ 7'\ 40'',08.$$

Находимъ

$$\log.\ \sin.\ 2\,a = \bar{9},6196711$$

$$\log.\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B = \bar{7},3021370$$

$$-\log.\sin.1'' = 5{,}3144251$$

$$\overline{2{,}2362332}$$

$$= \log.(172{,}27793)$$

$$\log.\sin.4a = \bar{9}{,}8792390$$

$$4\log.\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}B = \bar{4}{,}6042740$$

$$-\log.\sin.1'' = 5{,}3144251$$

$$\overline{\bar{9}{,}7979381}$$

$$= \log.(0{,}62799)$$

$$c - a = 2'\,52''{,}90592.$$

Точность вычисленія

$$\log.\omega = \bar{2}{,}69897$$

$$2\log.\operatorname{tang}.B = \bar{7}{,}90594$$

$$-\log.(M\sin.1'') = 5{,}67665$$

$$\log.\Delta c = 6{,}28156$$

$$\Delta c = 0''{,}0001912.$$

198. *Найти a, когда даны c, B; при томъ B весьма малый уголъ.*

Значеніе a выражается строкою [ур. (90), (176)]

$$a = c + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}B^{2n}\sin.2nc.$$

Ошибка въ каждомъ членѣ не превосходитъ

$$\frac{(2n+2)\omega}{M\sin.1''}\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}B^{2n}$$

слѣдовательно

$$\Delta a = \frac{2\omega}{M\sin.1''}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}B^{2n}$$

послѣ суммованія

$$\Delta a = \frac{2\omega\sin.\frac{1}{2}B^2}{M\sin.1''\cos.B^2}(2\cos.\tfrac{1}{4}B^2 - \sin.\tfrac{1}{2}B^2)$$

или короче

$$\Delta a = \frac{\omega\operatorname{tang}.\frac{1}{2}B^2}{M\sin.1''}.$$

Если довольствуемся первымъ членомъ въ строкѣ, то

$$a = c - \sin.\ 2\,c\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B^2$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle a = \frac{4\,\omega}{M \sin.\ 1''} \sin.\ 2\,c\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B^2.$$

Напримѣръ

$$c = 12^\circ\ 21'\ 12'',36$$

$$B = \ \ 5^\circ\ \ 7'\ 40'',08.$$

Находимъ

$$\log.\sin.\ 2\,c = \bar{9},6211513$$

$$2\log.\mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B = \bar{7},3021370$$

$$-\log.\sin.\ 1'' = 5,3144251$$

$$\overline{2,2377134}$$

$$= \log.\ (172,86752)$$

$$\log.\sin.\ 4\,c = \bar{9},8804862$$

$$4\log.\mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B = \bar{4},6042740$$

$$-\log.\sin.\ 1'' = 5,3144251$$

$$\overline{\bar{9},7991853}$$

$$= \log.\ (0,629775)$$

$$c - a = 2'\ 52'',23776$$

$$\log.\,\omega = \bar{2},69897$$

$$2\log.\mathrm{tang.}\,B = \bar{7},90594$$

$$-\log.\,(M \sin.\ 1'') = 5,67665$$

$$\overline{\log.\,\triangle a = \bar{6},28156}$$

$$\triangle a = 0,0001912.$$

199. *Найти уголъ A, когда даны c, B; при томъ дуга c весьма мала.*

Значеніе A выражается строкой [ур. (95), (176)]

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - B - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin.\ 2\,n\,B\ \mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,c^{2n}.$$

Точность вычисленія во всей строкѣ, какъ и выше (ст. 198),

$$\triangle A = \frac{\omega \operatorname{tang.} c^2}{M \sin. 1''}.$$

Когда же довольствуемся первымъ членомъ, то

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - B + \sin. 2B \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} c^2$$

съ точностію

$$\triangle A = \frac{4\omega}{M \sin. 1''} \sin. 2B \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} c^2.$$

Напримѣръ

$$\begin{aligned} c &= 5^\circ\ 7'\ 40'',08 \\ B &= 12^\circ\ 18'\ 20'',08. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. \sin. 2B &= \bar{9},6196711 \\ 2 \log. \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} c &= \bar{7},3021370 \\ -\log. \sin. 1'' &= 5,3144251 \\ & \overline{2,2362332} \\ &= \log. (172,27793) \\ \log. \sin. 4B &= \bar{9},8804862 \\ 4 \log. \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} c &= 4,6042740 \\ -\log. \sin. 1'' &= 5,3144251 \\ & \overline{\bar{9},7991853} \\ &= \log. (0,629775) \\ A &= \tfrac{1}{2}\pi - B + 2'\ 52'',23775 \\ A &= 77^\circ\ 44'\ 32'',15776. \end{aligned}$$

Точность вычисленія

$$\begin{aligned} \log. \omega &= \bar{2},69897 \\ 2 \log. \operatorname{tang.} c &= \bar{7},90594 \\ -\log. (M \sin. 1'') &= 5,67665 \\ \log. \triangle A &= \overline{\bar{6},28156} \end{aligned}$$

$$\triangle A = 0'',0001912.$$

200 *Даются* c, A; *найти* a.

Изъ уравненій (90) первое даетъ значеніе a

$$\sin. a = \sin. c \sin. A \tag{211}$$

съ точностію вычисленія

$$\triangle a = \frac{3\omega}{M \sin. 1''} \operatorname{tang.} a. \tag{212}$$

Когда бокъ a весьма близокъ къ $\frac{1}{2}\pi$, то надобно принимать (ст. 172)

$$\Delta a = -\cot. a + \sqrt{\frac{6\omega}{M} + \cot. a^2}$$

гдѣ $\cot. a$ разумѣется положительнымъ числомъ. Для $a = \frac{1}{2}\pi$ самая большая ошибка

$$\Delta a = \sqrt{\frac{6\omega}{M}}$$

что съ логариѳмами на семь десятичныхъ составитъ $2' 51'', 43$.

Напримѣръ

$$c = 11^\circ\ 15'\ 19'', 25$$
$$A = 65^\circ\ 48'\ 26'', 87.$$

Находимъ

$$\log. \sin. c = \bar{9},2904395$$
$$\log. \sin. A = \bar{9},9600774$$
$$\log. \sin. a = \bar{9},2505169$$
$$a = 10^\circ\ 15'\ 20'', 16$$
$$\log. 3\omega = 3,17609$$
$$\log. \text{tang}. a = \bar{9},25751$$
$$-\log. (M \sin. 1'') = 5.67665$$
$$\log. \Delta a = \bar{8},11025$$
$$\Delta a = 0'',0129.$$

201. *Другое рѣшеніе, когда даны c. A и требуется найти a.*

Уравненіе (211) можетъ быть замѣнено двумя [ур. (93), (94)]

$$\text{tang}. b = \cos. A \text{ tang}. c$$
$$\text{tang}. a = \sin. b \text{ tang}. A$$

изъ которыхъ первое служитъ къ опредѣленію бока b съ точностію

$$\Delta b = \frac{3\omega}{M \sin. 1''} \sin. b \cos. b.$$

Второе даетъ a съ ошибкой Δa въ зависимости съ Δb

$$\frac{\Delta a}{\sin. a \cos. a} = \Delta b \cot. b + \frac{3\omega}{M \sin. 1''}.$$

Послѣ чего

$$\Delta a = \frac{3\omega \sin. 2a}{2M \sin. 1''}(1 + \cos. b^2).$$

Такимъ образомъ точность увеличивается здѣсь съ приближеніемъ a къ $\frac{1}{4}\pi$. Послѣднее рѣшеніе всякій разъ выгоднѣе прежняго [ур. (212)], какъ скоро по величинѣ

$$\text{tang. } a > (1 + \cos. b^2) \sin. a \cos. a$$

условіе, которое выражается короче

$$\sin. A > \cot. c$$

и относится только къ величинѣ $\sin. A$, $\cot. c$.

Напримѣръ

$$c = 74^\circ\ 41'\ 55'',12$$
$$A = 53^\circ\ 54'\ 35'',38.$$

Находимъ

$$\log. \text{tang. } c = 0,5628926$$
$$\log. \cos. A = \bar{9},7701579$$
$$\log. \text{tang. } b = \overline{0,3330505}$$
$$b = 65^\circ\ 5'\ 13'',05$$
$$\log. \sin. b = \bar{9},9575825$$
$$\log. \text{tang. } A = 0,1373024$$
$$\log. \text{tang. } a = 0,0948849$$
$$a = 51^\circ\ 12'\ 35'',27.$$

Точность вычисленія

$$2 \log. \cos. b = \bar{9},2490$$
$$\cos. b^2 = 0,17742$$
$$\log. \tfrac{3}{2}\omega = \bar{2},87506$$
$$\log. \sin. 2a = \bar{9},98972$$
$$\log. (1 + \cos. b^2) = 0,07092$$
$$-\log. (M \sin. 1'') = 5,67665$$
$$\log. \Delta a = \overline{8,61235}$$
$$\Delta a = 0'',0409.$$

202. *Даются c, A; найти b.*

Этой задачи рѣшеніе встрѣтилось уже выше (ст. 201). Уравненіе

$$\text{tang. } b = \cos. A \text{ tang. } c$$

служитъ къ вычисленію b, съ точностію

$$\Delta b = \frac{3\omega}{2M} \sin. 2b.$$

Беремъ тотъ же примѣръ

$$c = 74^\circ\ 41'\ 55'',12$$
$$A = 53^\circ\ 54'\ 35'',38.$$
$$\log.\ \text{tang.}\ c = 0{,}5628926$$
$$\log.\ \cos.\ A = \overline{9}{,}7701579$$
$$\log.\ \text{tang.}\ b = \overline{0{,}3330405}$$
$$b = 65^\circ\ 5'\ 13'',05.$$

Точность вычисленія

$$\log.\ \tfrac{3}{2}\,\omega = \overline{2}{,}87506$$
$$\log.\ \sin.\ 2\,b = \overline{9}{,}88303$$
$$-\log.\ (M\ \sin.\ 1'') = 5{,}67665$$
$$\log.\ \Delta\,b = \overline{\overline{8}{,}43474}$$
$$\Delta\,b = 0'',0272.$$

203. *Даются c, A; найти B.*

Изъ уравненія (95) получимъ для рѣшенія

$$\cot.\ B = \cos.\ c\ \text{tang.}\ A$$

съ точностію вычисленія

$$\Delta\,B = \frac{3\,\omega}{2\,M}\sin.\ 2\,B.$$

Напримѣръ

$$c = 74^\circ\ 41'\ 55'',12$$
$$A = 53^\circ\ 50'\ 35'',38.$$

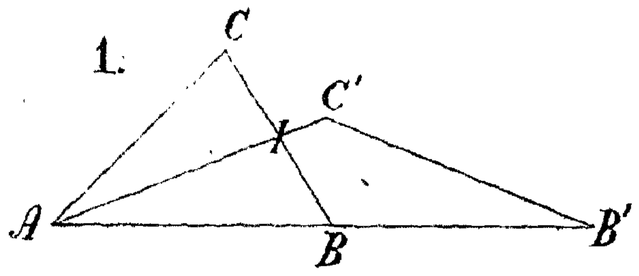
Вычисляемъ

$$\log.\ \cos.\ c = \overline{9}{,}4124326$$
$$\log.\ \text{tang.}\ A = 0{,}1373024$$
$$\log.\ \cot.\ B = \overline{\overline{9}{,}5497350}$$
$$B = 70^\circ\ 28'\ 32'',34.$$

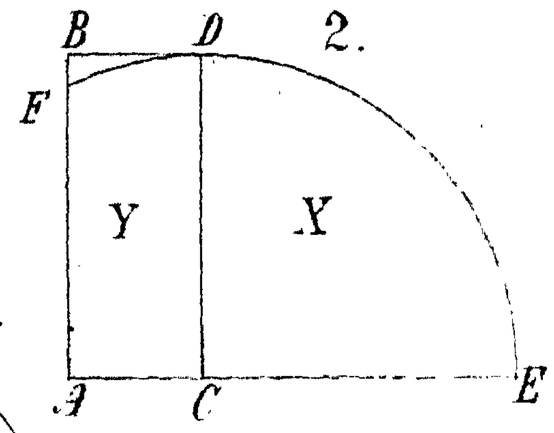
Точность

$$\log.\ \tfrac{3}{2}\,\omega = \overline{2}{,}87506$$
$$\log.\ \sin.\ 2\,B = \overline{9}{,}75912$$
$$-\log.\ (M\ \sin.\ 1'') = 5{,}67665$$
$$\log.\ \Delta\,B = \overline{\overline{8}{,}31093}$$
$$\Delta\,B = 0'',02045.$$

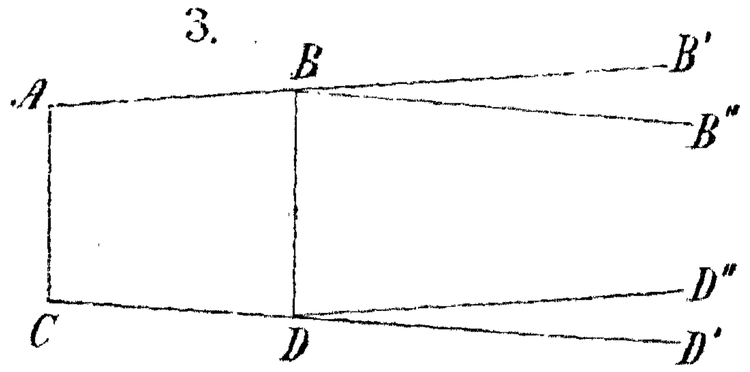
1.



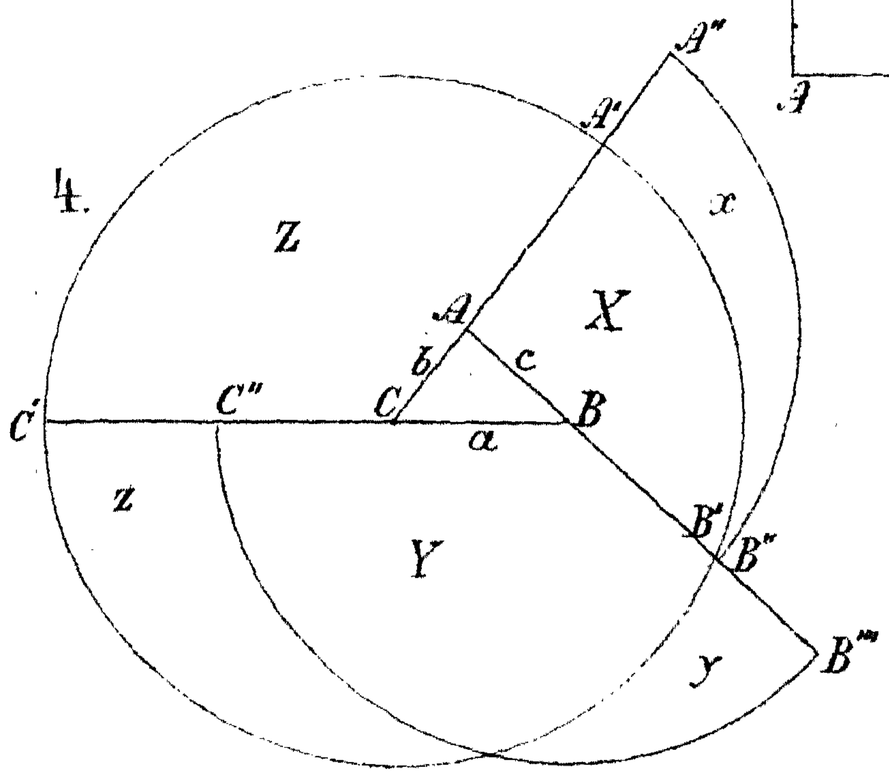
2.



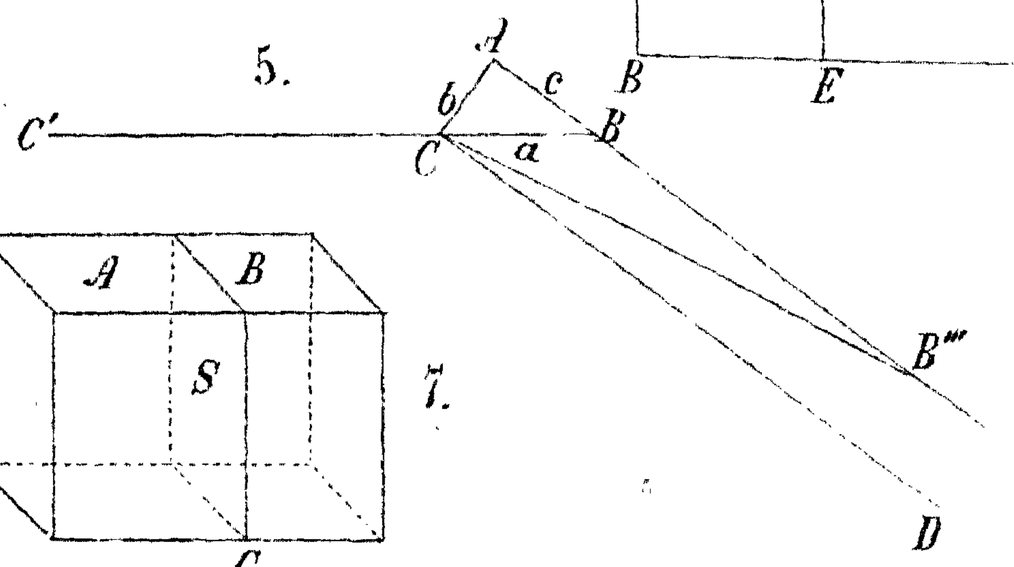
3.



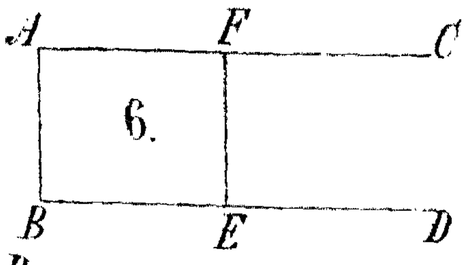
4.



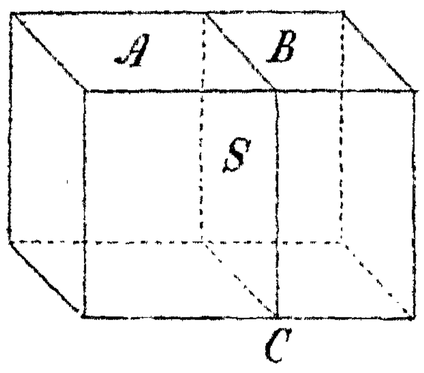
5.



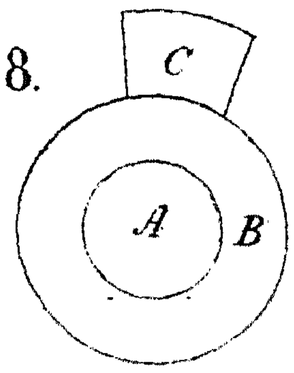
6.



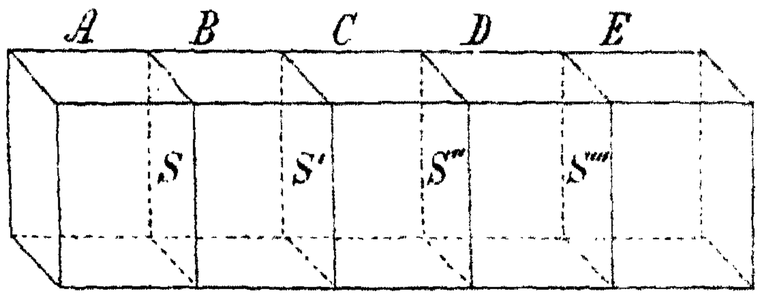
7.



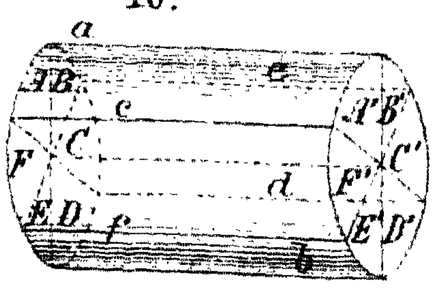
8.



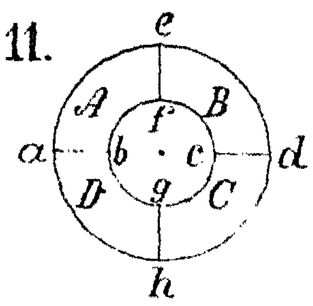
9.



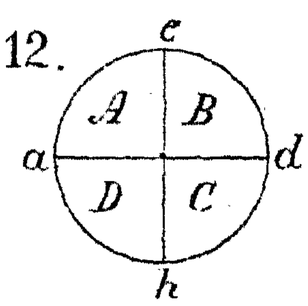
10.



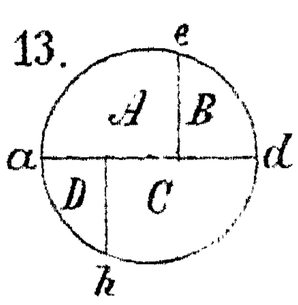
11.



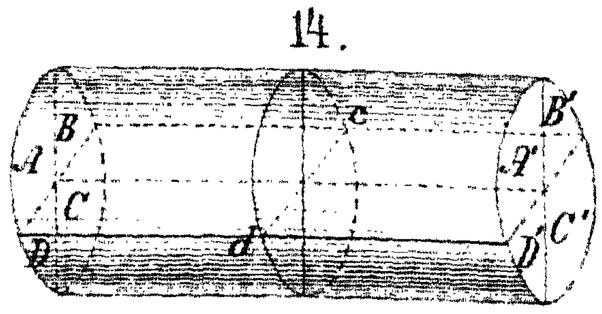
12.



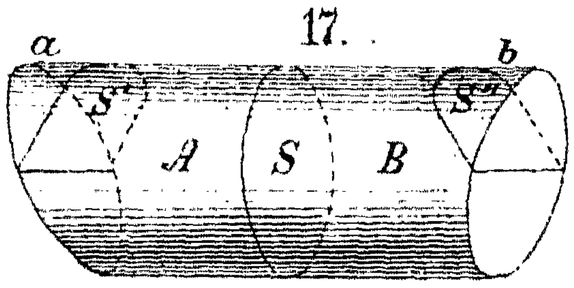
13.



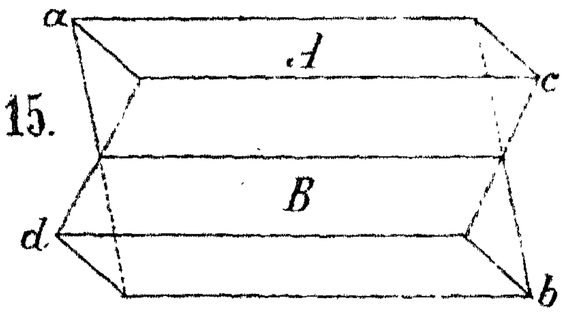
14.



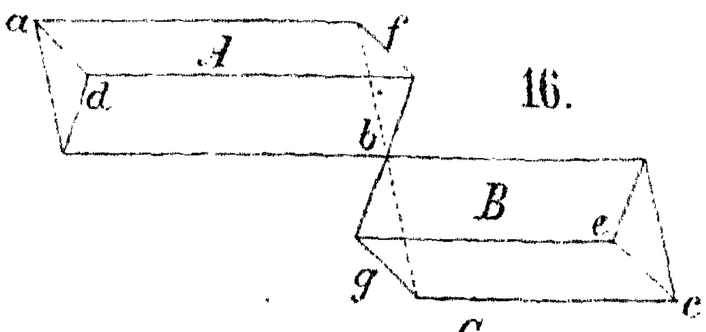
17.



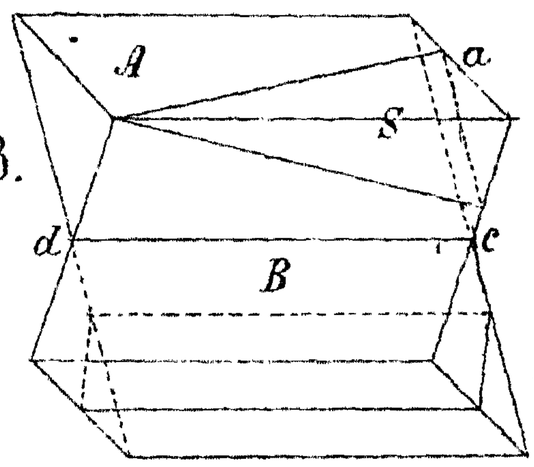
15.



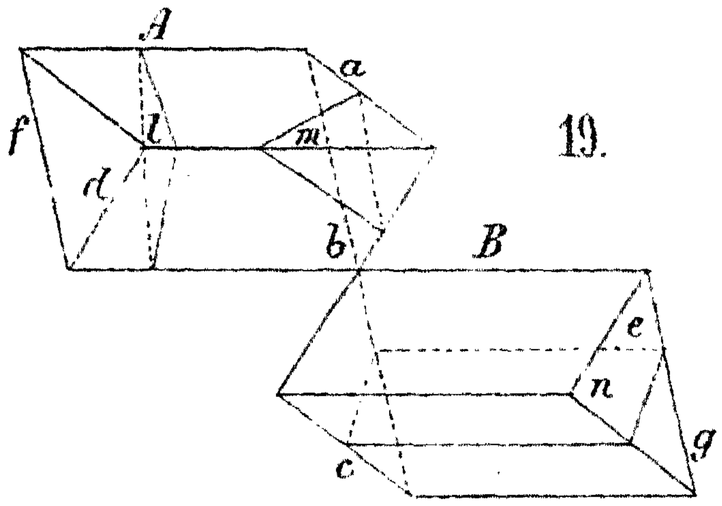
16.



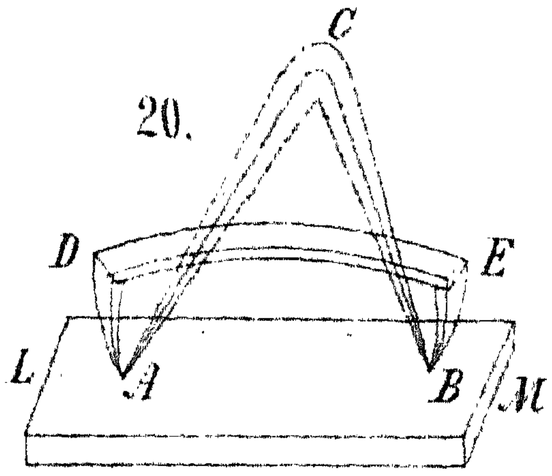
18.



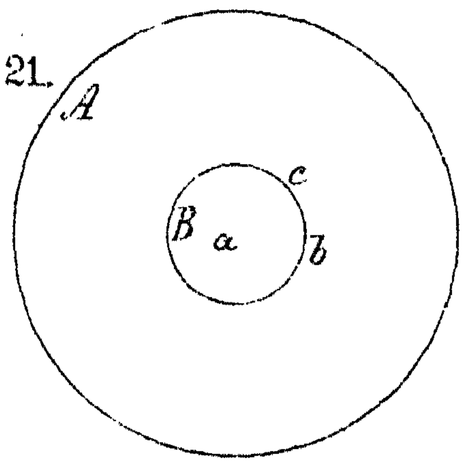
19.



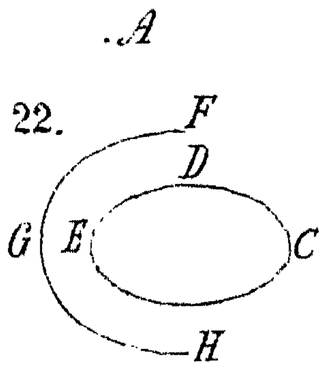
20.



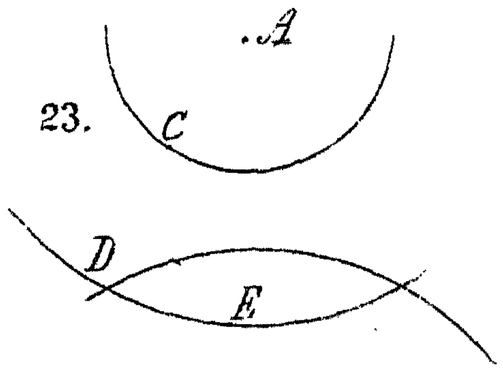
21.



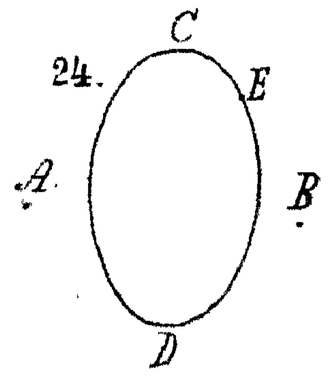
22.



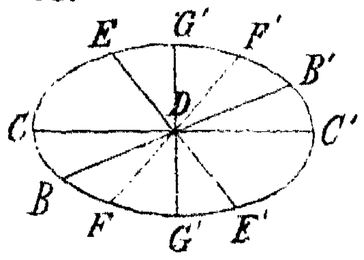
23.



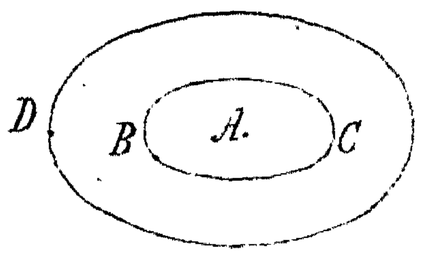
24.



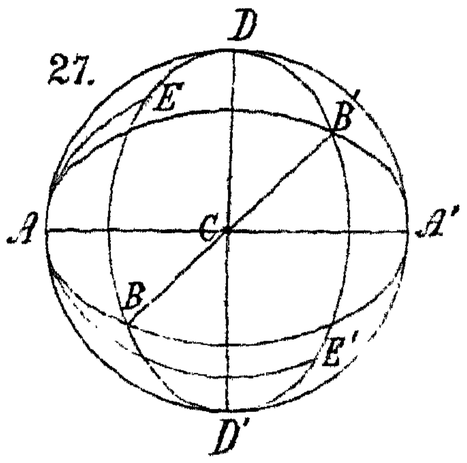
25.



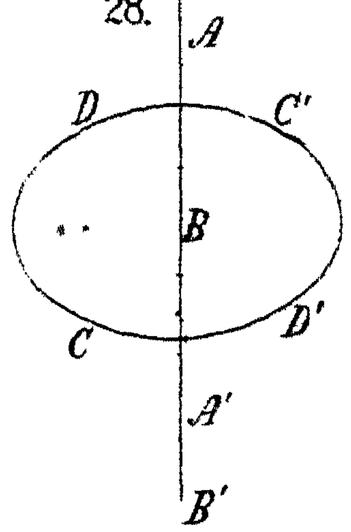
26.



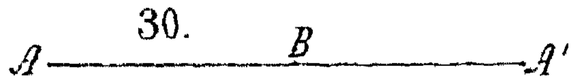
27.



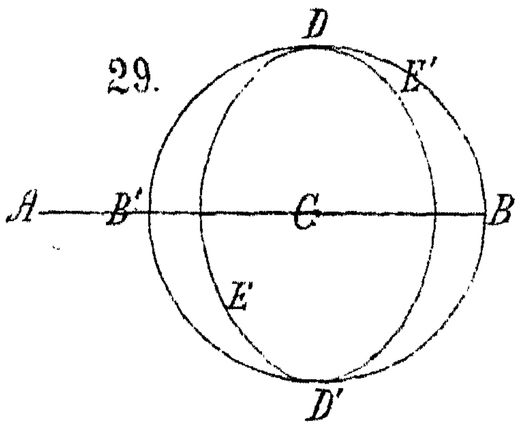
28.



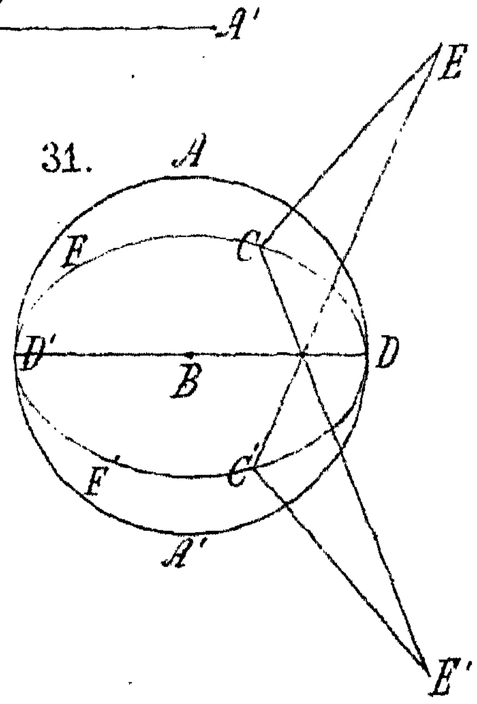
30.



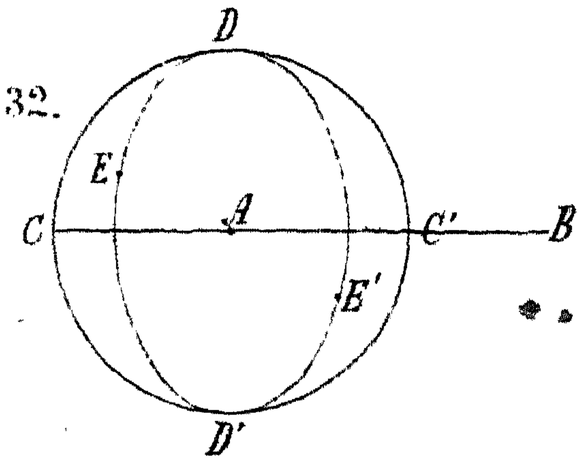
29.



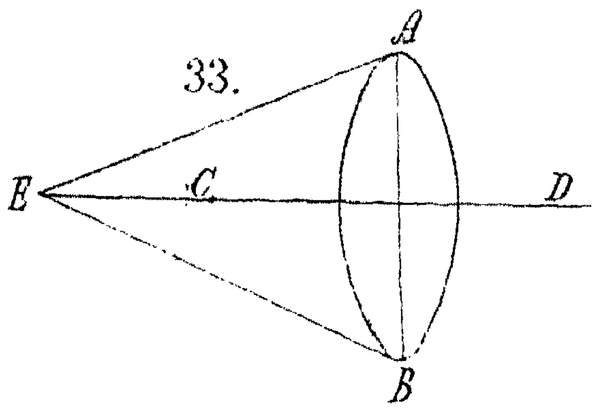
31.



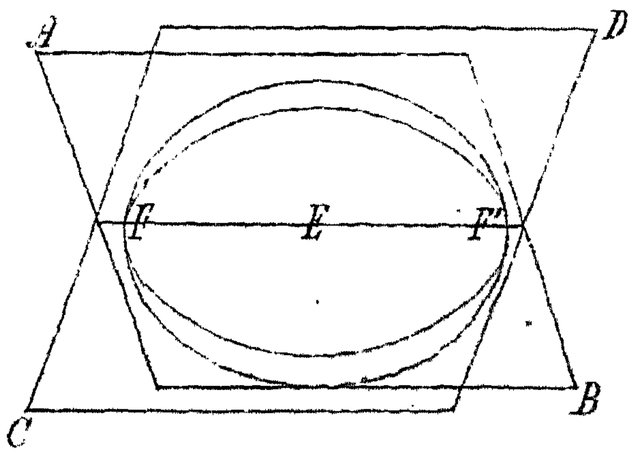
32.



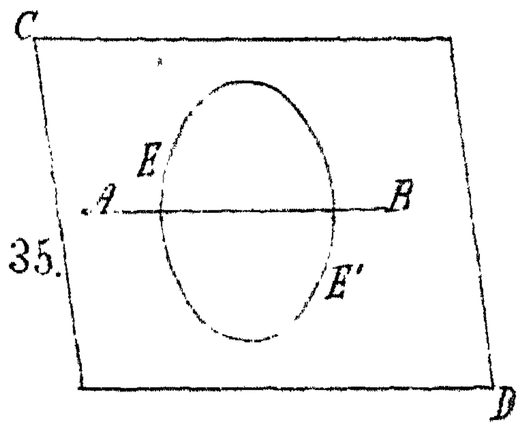
33.



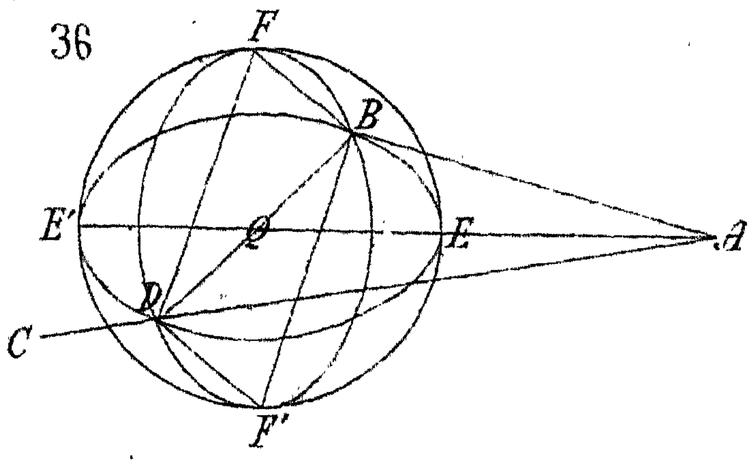
34.



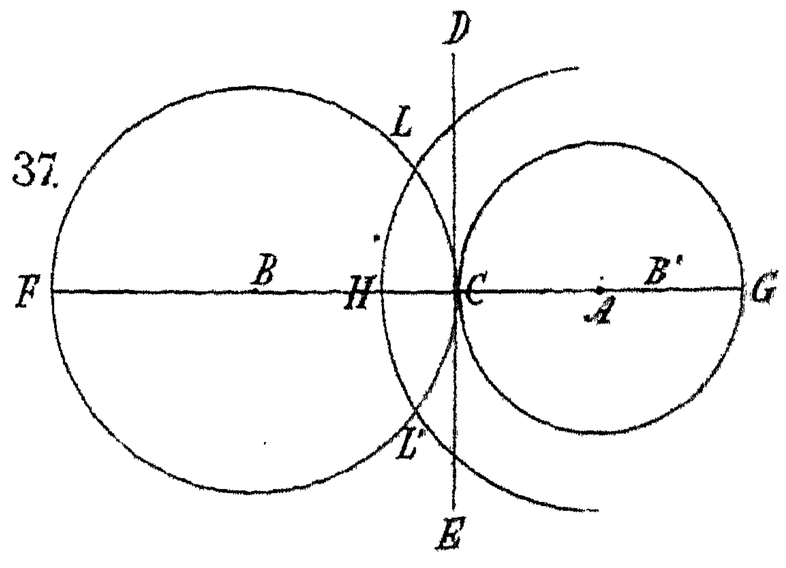
35.



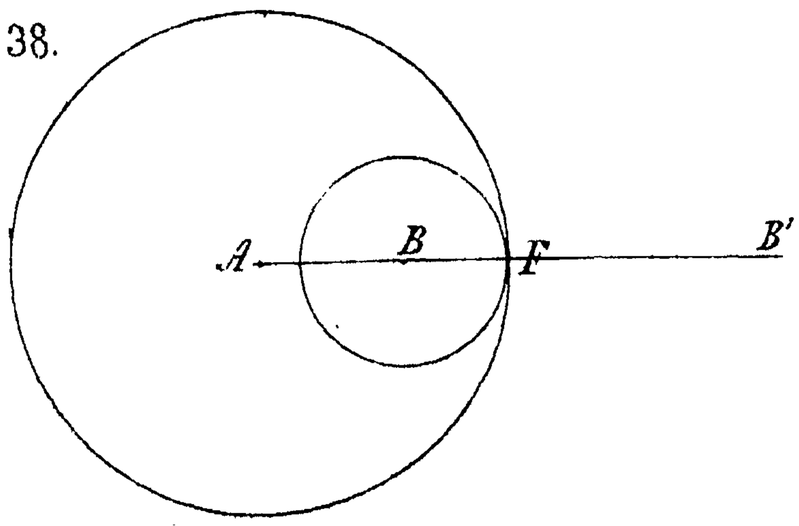
36



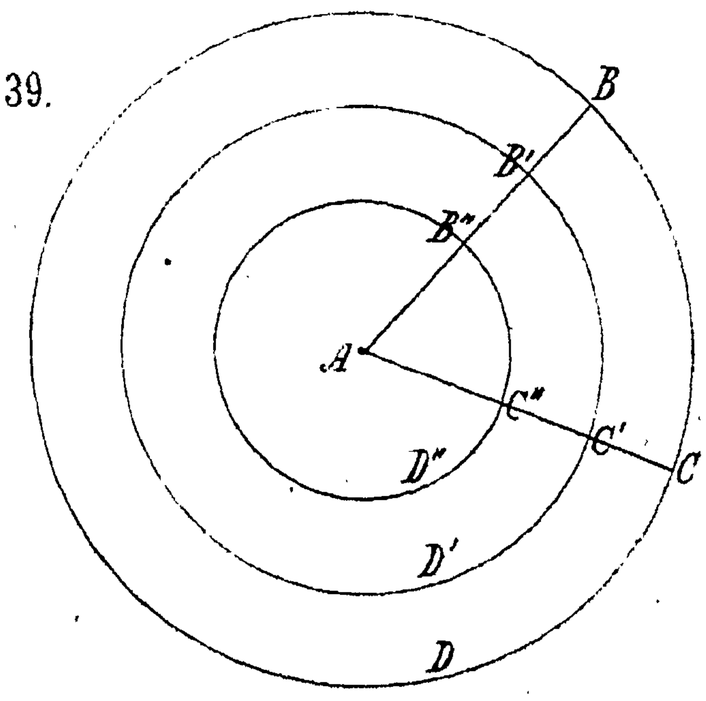
37.



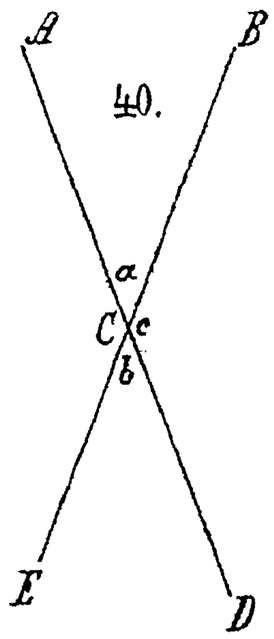
38.



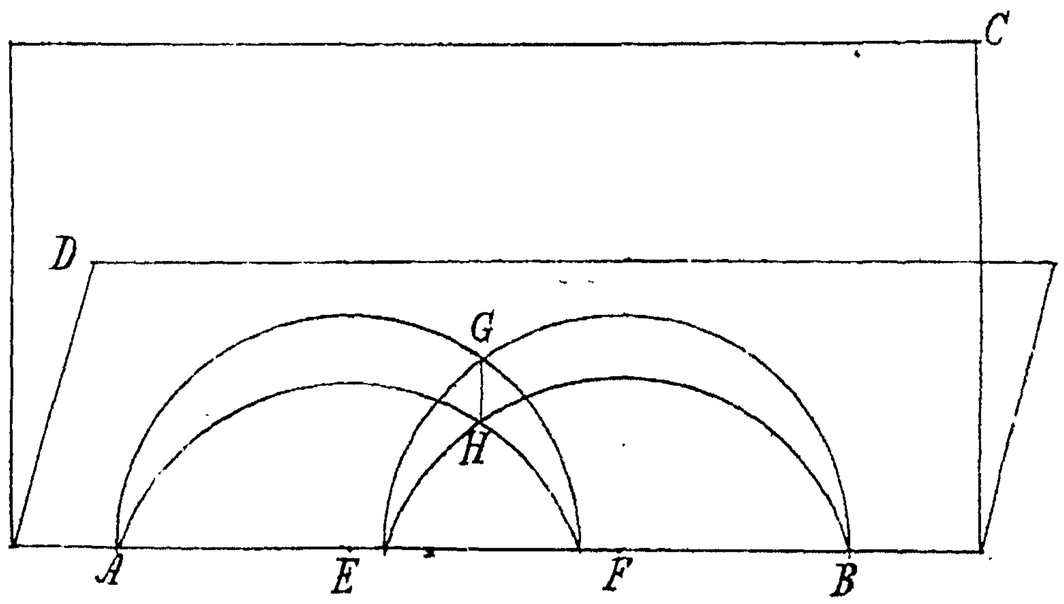
39.



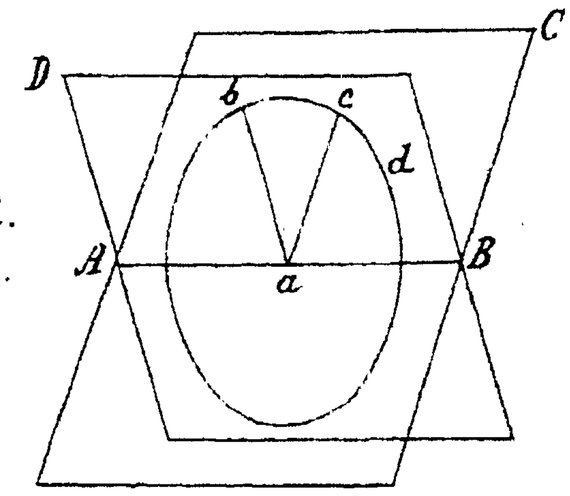
40.



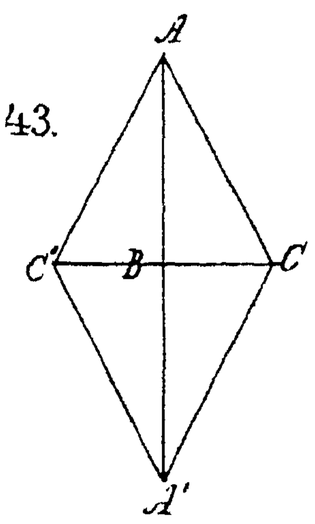
41.



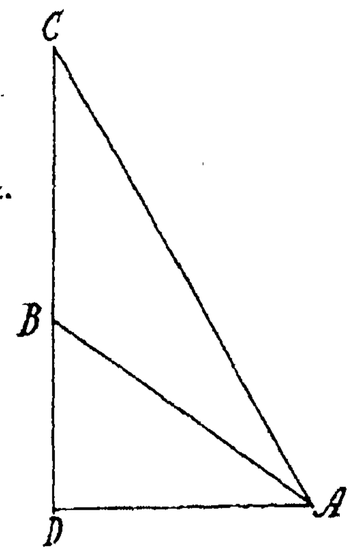
42.



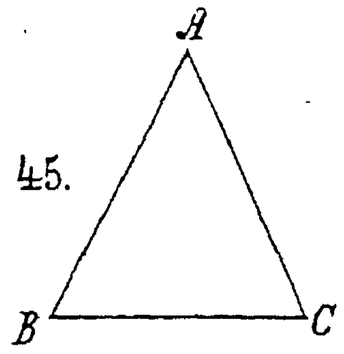
43.



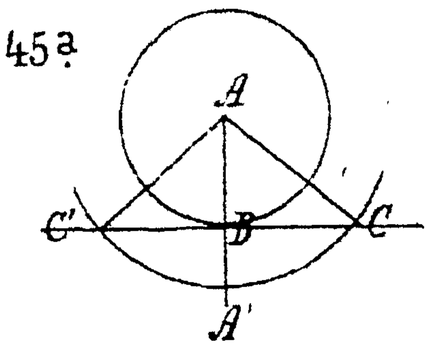
44.



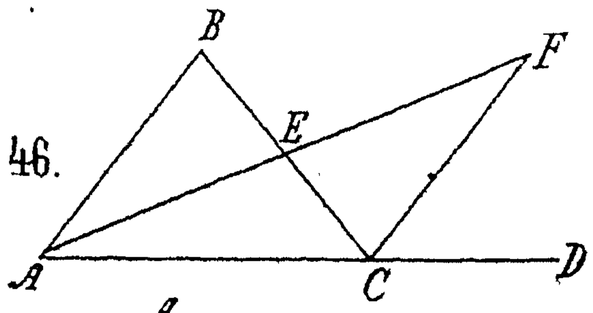
45.



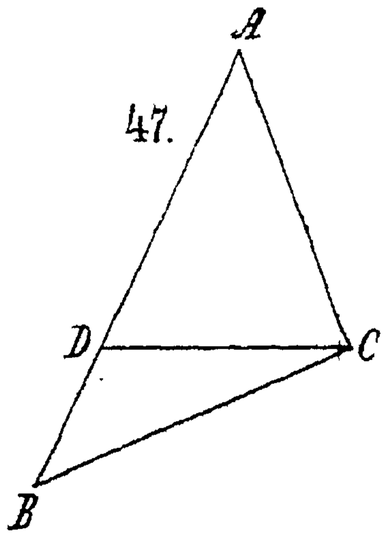
45a.



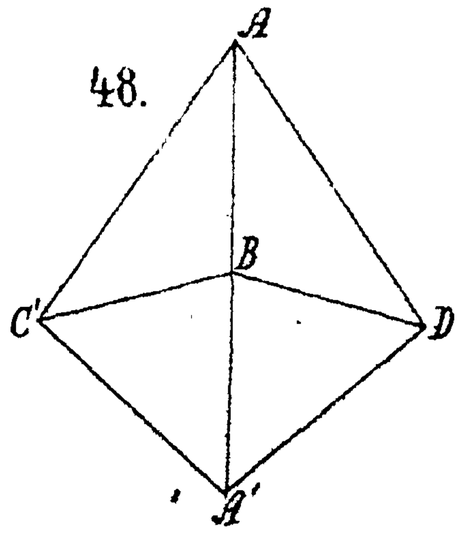
46.



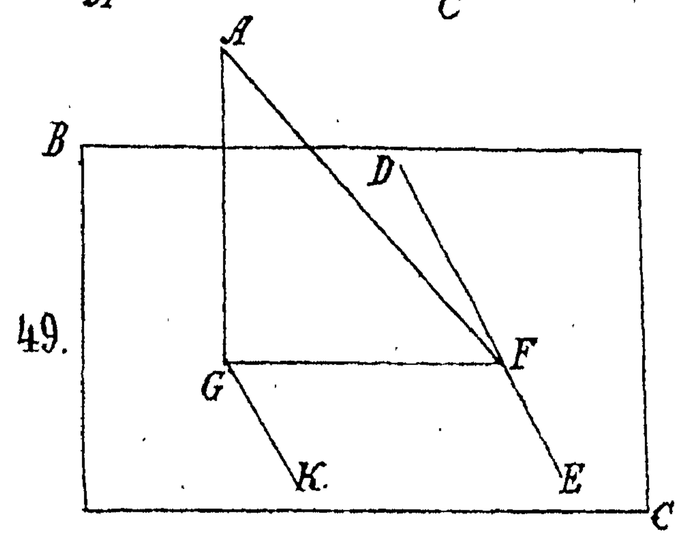
47.



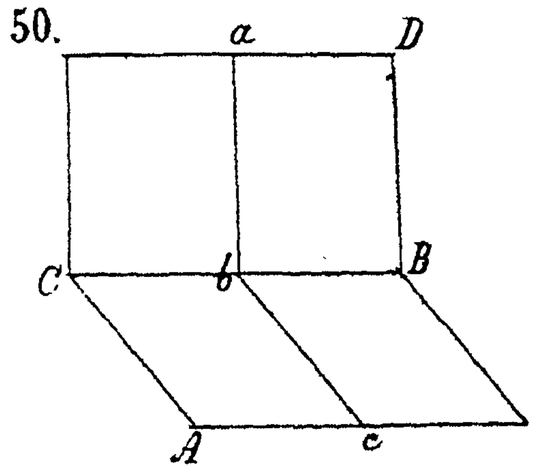
48.



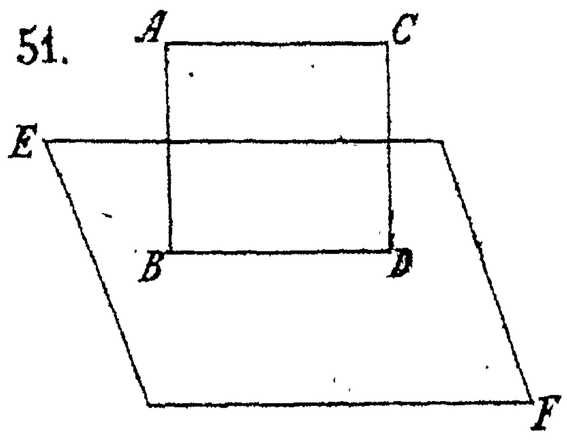
49.



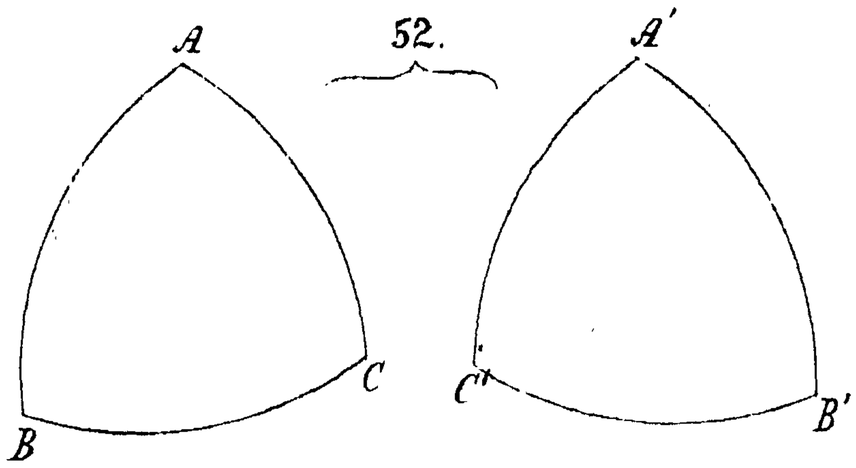
50.



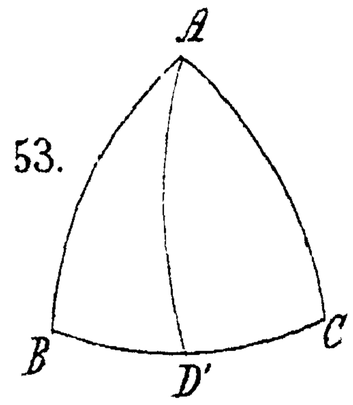
51.



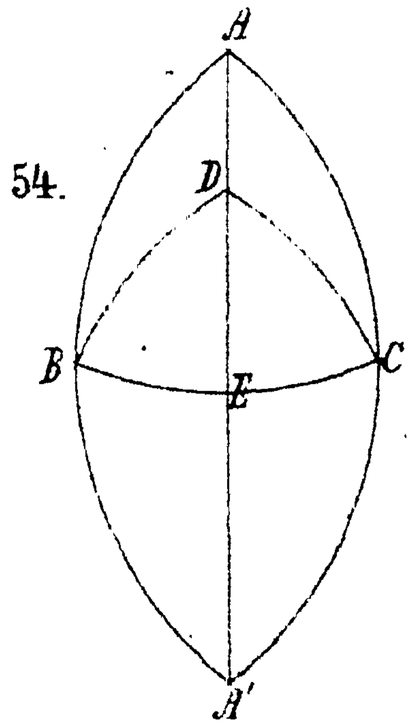
52.



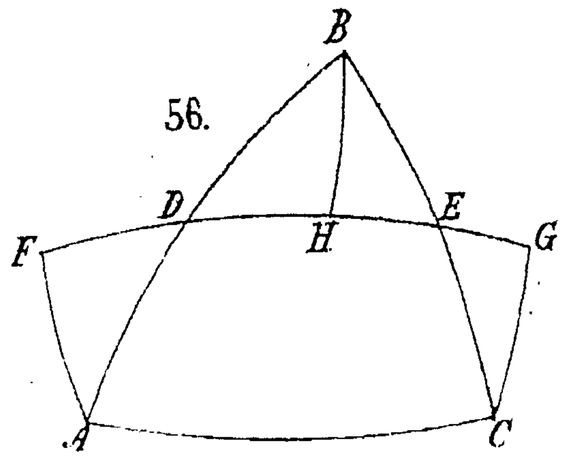
53.



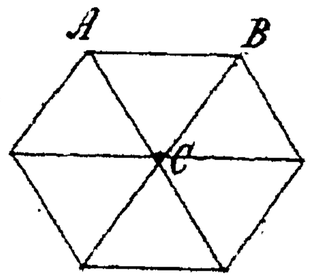
54.



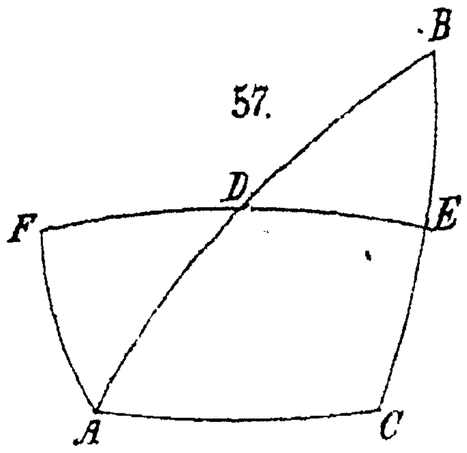
56.



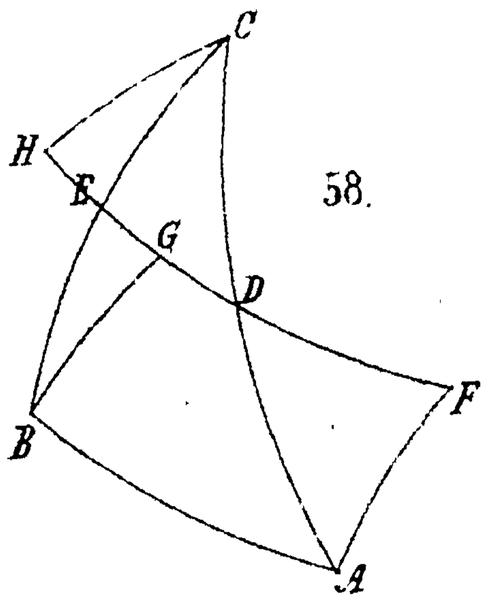
55.



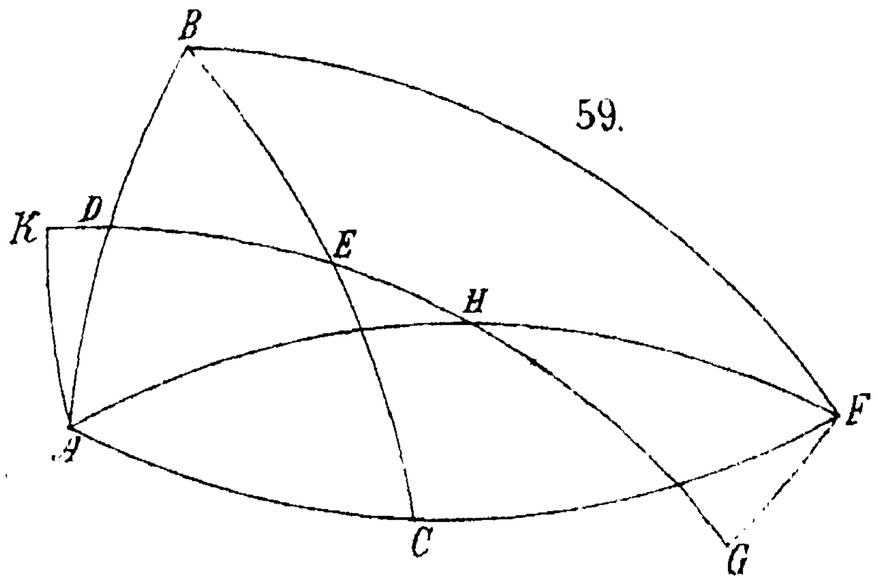
57.



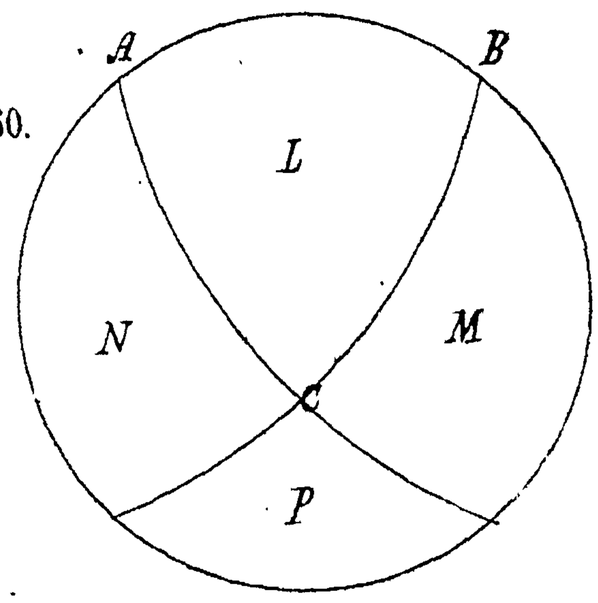
58.



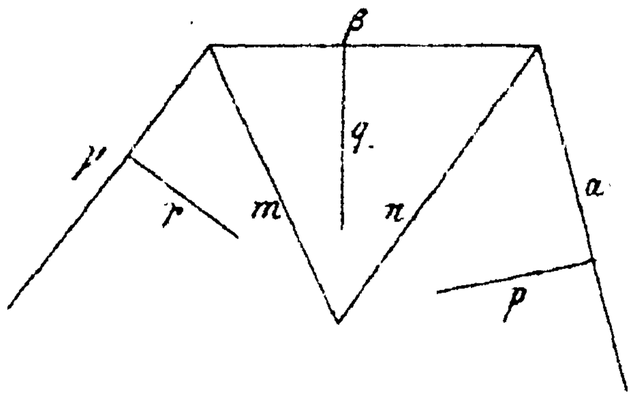
59.



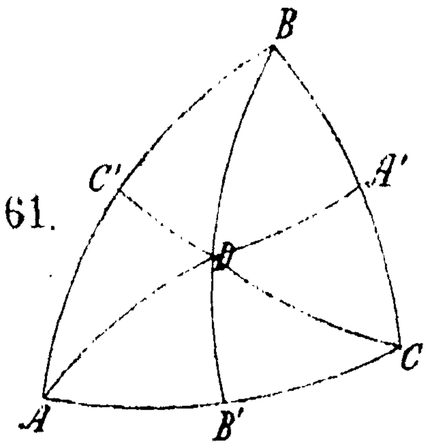
60.



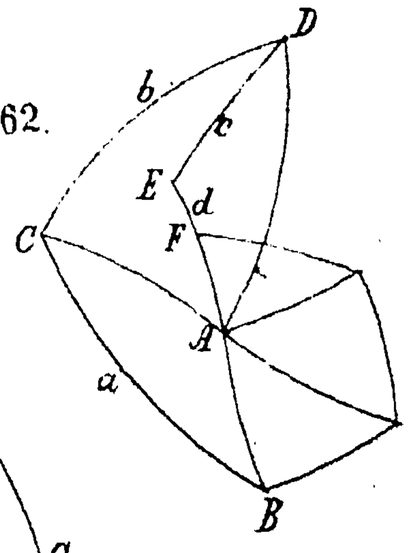
63.



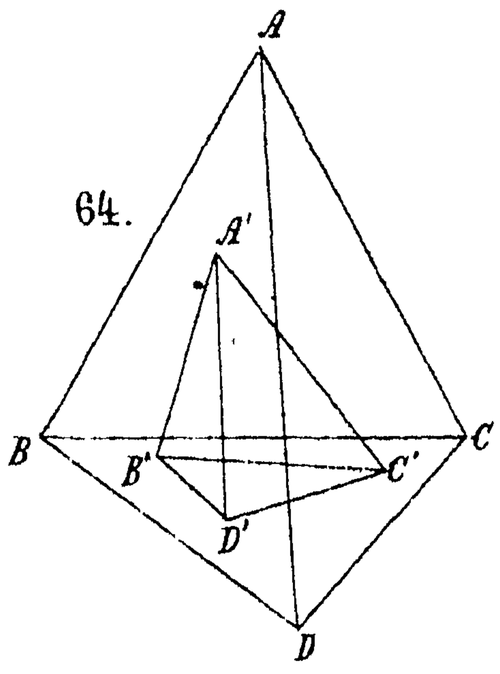
61.



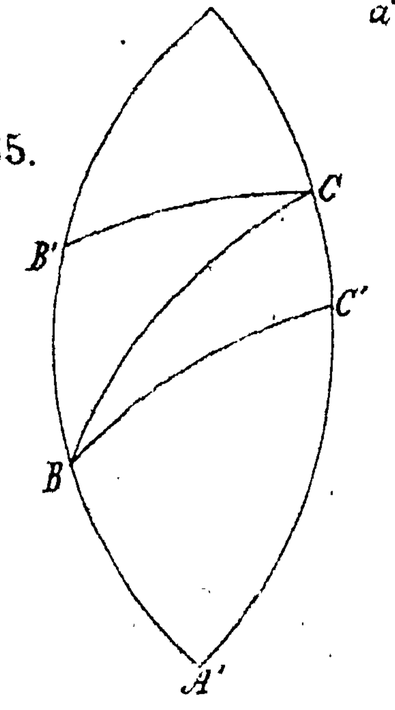
62.



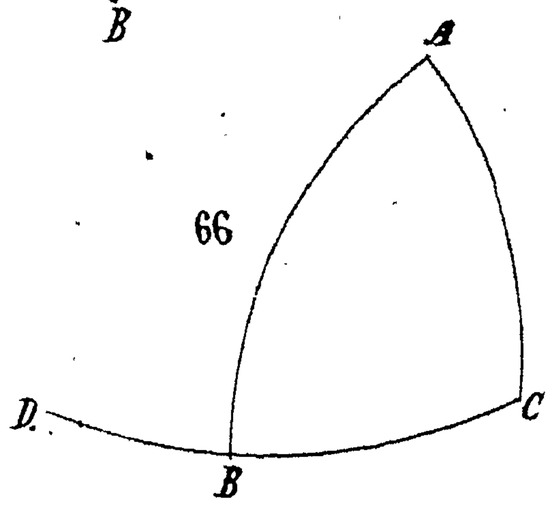
64.



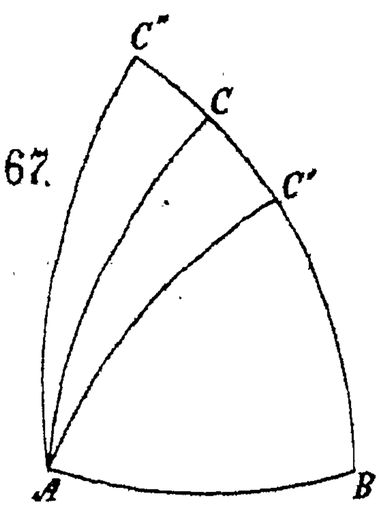
65.



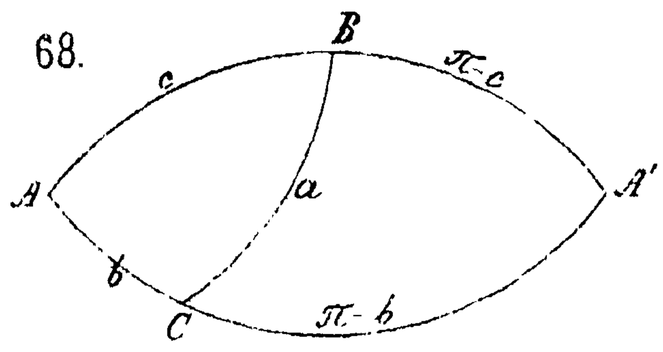
66



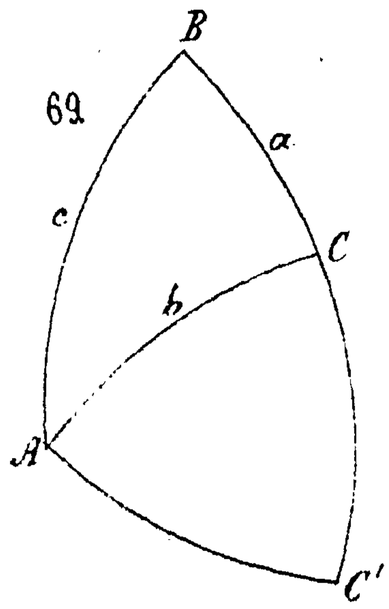
67.



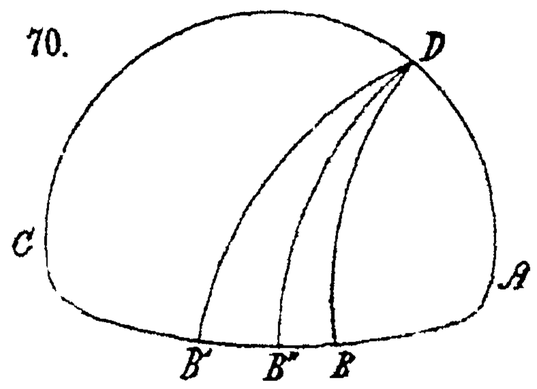
68.



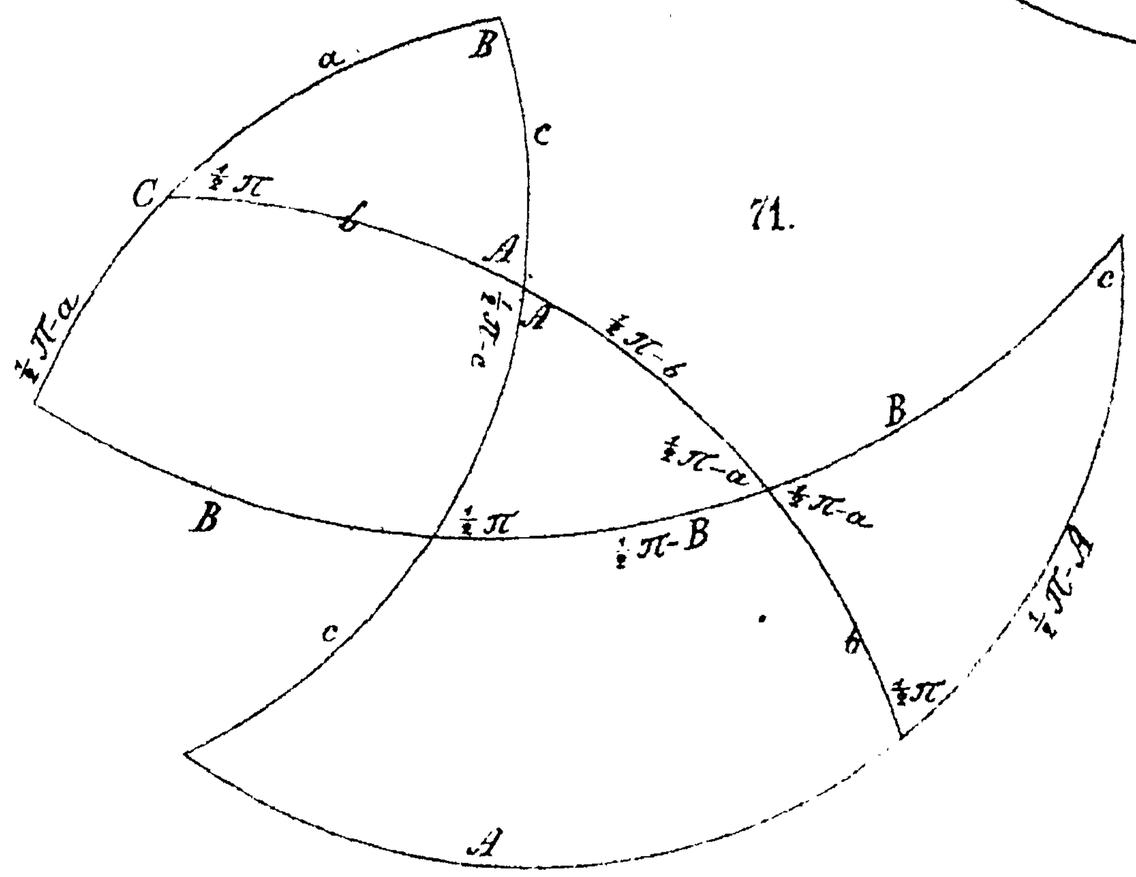
69.



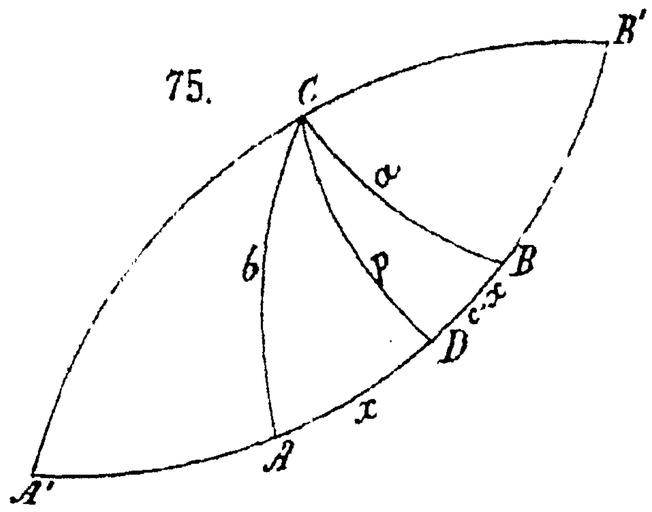
70.



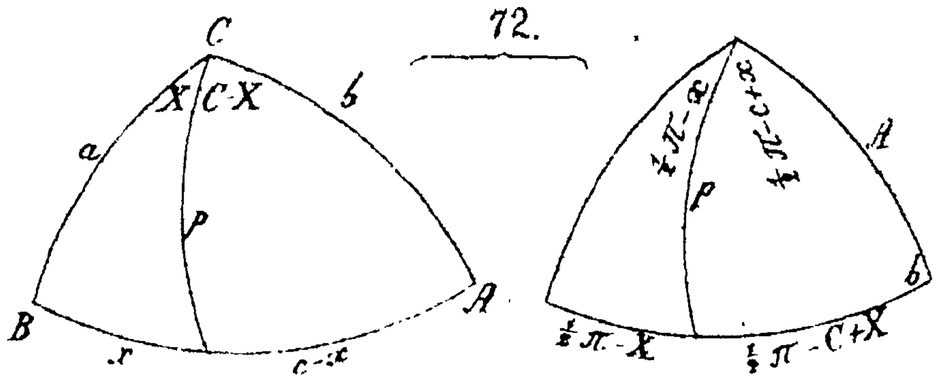
71.



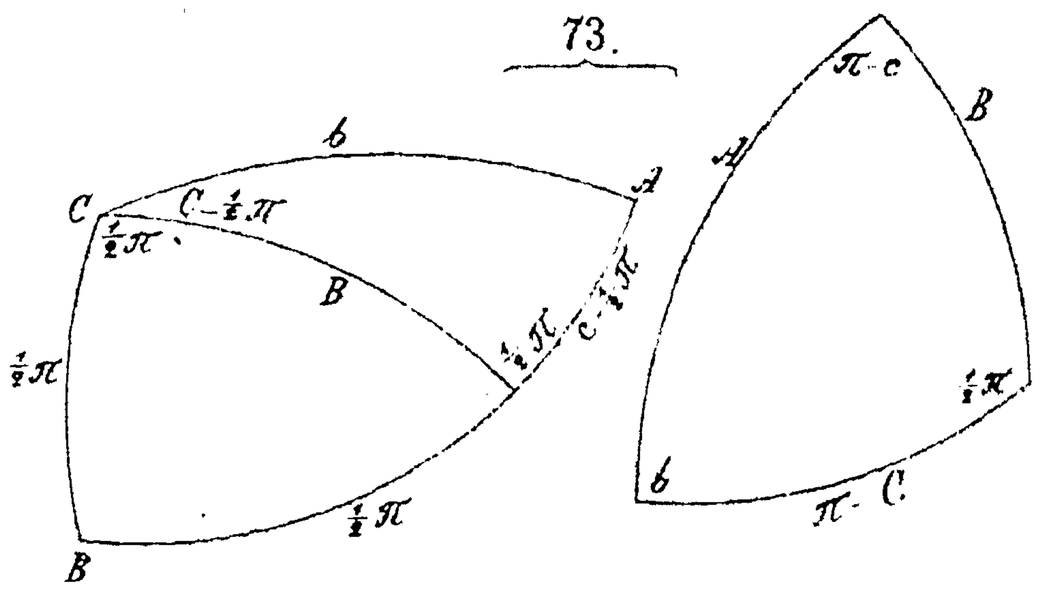
75.



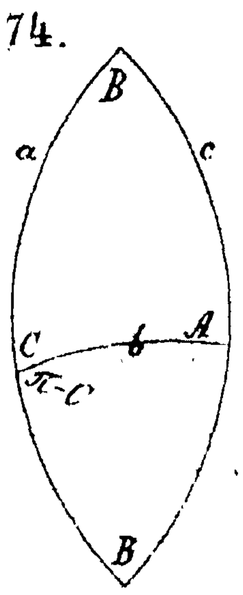
72.



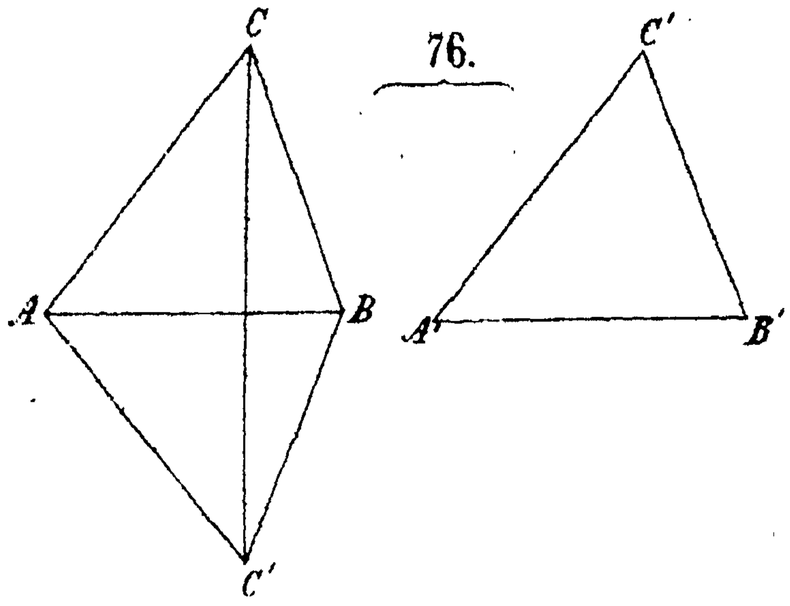
73.



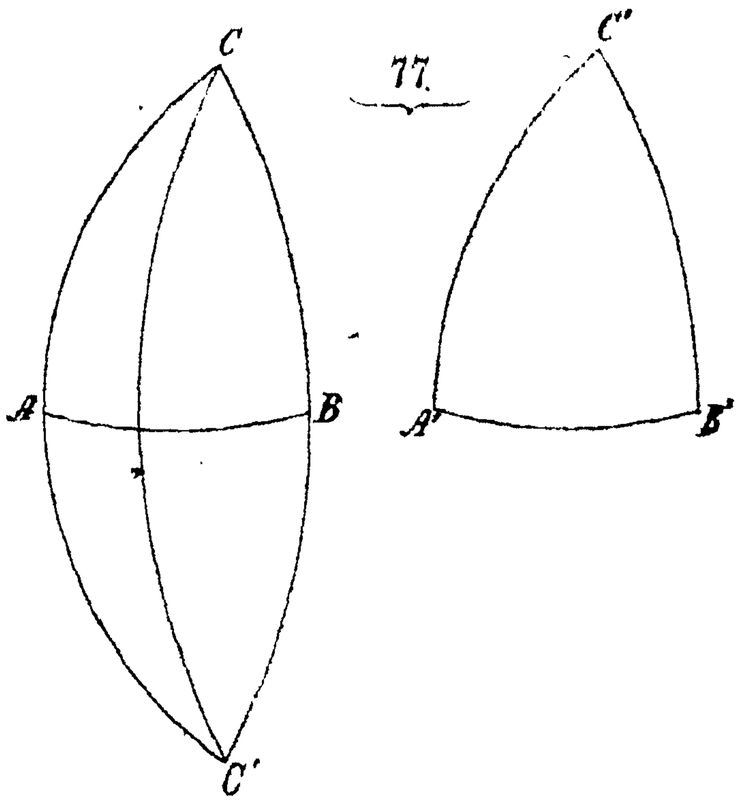
74.



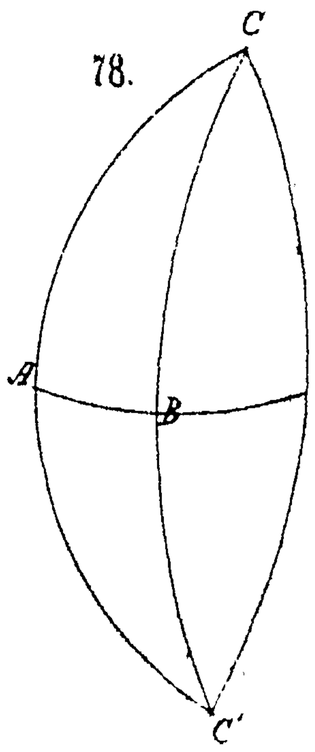
76.



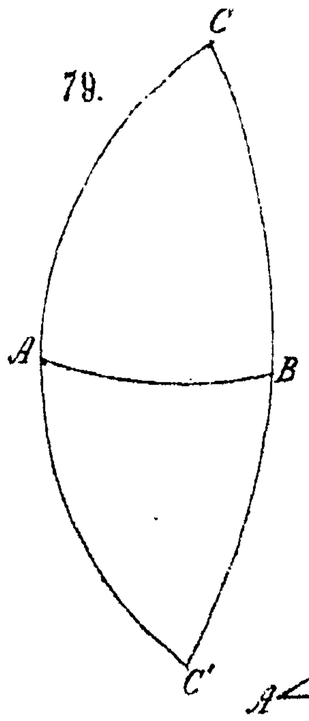
77.

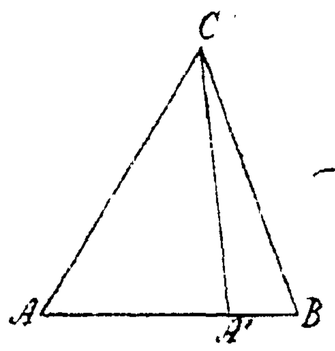


78.

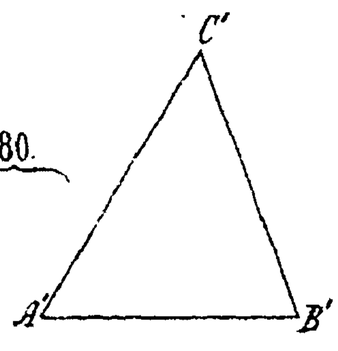


79.

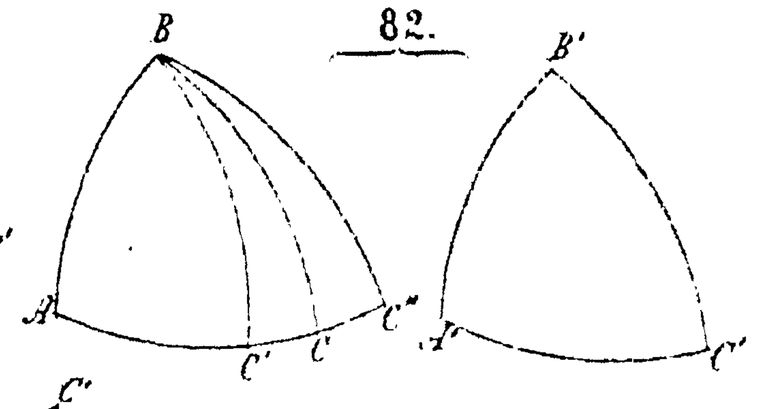


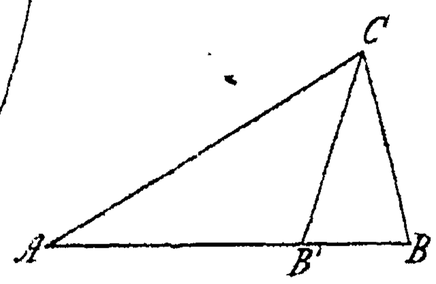


80.

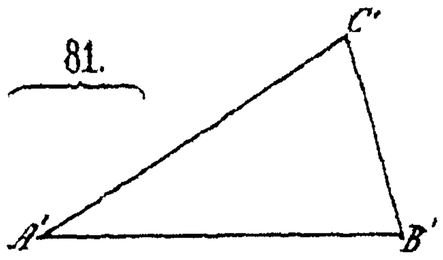


82.

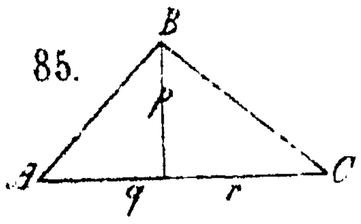


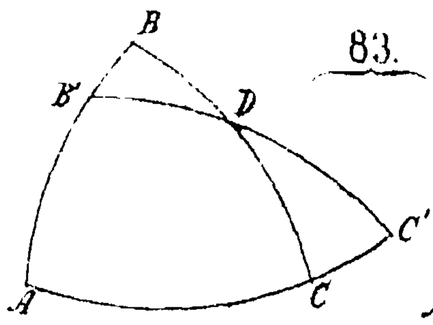


81.

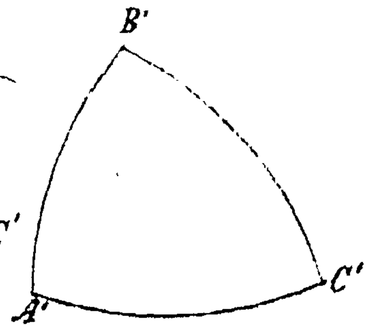


85.

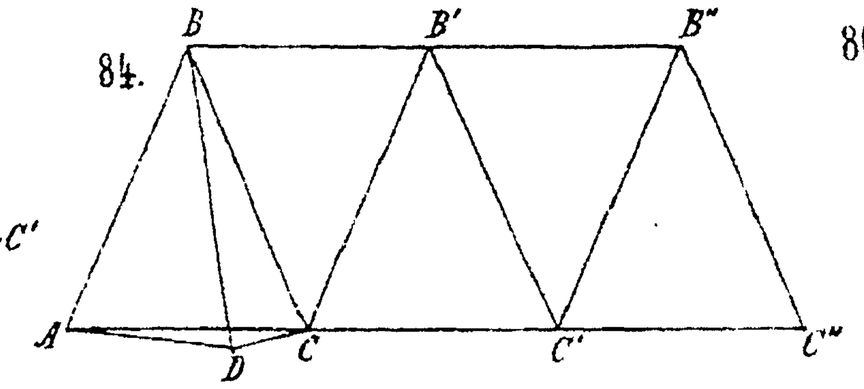




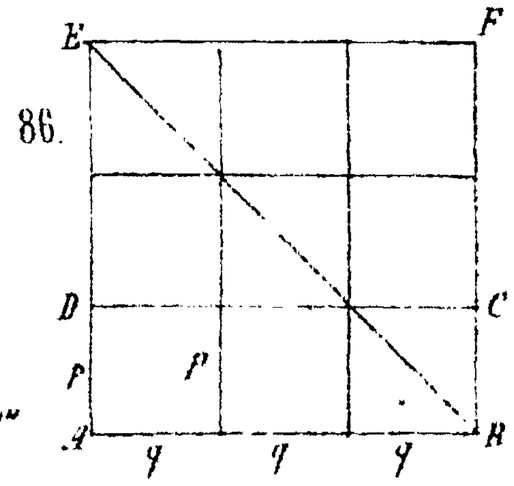
83.



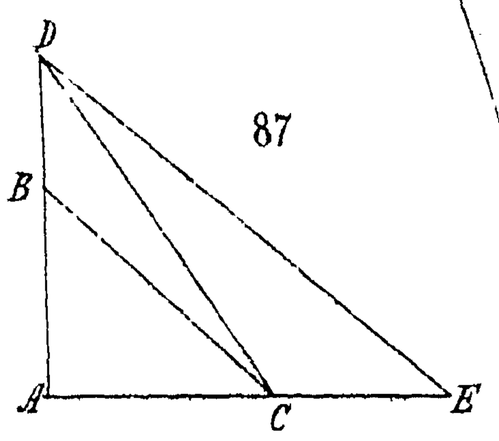
84.



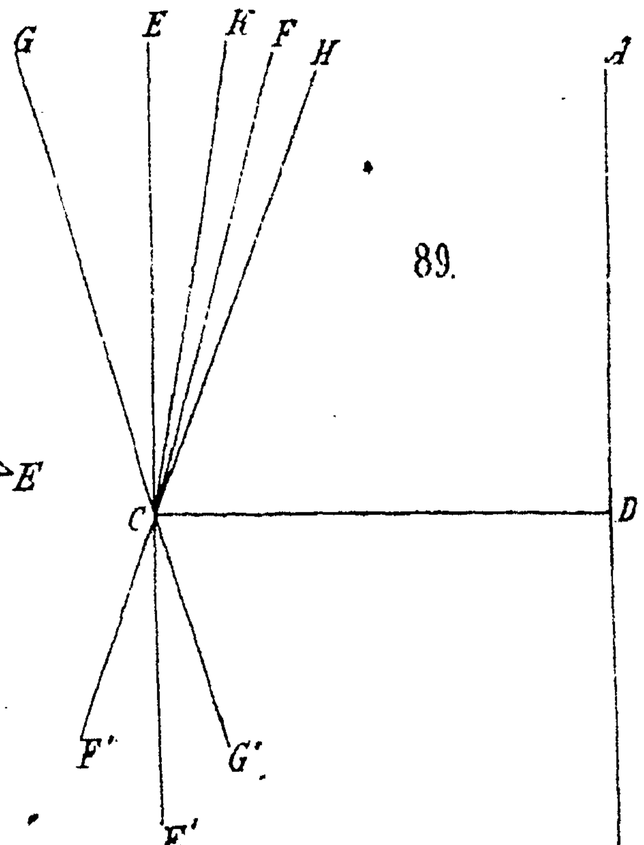
86.

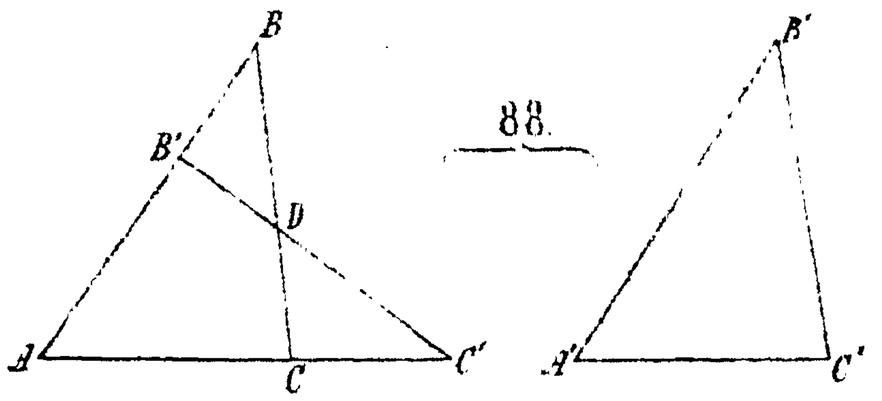


87



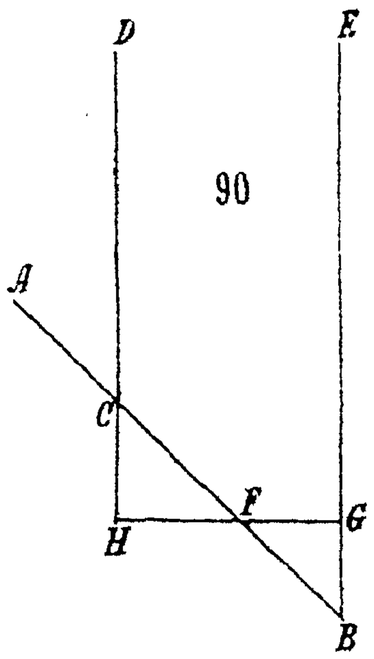
89.



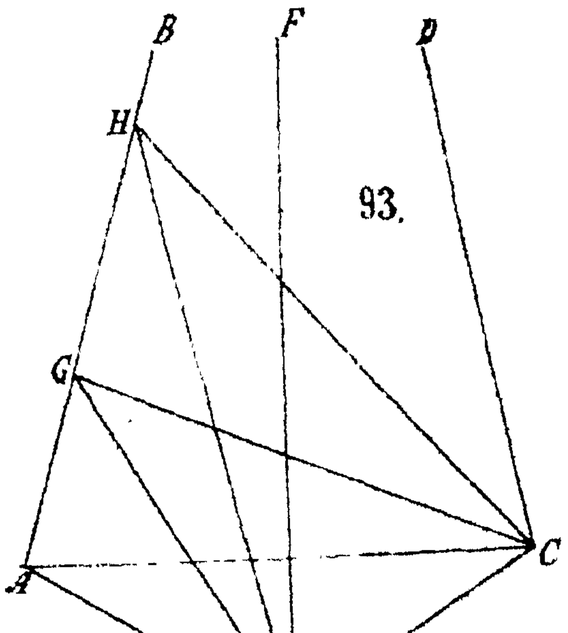


88.

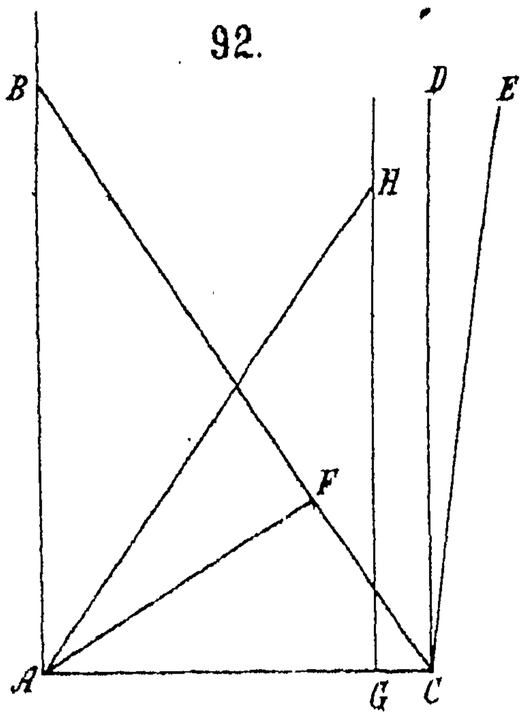
90



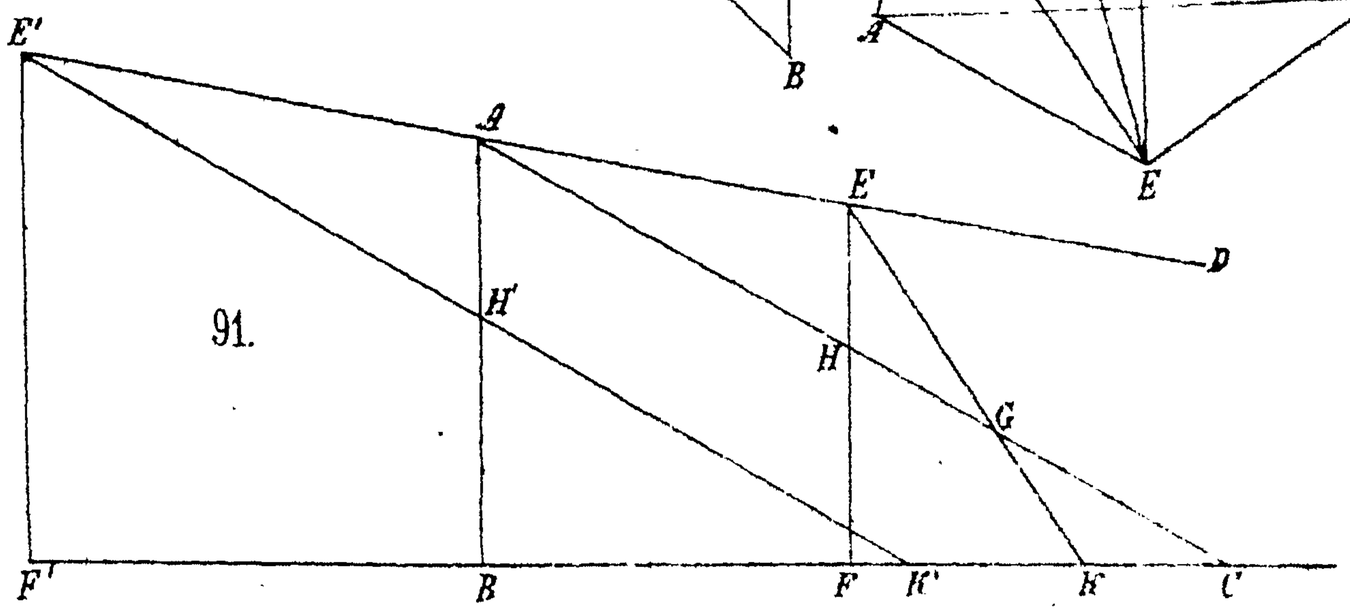
93.



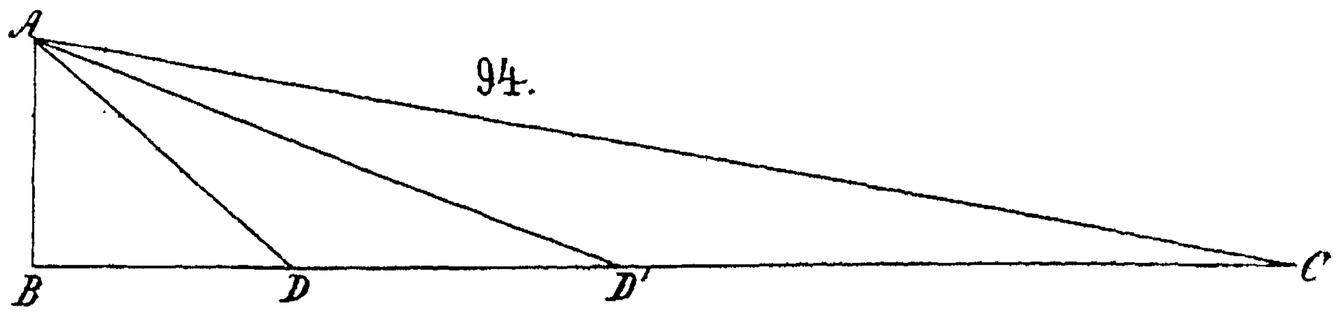
92.



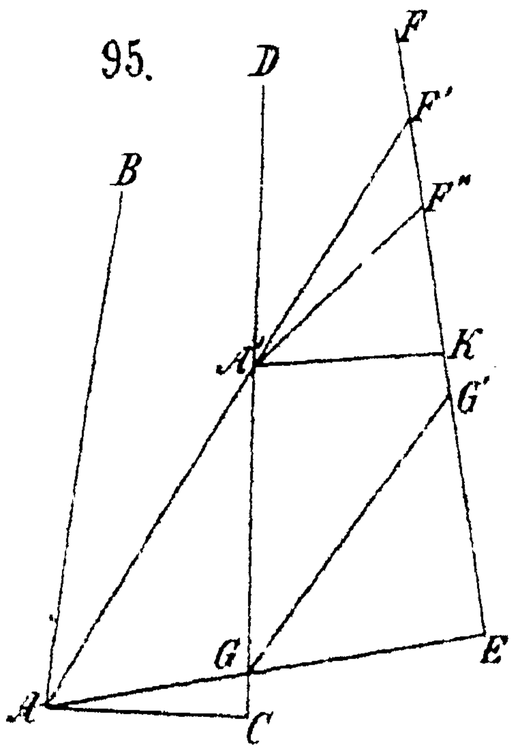
91.



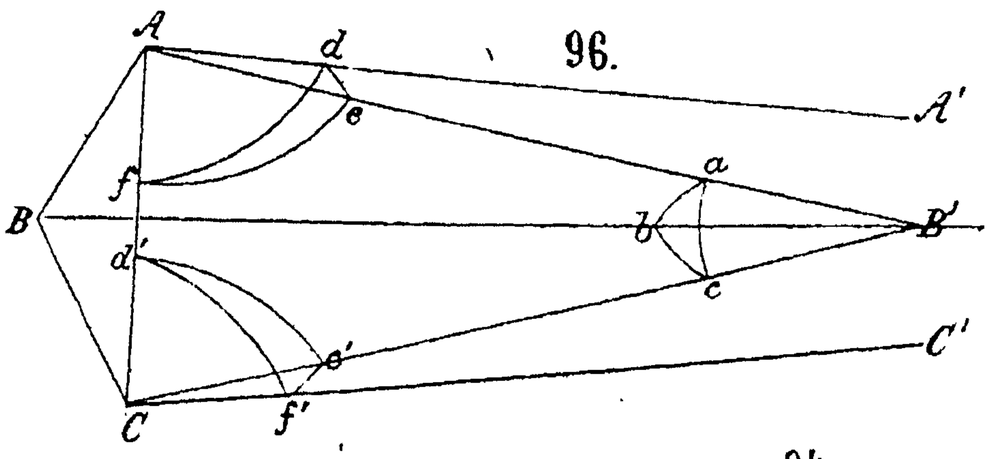
94.



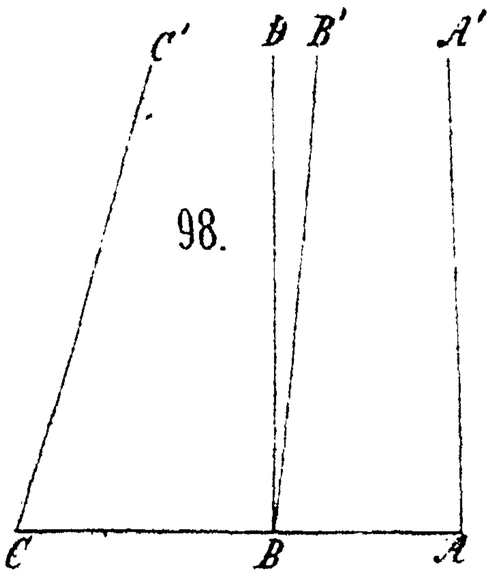
95.



96.

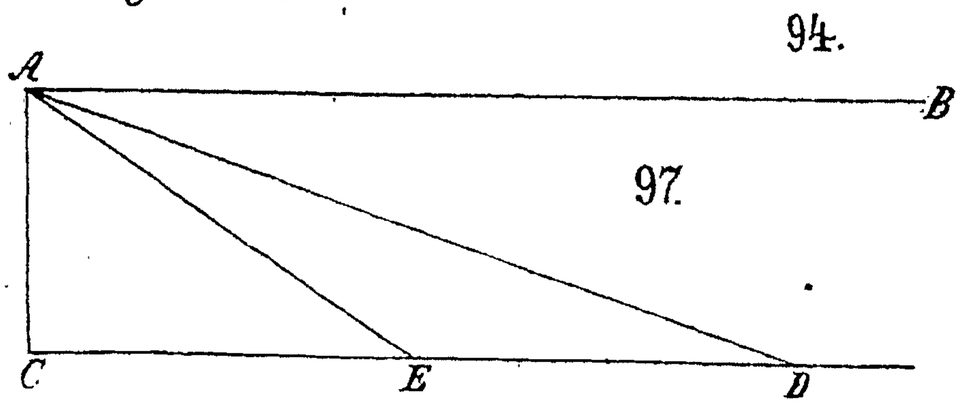


98.

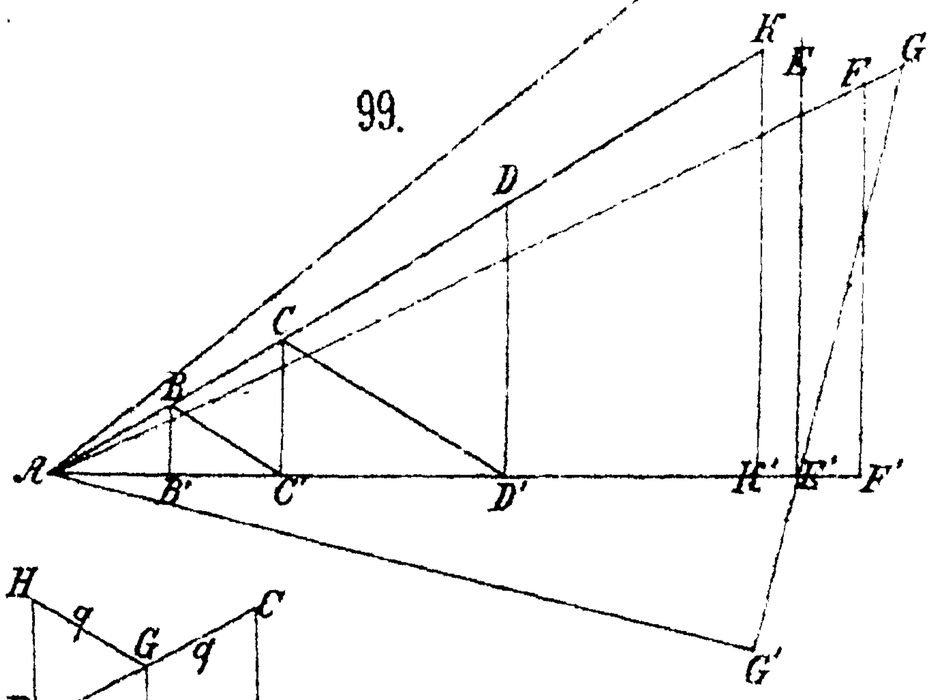


94.

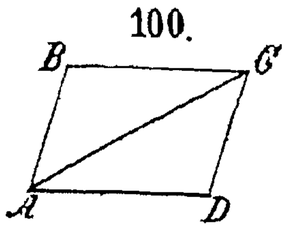
97.



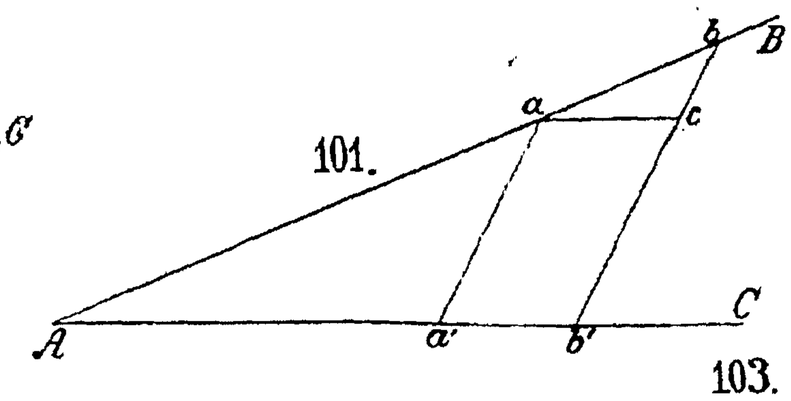
99.



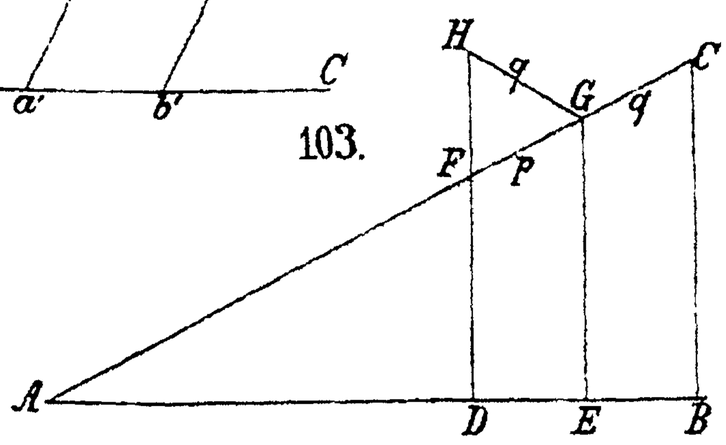
100.



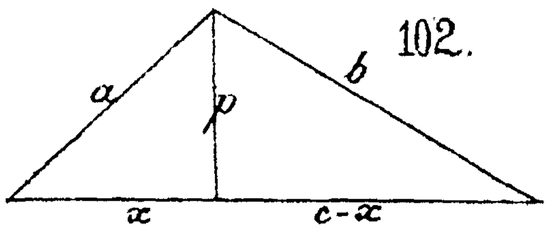
101.



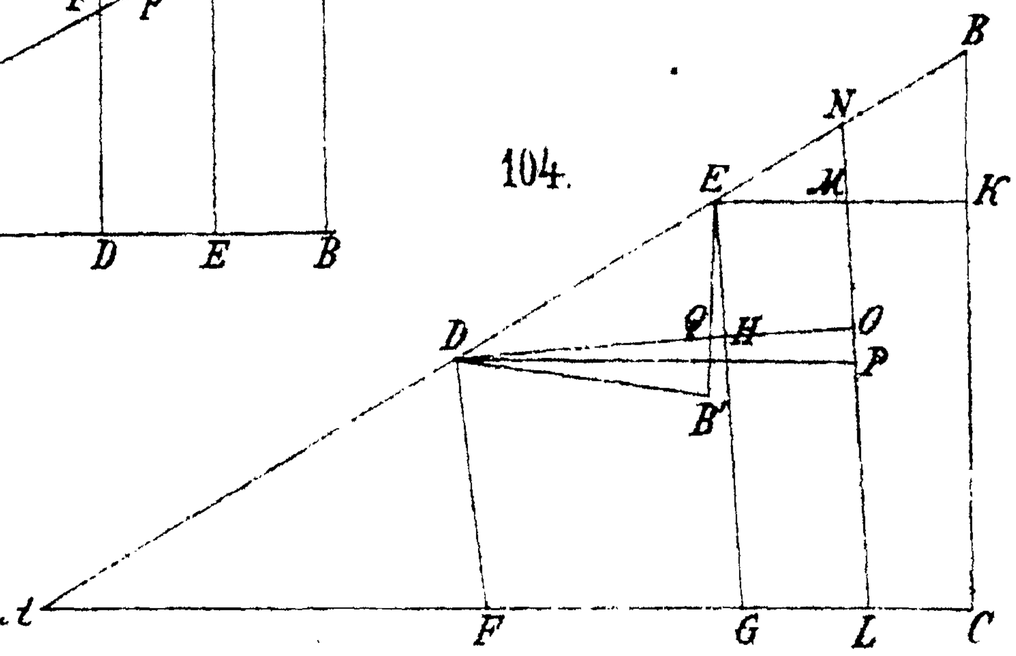
103.



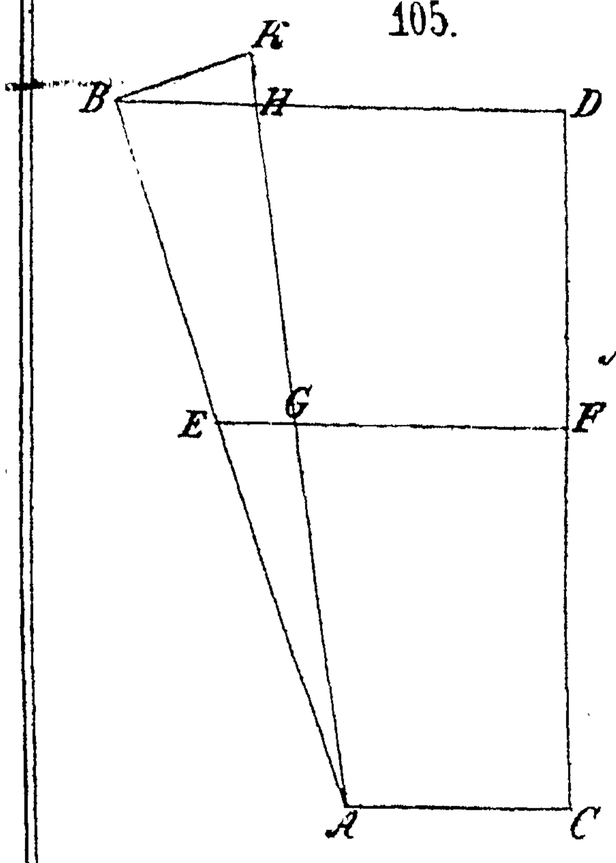
102.



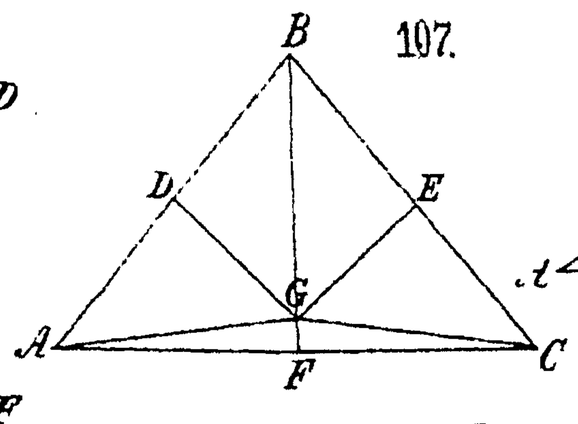
104.



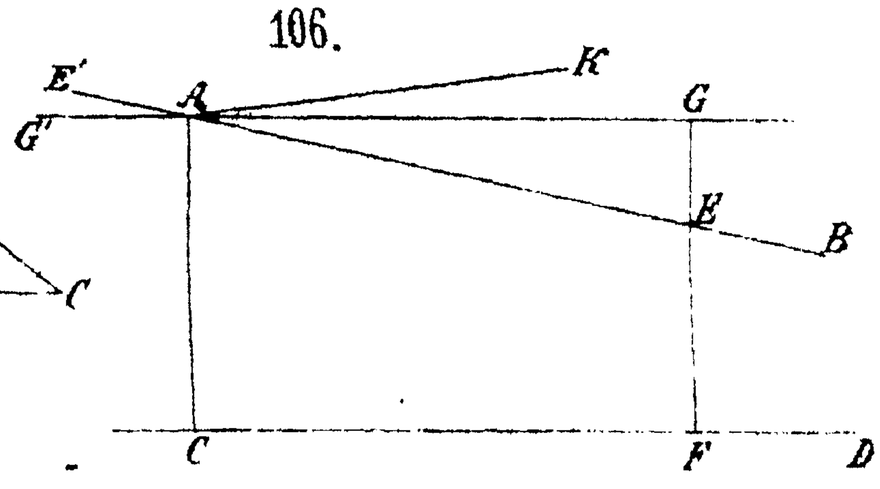
105.



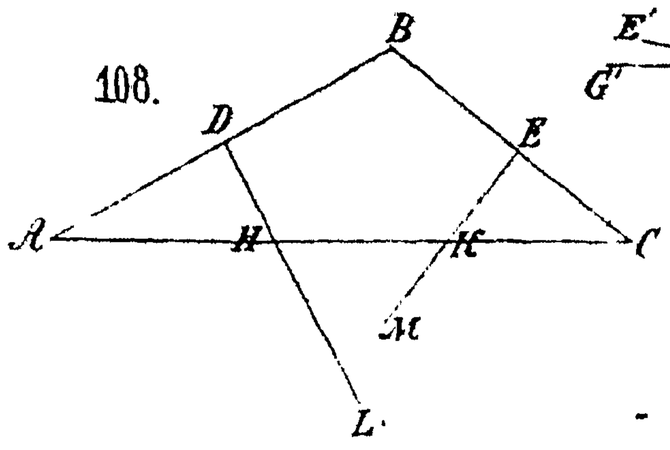
107.



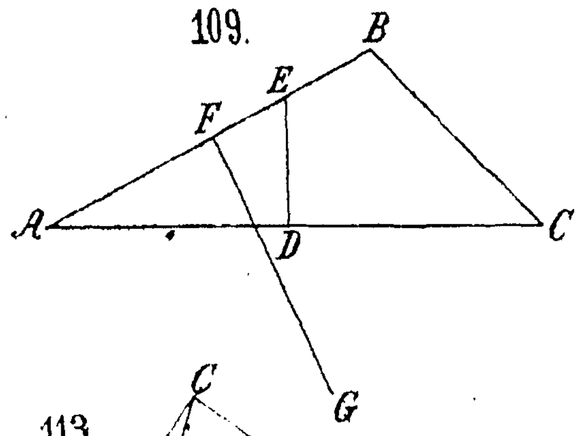
106.



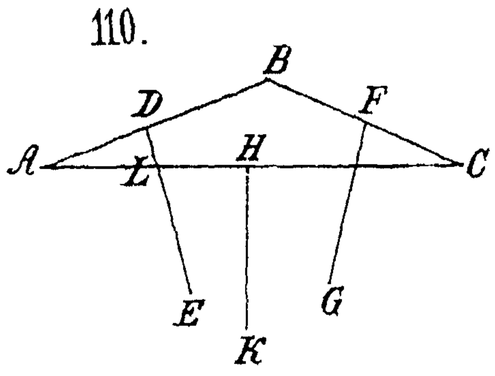
108.



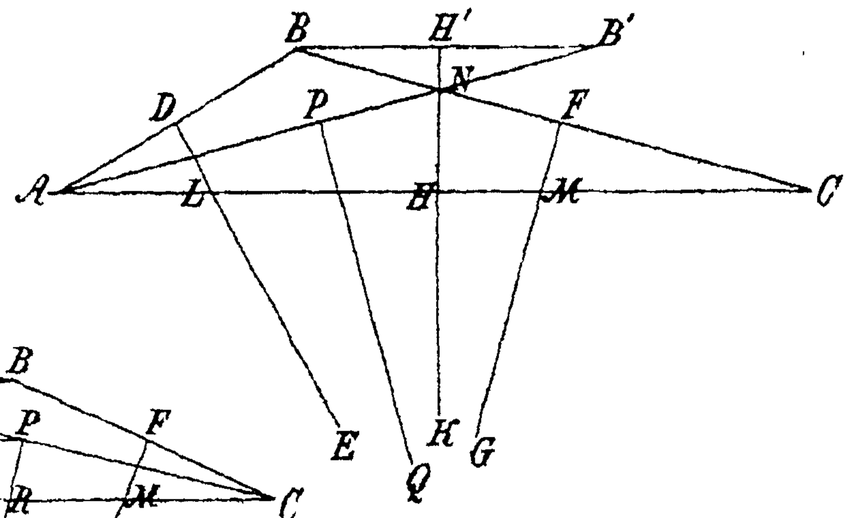
109.



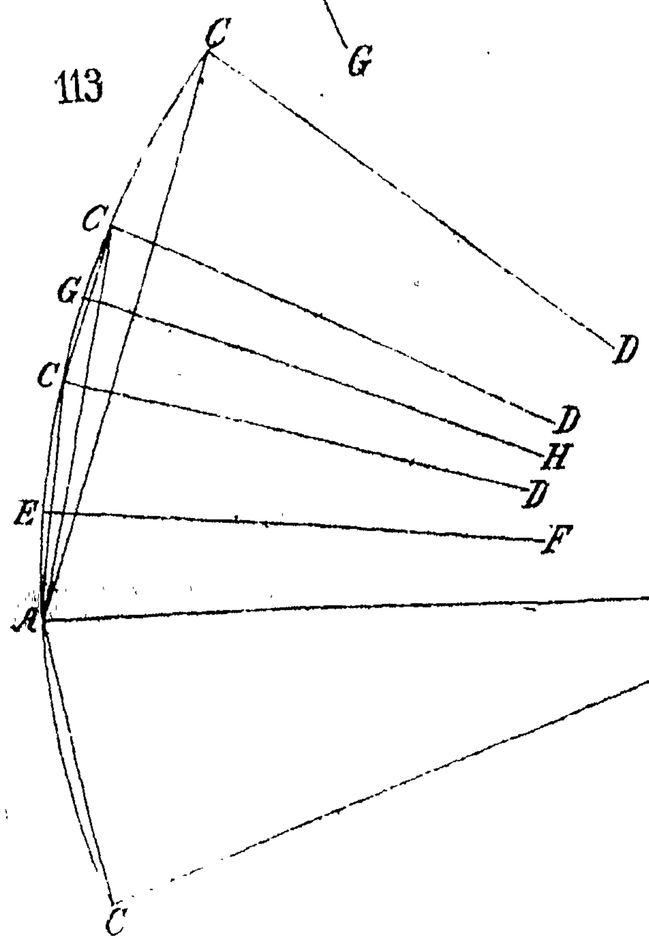
110.



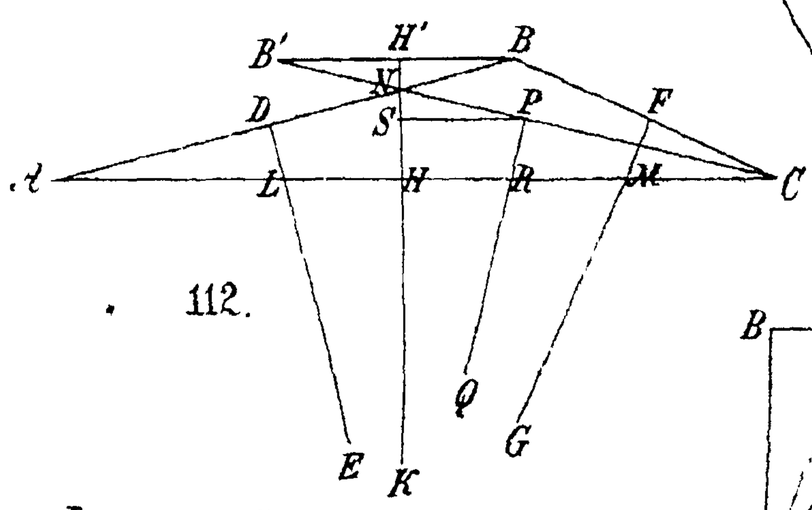
111.

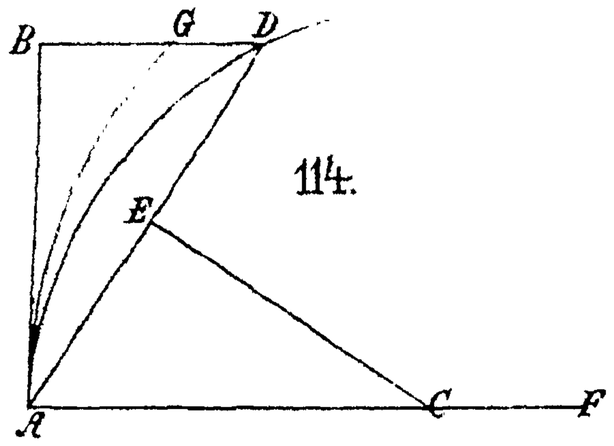


113



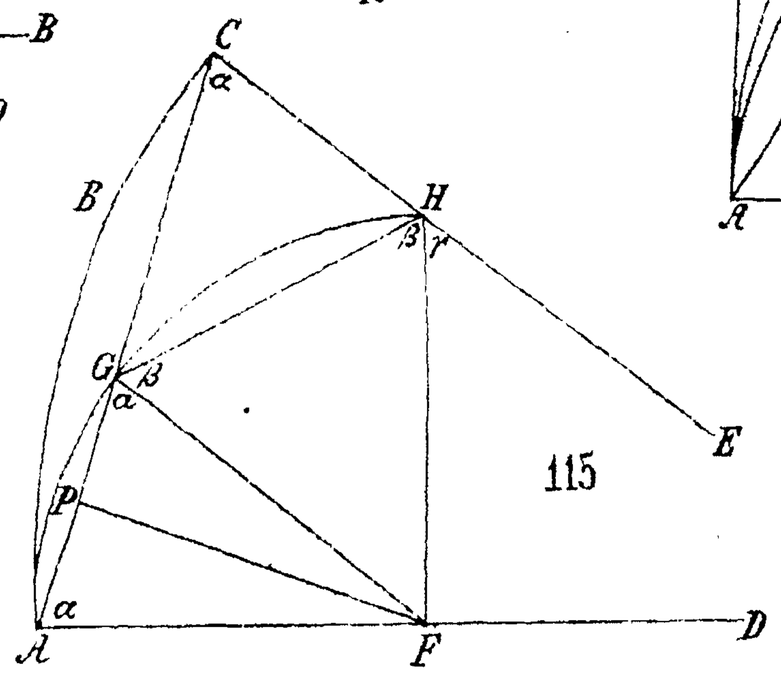
112.



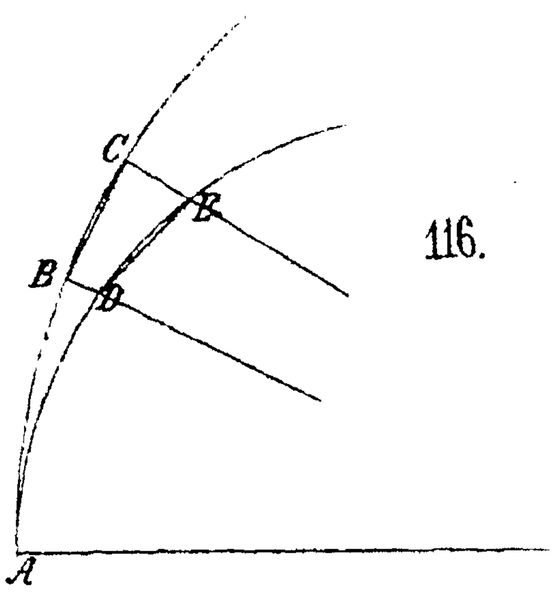


114.

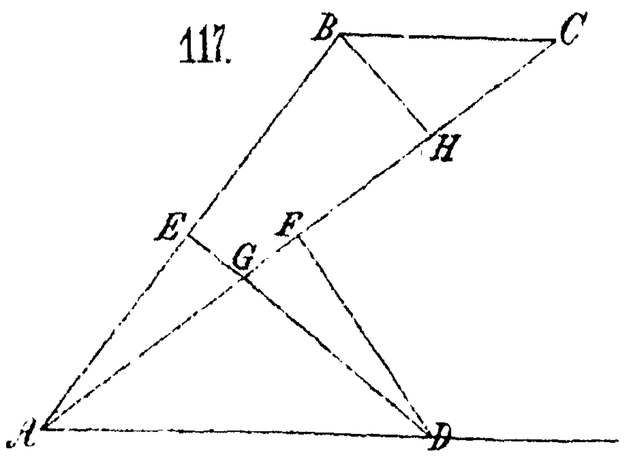
115



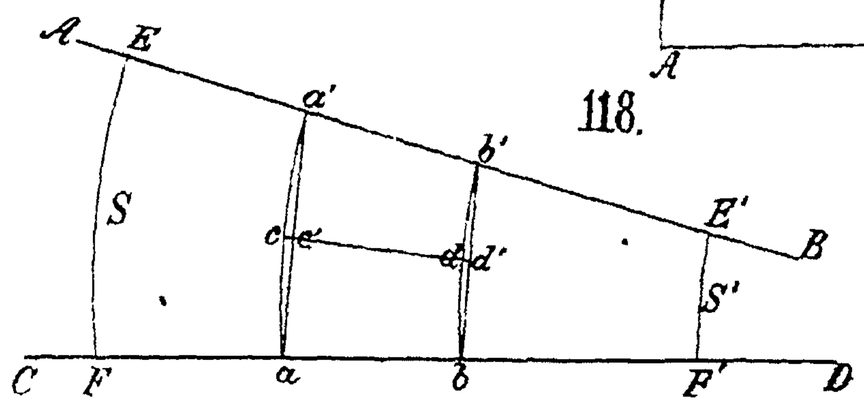
116.



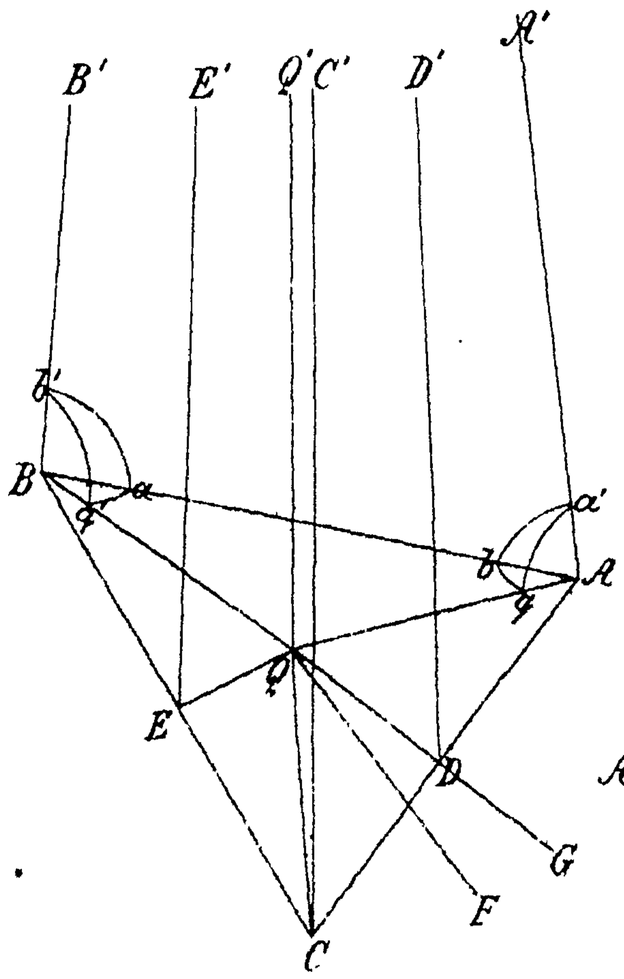
117.



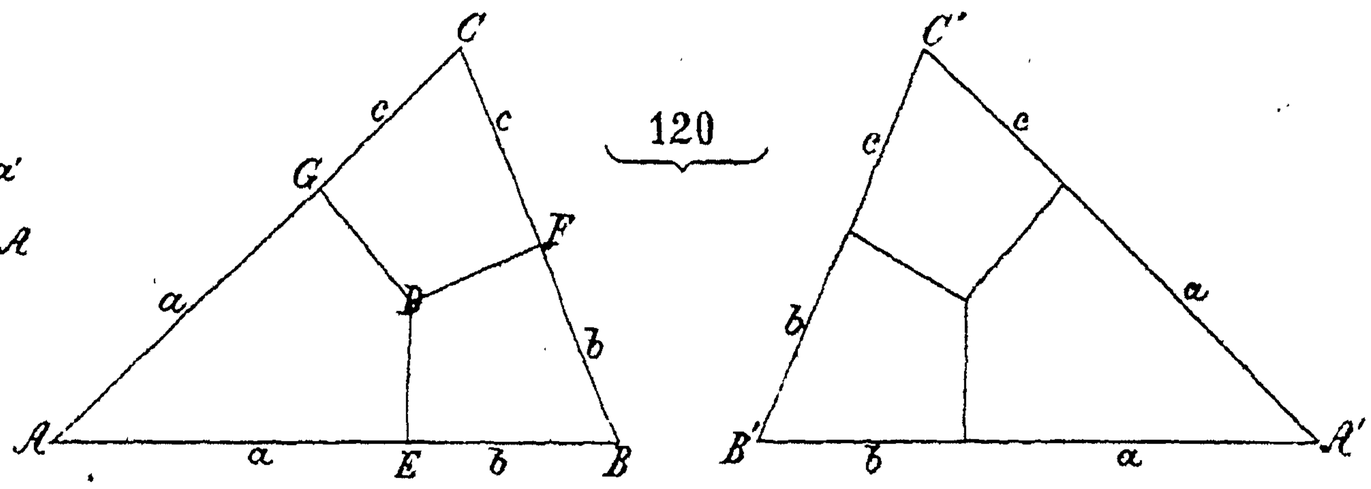
118.



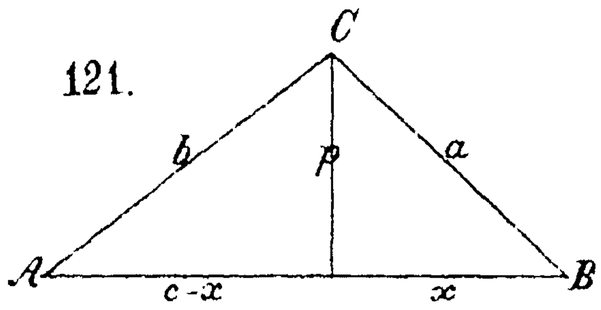
119.



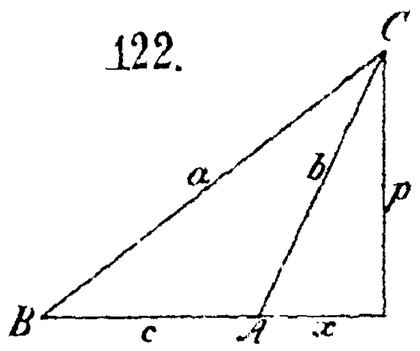
120



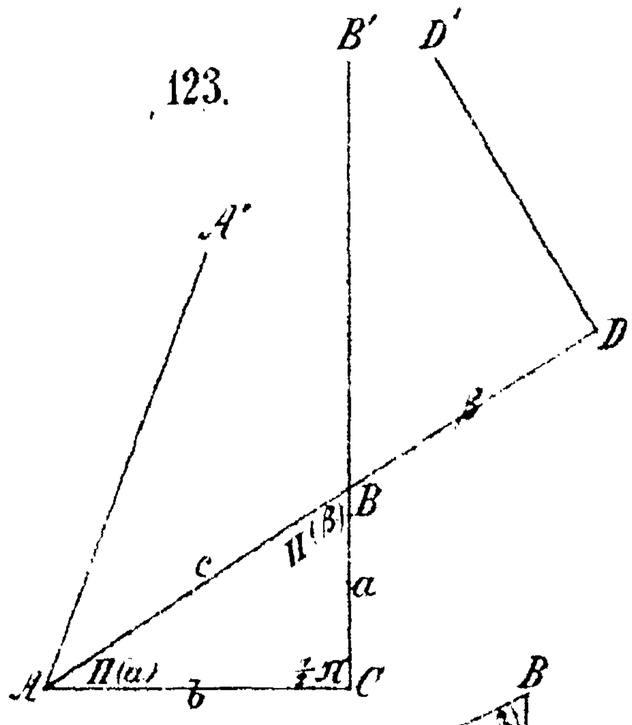
121.



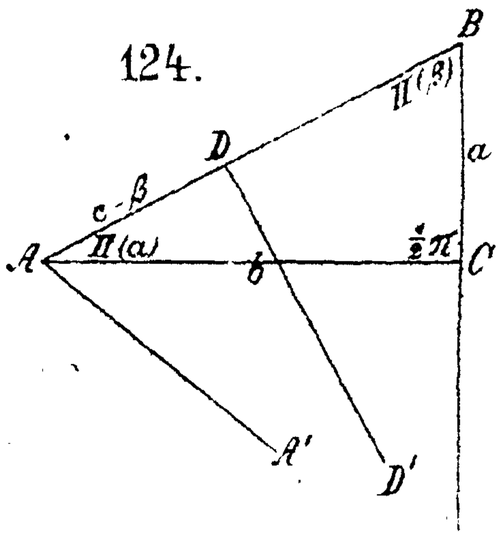
122.



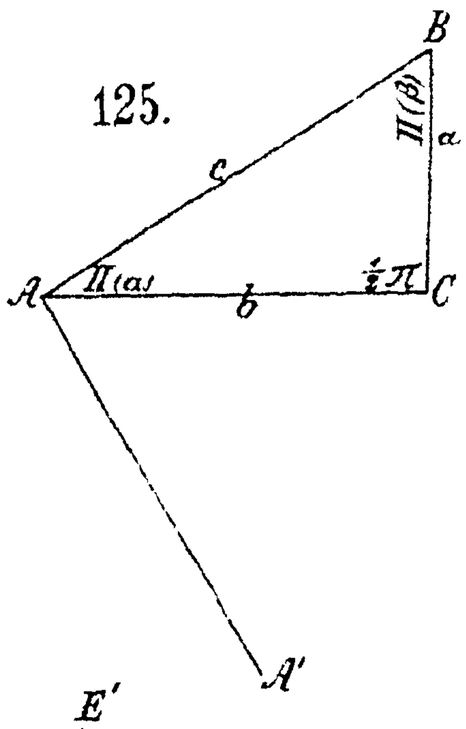
123.



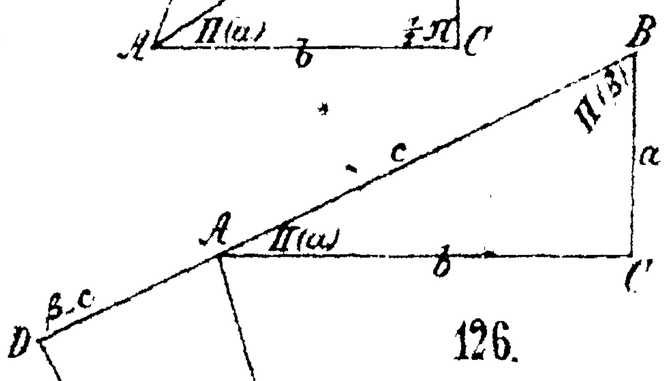
124.



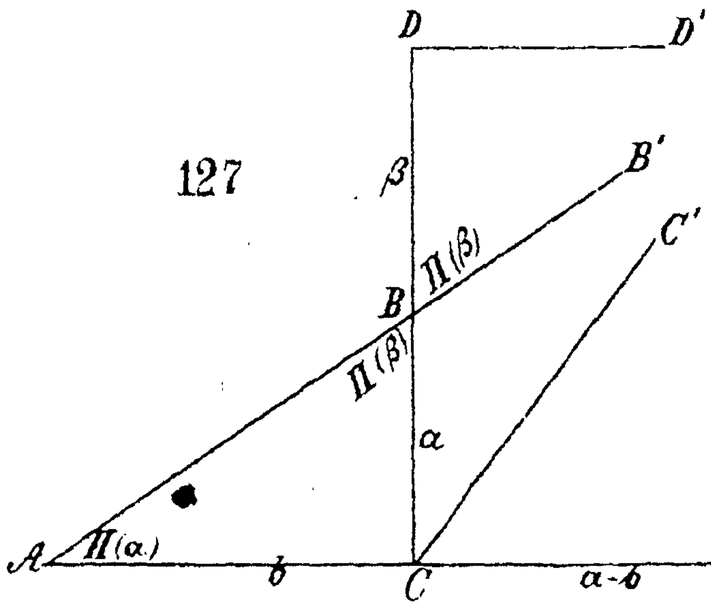
125.



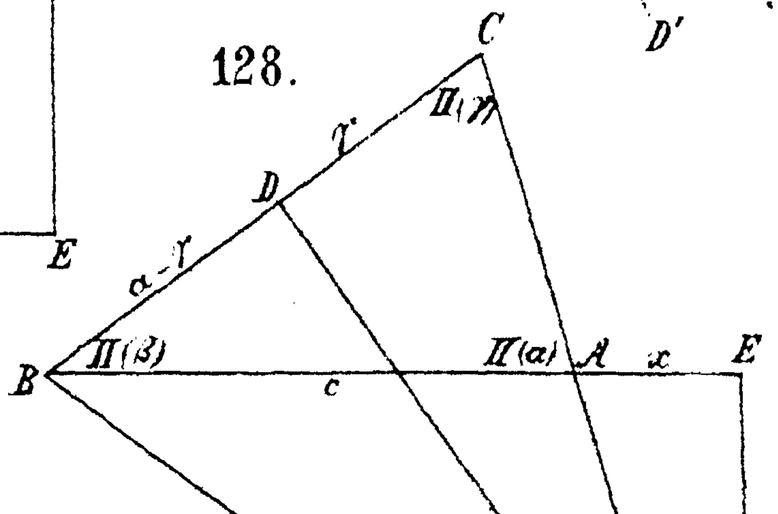
126.



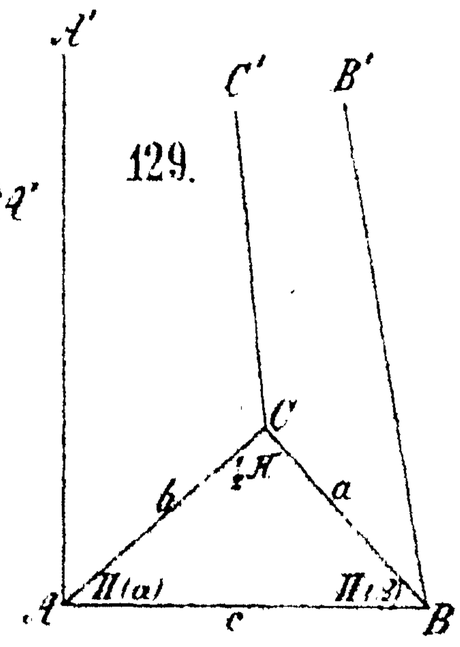
127



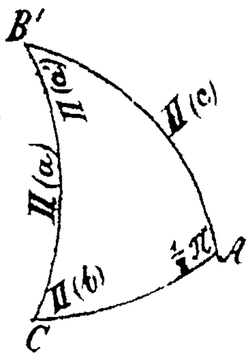
128.



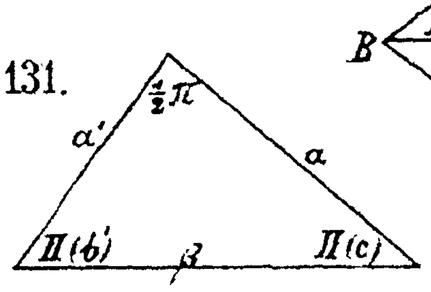
129.



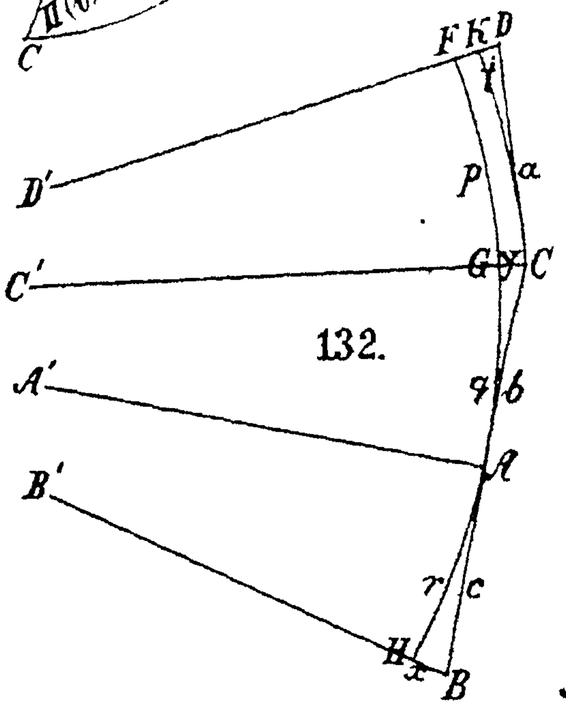
130.



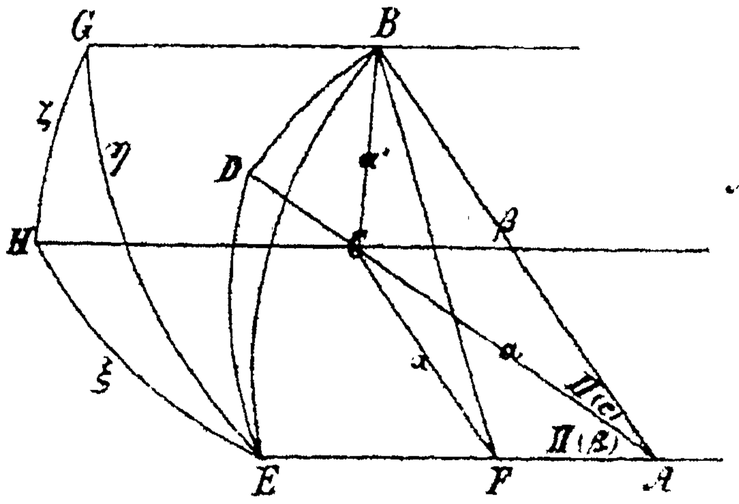
131.



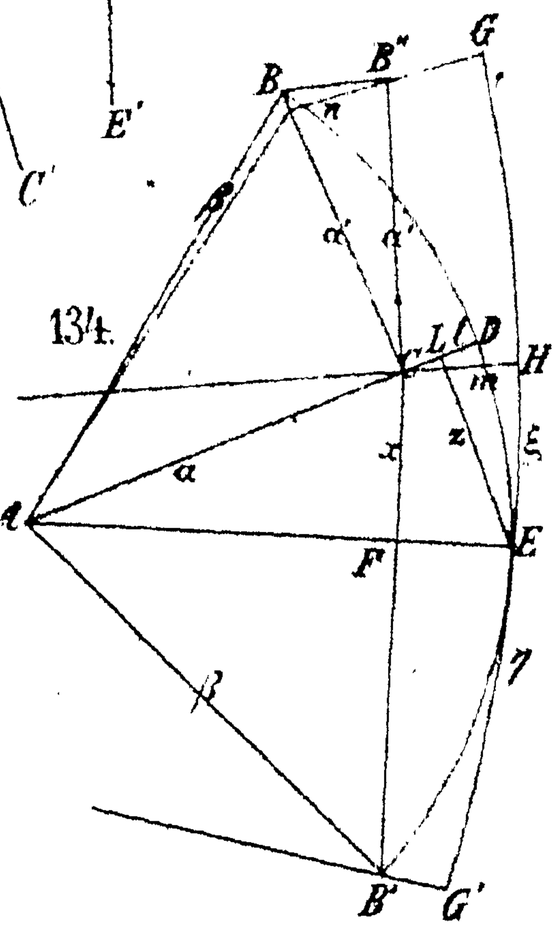
132.



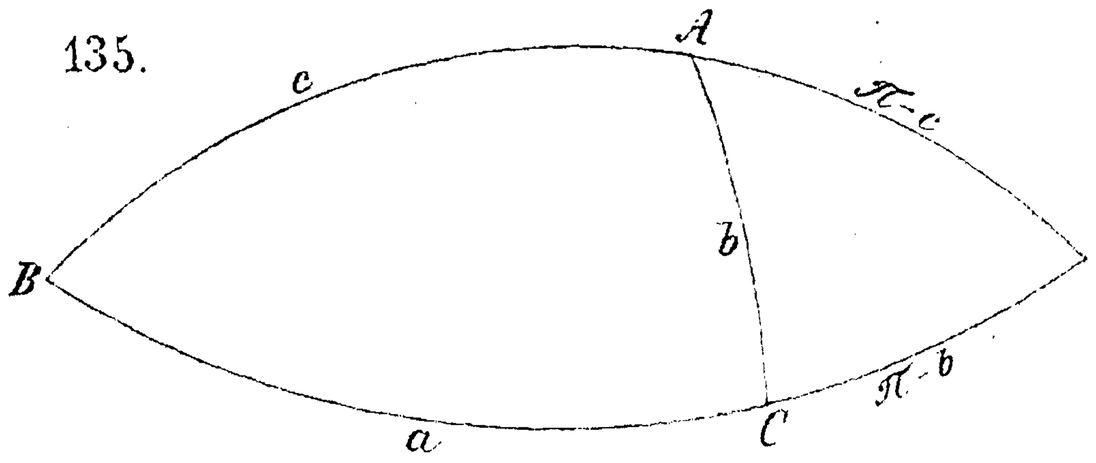
133.



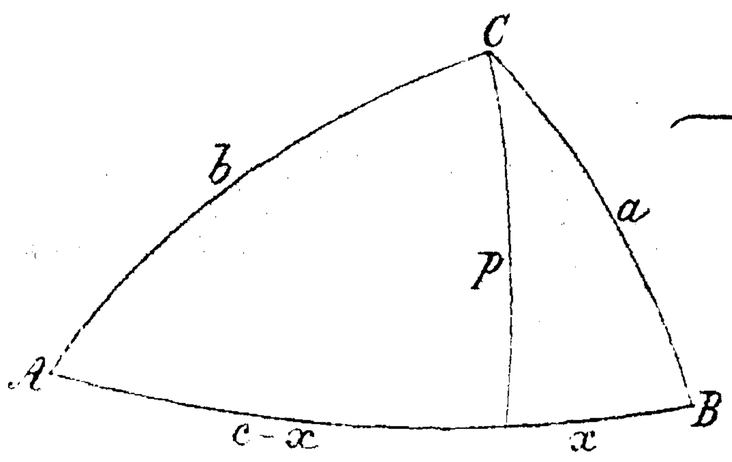
134.

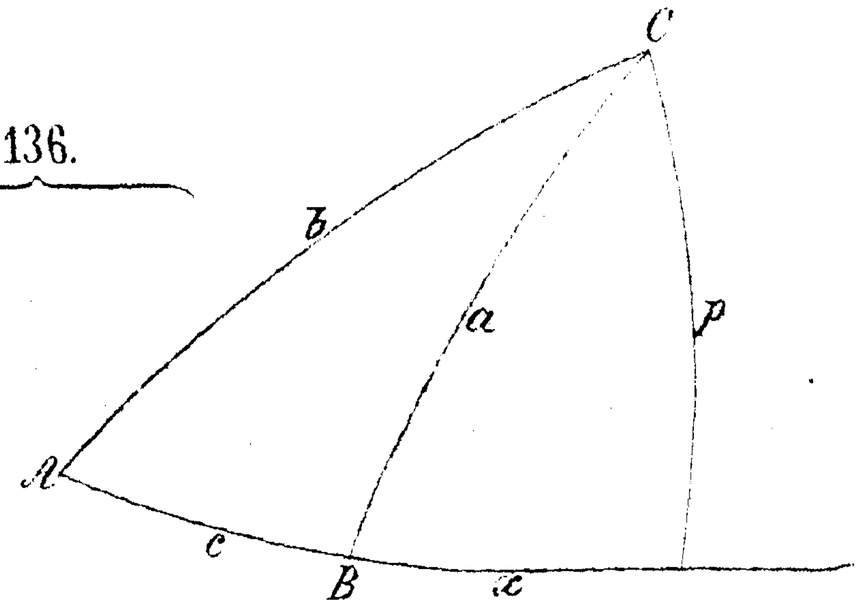


135.

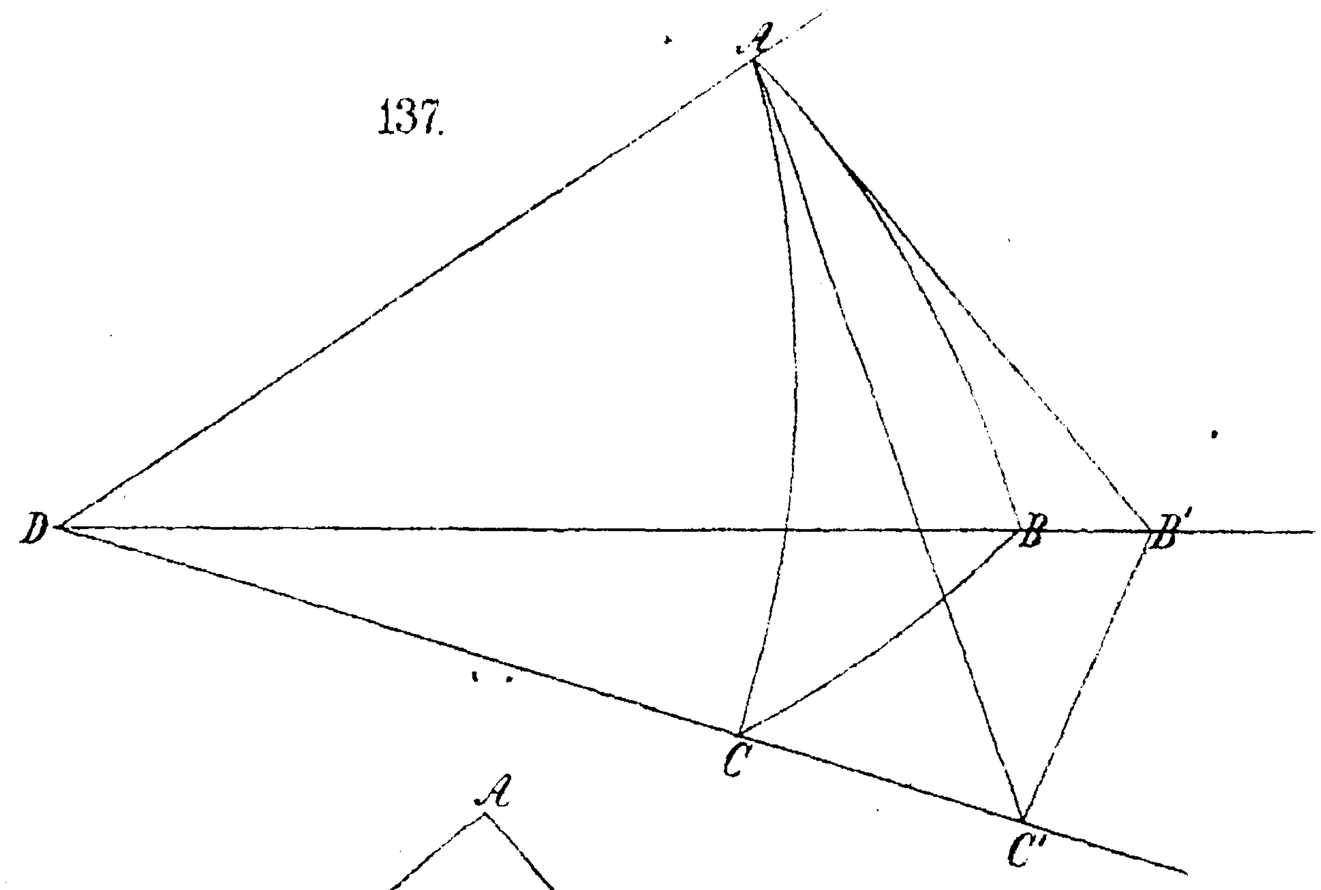


136.

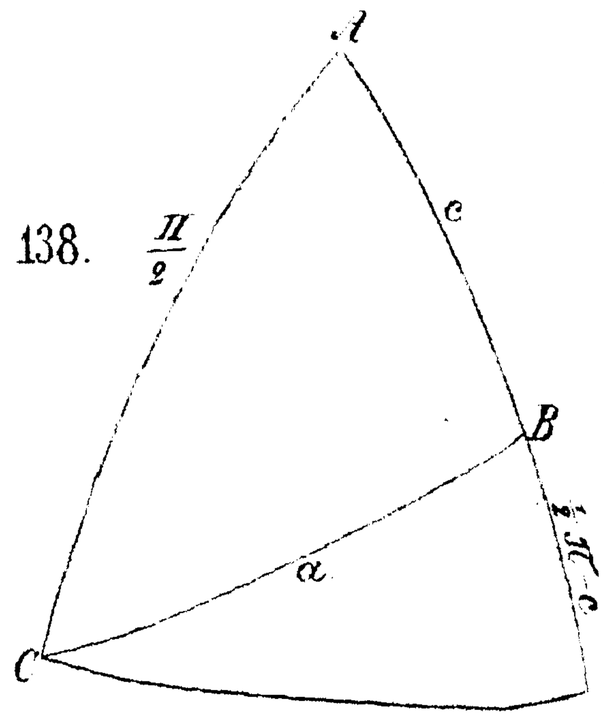




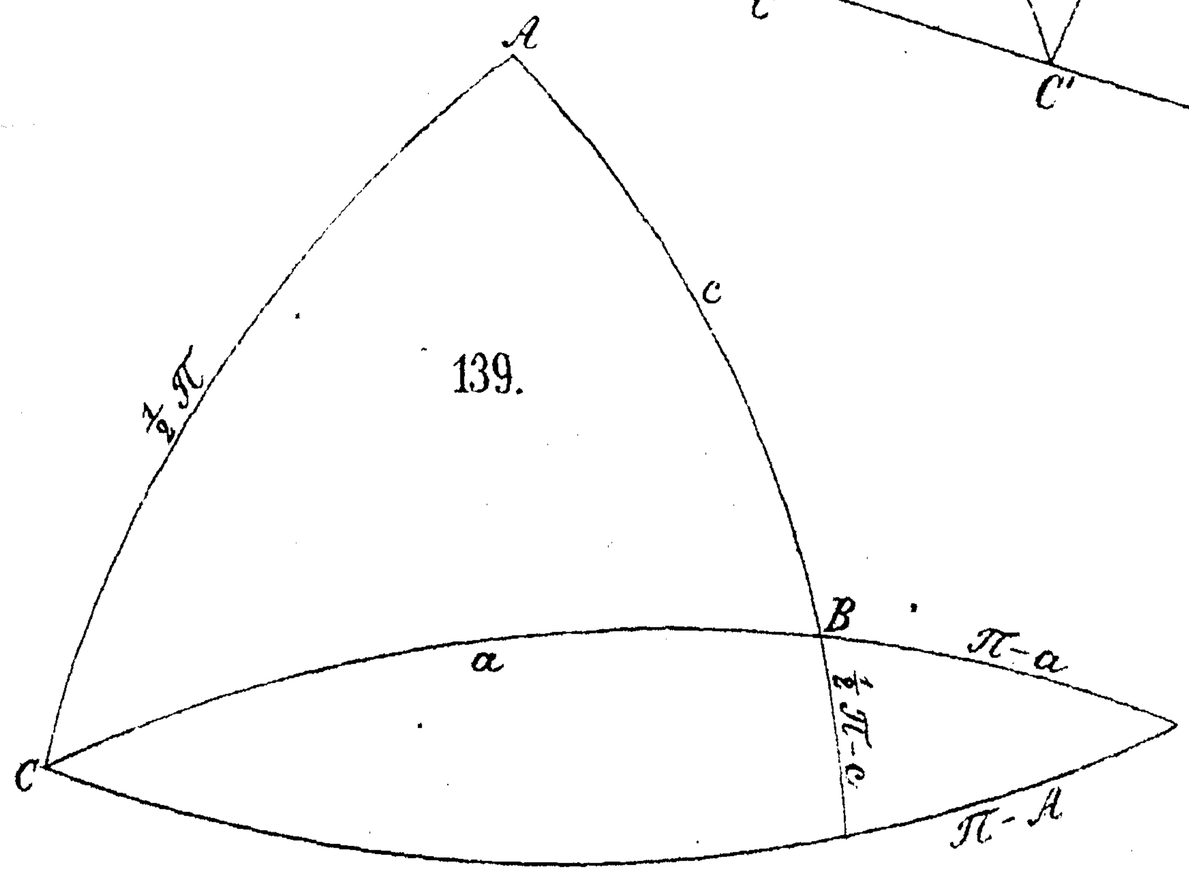
137.



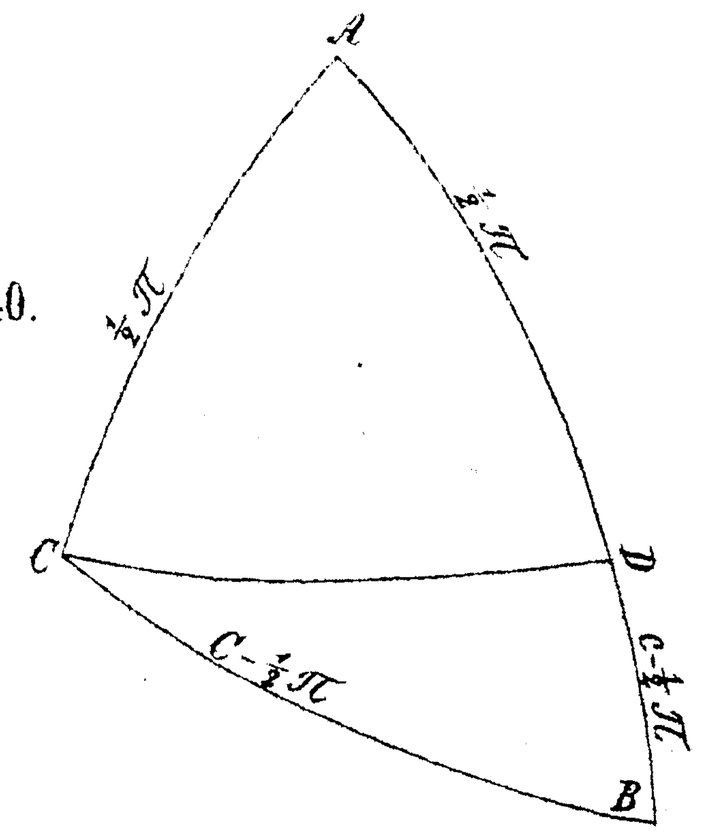
138. $\frac{\pi}{2}$



139.



140.



ПАНГЕОМЕТРІЯ.

Понятія, на которыхъ основываютъ начала геометріи, недостаточны, чтобъ отсюда вывести доказательство теоремы: сумма трехъ угловъ прямолинейнаго треугольника равна двумъ прямымъ; теорема, въ справедливости которой никто до сихъ поръ не сомнѣвался, потому что не встрѣчаютъ никакого противорѣчія въ заключеніяхъ, которыя отсюда выводятся, и потому что измѣреніе угловъ въ прямолинейныхъ треугольникахъ согласуется въ предѣлахъ ошибокъ самыхъ точныхъ измѣреній съ этой теоремой. Недостаточность начальныхъ понятій для доказательства приведенной теоремы принудила геометровъ допускать прямо или косвенно вспомогательныя положенія, которыя, какъ ни просты кажутся, тѣмъ не менѣе произвольны и слѣдовательно допущены быть не могутъ. Такъ напр. принимаютъ: что кругъ съ безконечно великимъ полупоперечникомъ переходитъ въ прямую линію, а сфера съ безконечно великимъ полупоперечникомъ въ плоскость; что углы прямолинейнаго треугольника зависятъ только отъ содержанія боковъ, но не отъ самыхъ боковъ, или наконецъ, какъ это обыкновенно принимаютъ въ началахъ геометріи, что изъ данной точки въ плоскости не можно провести болѣе одной прямой параллельной съ данной прямою въ той же плоскости, тогда какъ всѣ другія прямыя, проведенныя изъ гойже точки и въ гойже плоскости должны необходимо по достаточномъ продолженіи пересѣкать данную прямую. Подъ линіею параллельной другой, разумѣютъ прямую линію, которая сколько бы не продолжалась въ обѣ стороны, никогда не встрѣчаетъ ту, съ которой она параллельна. Это опредѣленіе само по себѣ недостаточно, потому что оно не указываетъ на единственную линію. Тоже можно сказать о большой части опредѣленій, даваемыхъ въ началахъ геометріи, потому что эти опредѣленія, не только не указываютъ на происхожденіе геометрической величины, которую хотятъ опредѣлить, но даже не доказываютъ, что такія величины существовать могутъ. Такимъ образомъ опредѣляютъ прямую линію и плоскость нѣкоторыми

ихъ свойствами; говорятъ, что прямыя линіи суть тѣ, которыя сливаются, какъ скоро у нихъ двѣ общія точки; что плоскость есть такого рода поверхность, въ которой прямая линія лежитъ вся, какъ скоро проведена чрезъ двѣ точки, взятыя на плоскости. Вмѣсто того, чтобы начинать геометрію прямой линіею и плоскостью, какъ это дѣлаютъ обыкновенно, я предпочелъ начать сферой и кругомъ, которыхъ опредѣленіе не подлежитъ упреку въ неполнотѣ, потому что въ этихъ опредѣленіяхъ заключается способъ, какимъ образомъ эти величины происходятъ. Потомъ я опредѣляю плоскость, какъ поверхность, гдѣ пересѣкаются равныя сферы, описанныя около двухъ постоянныхъ точекъ. Наконецъ опредѣляю прямую линію, какъ пересѣченіе равныхъ круговъ въ плоскости, описанныхъ около двухъ постоянныхъ точекъ той же плоскости. Допустивъ такія опредѣленія, вся теорія прямыхъ и плоскостей перпендикулярныхъ можетъ быть изложена строго съ легкостью и краткостью. Прямую проведенную изъ данной точки въ плоскости, я называю параллельною къ данной прямой въ той же плоскости, какъ скоро она составляетъ границу между тѣми прямыми, проведенными изъ той же точки въ той же плоскости, которыя пересѣкаютъ данную прямую по достаточному продолженію, и тѣми, которыя не пересѣкаютъ, сколько бы не продолжались. Ту сторону, въ которой пересѣченіе происходитъ, я называю стороною параллельности. Я издалъ полную теорію параллельныхъ подъ заглавіемъ «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. In der Finke'scheu Buchhandlung».

Въ этомъ сочиненіи я изложилъ доказательства всѣхъ предложеній, въ которыхъ не нужно прибѣгать къ помощи параллельныхъ линій. Между этими предложеніями то, которое даетъ отношеніе поверхности сферическаго треугольника ко всей сферѣ, особенно достойно замѣчанія. (Geometr. Untersuchungen § 27). Если A, B, C означаютъ углы сферическаго треугольника, то содержаніе поверхности этого сферическаго треугольника къ поверхности всей сферы, которой онъ принадлежитъ, будетъ равно содержанію

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C - \pi),$$

къ четыремъ прямымъ угламъ. Здѣсь π означаетъ два прямыхъ угла.

Потомъ я доказываю, что сумма трехъ угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ не можетъ быть болѣе двухъ прямыхъ угловъ (Geometr. Unters. § 19), и если эта сумма равна двумъ прямымъ угламъ въ какомъ нибудь прямолинейномъ треугольникѣ, то она должна быть такова во всѣхъ прямолинейныхъ треугольникахъ (Geometr. Unters. § 20). Итакъ два только предположенія возможны: или сумма трехъ угловъ во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ равна двумъ

прямымъ угламъ—это предположеніе составляетъ обыкновенную геометрію—или во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ эта сумма менѣе двухъ прямыхъ, и это послѣднее предположеніе служитъ основаніемъ особой геометріи, которой я далъ названіе воображаемой геометріи, но которую можетъ быть приличнѣе назвать пангеометріей, потому что это названіе означаетъ геометрію въ обширномъ видѣ, гдѣ обыкновенная геометрія будетъ частный случай.

Изъ принятыхъ началъ въ пангеометріи слѣдуетъ, что перпендикулъ p, опущенный изъ одной точки прямой линіи на параллельную къ ней, дѣлаетъ съ первой линіей два угла, изъ которыхъ одинъ острый. Я называю этотъ уголъ угломъ параллельности, а сторону первой изъ этихъ прямыхъ линій, гдѣ острый уголъ находится, и которая остается таже для всѣхъ точекъ на прямой, стороной параллельности. Я означаю этотъ уголъ $\Pi(p)$, потому что онъ зависитъ отъ длины перпендикула p. Въ обыкновенной геометріи $\Pi(p)=\frac{\pi}{2}$ для всякаго p. Въ пангеометріи углу $\Pi(p)$ принадлежатъ всѣ значенія отъ o, которому соотвѣтствуетъ $p=\infty$, до $\frac{\pi}{2}$ которому соотвѣтствуетъ $p=o$. (Geometr. Unters. § 23). Чтобы функціи $\Pi(p)$ дать аналитическое значеніе болѣе общее, я принимаю, что для отрицательныхъ p, случай, на который первое опредѣленіе не распространяется, значеніе этой функціи дается уравненіемъ: $\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi$.

Итакъ для всякаго угла $A>o$ и $<\pi$, можно найти линію p такъ, что $\Pi(p)=A$, гдѣ линія p положительна, если $A<\frac{\pi}{2}$. Обратно для всякой линіи p существуетъ уголъ A такъ, что $A=\Pi(p)$.

Я называю предѣльнымъ кругомъ такой кругъ, котораго полупоперечникъ принимаю безконечно великимъ; онъ можетъ быть начерченъ постепенно точками къ нему принадлежащими. Беремъ точку на данной прямой, называемъ эту точку вершиной, а самую прямую—осью предѣльнаго круга, построимъ на этой прямой уголъ $A\gtreqless o$ и $\lessgtr\frac{\pi}{2}$, вершина котораго совпадаетъ съ вершиною предѣльнаго круга, и котораго одна изъ сторонъ совпадаетъ съ осью, пусть наконецъ a линія, которая дастъ $\Pi(a)=A$ и кладемъ на другой бокъ угла A отъ вершины прямую $2a$, конецъ этой прямой будетъ лежать на предѣльномъ кругѣ; чтобы продолжить предѣльный кругъ по другую сторону оси, надобно повторить тоже построеніе на этой сторонѣ оси. Отсюда видно, что всѣ прямыя, параллельныя съ осью предѣльнаго круга, могутъ равно почитаться за оси предѣльнаго круга.

Обращеніе предѣльнаго круга около одной изъ его осей производитъ поверхность, которую я называю *предѣльная сфера*, поверхность, которая слѣдо-

вательно будетъ граница приближенія для сферы съ возрастаніемъ полупоперечниковъ до безконечности.

Мы назовемъ ось обращенія, а слѣдовательно и всѣ линіи параллельныя съ осью обращенія, осью предѣльной сферы, а поперечной плоскостію будемъ называть плоскость, въ которой лежитъ одна или нѣсколько осей обращенія. Пересѣченіе предѣльной сферы съ поперечной плоскостью даетъ предѣльный кругъ. Часть поверхности на предѣльной сферѣ, ограниченная тремя дугами предѣльнаго круга, называется предѣльнымъ сферическимъ треугольникомъ, дуги предѣльнаго круга будутъ называться боками предѣльнаго сферическаго треугольника, а плоскостные углы между плоскостей, гдѣ лежатъ дуги предѣльнаго круга, будутъ называться углами предѣльнаго сферическаго треугольника.

Двѣ прямыя параллельныя третьей параллельны между собою (Geometr. Unters. § 25). Отсюда слѣдуетъ, что всѣ оси предѣльнаго круга и предѣльной сферы параллельны между собою.

Если три плоскости пересѣкаются по двѣ въ трехъ параллельныхъ прямыхъ, и если каждая плоскость ограничена между двухъ параллельныхъ, то сумма трехъ плоскостныхъ угловъ, которые эти плоскости составляютъ по порядку одна съ другой, равна двумъ прямымъ угламъ. (Geometr. Unters. § 28).

Изъ этаго предложенія слѣдуетъ, что сумма трехъ угловъ въ предѣльномъ сферическомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ, и что всё то, что въ обыкновенной геометріи доказываютъ о содержаніи боковъ прямолинейнаго треугольника, можетъ быть повторено и доказано въ Пангеометріи для боковъ предѣльнаго сферическаго треугольника, стоитъ только замѣнить параллельныя прямыя съ однимъ изъ боковъ треугольника, дугами предѣльнаго круга, проведенными чрезъ точки на одномъ изъ боковъ предѣльнаго сферическаго треугольника подъ однимъ угломъ съ этимъ бокомъ. Такъ напр. если p, q, r, бока предѣльнаго сферическаго прямоугольнаго треугольника и P, Q, $\frac{\pi}{2}$ углы противъ этихъ боковъ, то надобно принимать также какъ для прямоугольнаго прямолинейнаго треугольника въ обыкновенной геометріи слѣдующія уравненія.

$$p = r \sin. P = r \cos. Q$$

$$q = r \cos. P = r \sin\ Q$$

$$P + Q = \tfrac{\pi}{2}.$$

Въ обыкновенной геометріи доказываютъ, что разстояніе двухъ параллельныхъ прямыхъ вездѣ одинаково, въ Пангеометріи напротивъ, разстояніе p то-

чекъ одной прямой до параллельной съ нею уменьшается на сторонѣ параллельности, т. е. на сторонѣ, въ которую обращенъ уголъ параллельности $\Pi(p)$. Теперь пусть $S, S' S''$, и т. д. рядъ дугъ предѣльныхъ круговъ между двухъ параллельныхъ прямыхъ, которыя служатъ осями этимъ предѣльнымъ кругамъ, предположимъ, что части параллельныхъ между дугъ послѣдовательныхъ, равны между собою и измѣряются взаимнымъ разстояніемъ двухъ послѣдовательныхъ дугъ x; называемъ E содержаніе S къ S' когда x равно единицѣ длины

$$\frac{S}{S'} = E$$

гдѣ E число положительное и болѣе единицы. Пусть теперь число E выражается содержаніемъ двухъ цѣлыхъ чиселъ n къ m, такъ что $E = \frac{n}{m}$; раздѣляемъ дугу S на m равныхъ частей; чрезъ точки дѣленія ведемъ параллельныя съ осями предѣльныхъ круговъ. Эти параллельныя раздѣлятъ дуги S', S''... каждую на m равныхъ частей. Переносимъ площадь между дугъ S', S'' на площадь между дугъ S, S' и, полагая дугу S' на S, а слѣдовательно дугу S'' на S', повторяемъ дугу $\frac{S'}{m}$; она должна укладываться также n разъ въ дугѣ S.

Параллельность линій заставляетъ дугу $\frac{S''}{m}$ укладываться также n разъ по дугѣ S'; слѣдовательно,

$$\frac{S}{S'} = \frac{S'}{S''}.$$

Чтобы доказать тоже самое въ случаѣ несоизмѣримости числа E, можно прибѣгнуть къ тѣмъ же способамъ, которые обыкновенно употребляются въ геометріи въ подобныхъ случаяхъ; я для краткости выпускаю эти подробности. Итакъ,

$$\frac{S}{S'} = \frac{S'}{S''} = \frac{S''}{S'''} = \ldots\ldots = E.$$

Это требуетъ, чтобы для всякой линіи x

$$S' = S E^{-x}$$

гдѣ E представляетъ число равное содержанія S къ S' когда $x = 1$.

Надобно замѣтить, что содержаніе E не зависитъ отъ длины дуги S и остается тоже, если двѣ данныя прямыя параллельныя сближаются и удаляются другъ отъ друга, оставаясь параллельными. Число E, которое необходимо болѣе

единицы, зависитъ только отъ той прямой линіи, которая выбрана за единицу въ измѣреніи прямыхъ линій и которая измѣряетъ разстояніе между двухъ послѣдовательныхъ дугъ, и можетъ быть взята произвольно. Свойство, которое мы доказали въ отношеніи къ дугамъ S, S', S''....., остается и для площадей $P, P' P''$....., ограниченныхъ послѣдовательными дугами и параллельными прямыми. Итакъ

$$P' = P . E^{x}.$$

Если мы соединяемъ n подобныхъ площадей сряду, то сумма будетъ

$$P \frac{1 - E^{-nx}}{1 - E^{x}}.$$

Для $n = \infty$, это выраженіе даетъ площадь между двухъ параллельныхъ ограниченной съ одной стороны дугой S и неограниченной со стороны параллелизма; значеніе этой площади будетъ слѣдовательно:

$$\frac{P}{1 - E^{-x}}.$$

Если избираемъ за единицу площадей ту площадь, которая отвѣчаетъ дугѣ $S = 1$ и растоянію $x = 1$, то найденное выраженіе для площади дѣлается для всякой дуги S

$$= \frac{E S}{E - 1}.$$

Въ обыкновенной геометріи число E постоянно и равно единицѣ; послѣ чего въ обыкновенной геометріи двѣ прямыя параллельныя отстоятъ повсюду равно другъ отъ друга, а площадь между двумя параллельными, ограниченная только съ одной стороны общимъ перпендикуломъ къ нимъ, безконечно велика.

Разсматриваемъ теперь прямолинейный прямоугольный треугольникъ, котораго a, b, c, бока, а $A, B, \frac{\pi}{2}$ углы противоположные этимъ бокамъ. Острые углы A, B могутъ быть принимаемы за углы параллельности $\Pi(\alpha), \Pi(\beta)$ соотвѣтственные двумъ прямымъ α, β положительнымъ; условимся еще означать удареніемъ надъ буквой ту прямую, для которой уголъ параллельности служитъ дополненіемъ до прямаго угла углу параллельности, который отвѣчаетъ прямой, означенный тою же буквой безъ ударенія. Такимъ образомъ

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = \frac{\pi}{2}$$

$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2}.$$

Представляемъ себѣ перпендикулъ a къ оси предѣльнаго круга въ вершинѣ этой оси. Чрезъ вершину перпендикула a ведемъ прямую, параллельную съ осью на сторонѣ параллельности. Означаемъ $f(a)$ часть этой параллельной между вершиною перпендикула и дугою, означаемъ $L(a)$ длину дуги предѣльнаго круга, отрѣзанную параллельной линіей къ вершинѣ предѣльнаго круга. Въ обыкновенной геометріи $L(a) = a$; $f(a) = o$ для всякой линіи a.

Возставляемъ перпендикулъ AA' къ плоскости прямолинейнаго и прямоугольнаго треугольника, котораго бока назвали a,b,c и пусть перпендикулъ AA' проходитъ чрезъ вершину угла A. Проводимъ чрезъ этотъ перпендикулъ двѣ плоскости: одну, которую назовемъ первой чрезъ бокъ b, а другую, которую назовемъ второй плоскостію чрезъ бокъ c.

Ведемъ во второй плоскости чрезъ вершину B угла $\Pi(\beta)$ прямую BB', параллельную съ AA'. Третью плоскость ведемъ чрезъ BB' и чрезъ сторону a треугольника.

Эта третья плоскость пересѣчетъ плоскость первую въ прямой CC', параллельной съ AA'. Воображаемъ теперь сферу, описанную около точки B какъ центра произвольнымъ полупоперечникомъ менѣе чѣмъ a. Эта сфера пересѣчетъ слѣдовательно стороны a, c треугольника и прямую BB' въ трехъ точкахъ, которыя означимъ: 1-ю n. 2-ю m. 3-ю k. Дуги большаго круга, которыя происходятъ отъ пресѣченія сферы съ тремя плоскостями, проходящими чрезъ B, и которыя соединяютъ точки n, m, k, по двѣ, составятъ сферическій треугольникъ прямоугольный въ m, и котораго бока будутъ $mn = \Pi(\beta)$: $kn = \Pi(c)$; $km = \Pi(a)$. Уголъ knm сферическаго треугольника $= \Pi(b)$, а уголъ $kmn = \frac{\pi}{2}$. Три прямыя AA', BB', CC', будучи параллельными между собою, производятъ сумму трехъ плоскостныхъ угловъ $= \pi$. Отсюда слѣдуетъ, что третій уголъ mkn сферическаго треугольника, $= \Pi(\alpha')$. Итакъ всякому прямолинейному прямоугольному треугольнику, котораго бока a, b, c съ противоположными углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$ отвѣчаетъ треугольникъ сферическій прямоугольный, котораго бока $\Pi(\beta)$, $\Pi(c)$, $\Pi(a)$, съ противоположными углами $\Pi(\alpha')$, $\Pi(b)$, $\frac{\pi}{2}$. Построимъ еще прямолинейный прямоугольный треугольникъ, котораго перпендикулярные бока будутъ α', a, гипотенуза пусть будетъ g, пусть $\Pi(\lambda)$ уголъ противъ бока a и $\Pi(\mu)$ уголъ противъ бока α'.

Переходимъ отъ этого треугольника къ сферическому, подобнымъ образомъ какъ перешли отъ прямолинейнаго треугольника $A\,B\,C$ къ сферическому треугольнику $k\,m\,n$. Бока новаго сфернческаго треугольника будутъ

$$\Pi(\mu),\ \Pi(g),\ \Pi(a)$$ съ противоположными углами

$$\Pi(\lambda'),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2}.$$

Въ немъ будутъ части соотвѣтственно равны частямъ сферическаго треугольника $k\,m\,n$, потому что бока этого послѣдняго были $\Pi(c),\ \Pi(\beta),\ \Pi(a)$ съ противоположными углами

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2}.$$

Это доказываетъ, что эти два сферическіе прямоугольные треугольники имѣютъ гипотенузы равные и одинъ изъ прилежащихъ угловъ равный, а потому одинаковы между собою. Отсюда слѣдуетъ

$$\mu = c;\ g = \beta;\ b = \lambda'.$$

Итакъ существованіе прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника съ боками

$$a,\quad b,\quad c$$ и съ противоположными углами

$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{\pi}{2}$$

предполагаетъ существованіе прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника, котораго бока a, α', β съ противоположными углами

$$\Pi(b'),\ \Pi(c),\ \frac{\pi}{2}.$$

Тоже самое можно выразить, сказавъ, что если

$$a, b, c, \alpha, \beta$$

части прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника, то

$$a, \alpha', \beta, b', c$$

будутъ соотвѣтственныя части другаго прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника. Если воображаемъ предѣльную сферу чрезъ точку A даннаго прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника, которой сферѣ перпендикулъ AA' къ плоскости этого треугольника служитъ осью, а точка A вершиною, то мы получимъ предѣльный сферическій треугольникъ отъ пересѣченія предѣльной сферы съ тремя плоскостями, проведенными чрезъ прямыя AA', BB', CC'.

Означимъ бока этого предѣльнаго сферическаго треугольника p,q,r, такимъ образомъ, что p будетъ пересѣченіе предѣльной сферы плоскостью, которая проходитъ чрезъ a, q пересѣченіемъ предѣльной сферы съ плоскостью, которая проходитъ чрезъ b, и r пересѣченіемъ сферы съ плоскостью, которая проходитъ чрезъ c; углы противъ боковъ будутъ: $\Pi(\alpha)$ противъ p; $\Pi(\alpha')$ противъ q; $\frac{\pi}{2}$ противъ r. Согласно съ вышепринятымъ означеніемъ здѣсь $q = L(b)$; $r = L(c)$. Предѣльная сфера пересѣчетъ прямую CC' въ точкѣ, которой разстояніе отъ C будетъ согласно съ тѣмъ же означеніемъ $f(b)$, подобнымъ образомъ будетъ $f(c)$ разстояніе точки пересѣченія предѣльной сферы съ прямою BB' отъ точки B. Легко видѣть, что

$$f(b) + f(a) = f(c).$$

Въ треугольникѣ, котораго бока предѣльныя дуги p, q, r, будетъ

$$p = r \sin. \Pi(\alpha); \quad q = r \cos. \Pi(\alpha).$$

Умножая первое изъ этихъ двухъ уравненій на $E^{f(b)}$ получимъ:

$$p E^{f(b)} = r \sin. \Pi(\alpha). E^{f(b)}; \text{ но}$$

$$p E^{f(b)} = L(a),$$

а слѣдовательно

$$L(a) = r \sin. \Pi(\alpha) E^{f(b)}.$$

Такимъ же образомъ будетъ

$$L(b) = r \sin. \Pi(\beta) E^{f(a)}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$q = r \cos. \Pi(\alpha)$$

или что все равно:

$$L(b) = r \cos. \Pi(\alpha).$$

Сравненіе двухъ этихъ значеній $L(b)$ даетъ уравненіе

$$\cos. \Pi(\alpha) = \sin. \Pi(\beta). E^{f(a)} \qquad (1)$$

перемѣняя здѣсь α на b', β на c и оставляя a безъ перемѣны, какъ это дозволяется послѣ того, что было доказано выше получимъ

$$\cos. \Pi(b') = \sin. \Pi(c). E^{f(a)}$$

или такъ какъ

$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin. \Pi(b) = \sin. \Pi(c). E^{f(a)}.$$

Такимъ же образомъ должно быть

$$\sin.\, \Pi(a) = \sin.\, \Pi(c).\, E^{f(b)}.$$

Умножаемъ послѣднее уравненіе на $E^{f(a)}$ и ставимъ сюда, $f(c)$ на мѣсто $f(a)+f(b)$; такъ находимъ

$$\sin.\, \Pi(a).\, E^{f(a)} = \sin.\, \Pi(c).\, E^{f(c)}.$$

Но какъ въ прямолинейномъ прямоугольномъ треугольникѣ перпендикулярные бока могутъ измѣняться, тогда какъ гипотенуза остается таже, то можемъ въ этомъ уравненіи полагать $a = o$ не перемѣняя c; это даетъ, если къ тому замѣтимъ, что $f(o) = o$ и $\Pi(o) = \frac{\pi}{2}$,

$$1 = \sin.\, \Pi(c).\, E^{f(c)}$$

или

$$E^{f(c)} = \frac{1}{\sin.\, \Pi(c)}$$

для всякой линіи c.

Теперь возьмемъ уравненіе (1)

$$\cos.\, \Pi(\alpha) = \sin.\, \Pi(\beta).\, E^{f(\alpha)}$$

и поставимъ сюда $\frac{1}{\sin.\, \Pi(a)}$ на мѣсто $E^{f(a)}$, оно приметъ такой видъ

$$\cos.\, \Pi(\alpha).\, \sin.\, \Pi(a) = \sin.\, \Pi(\beta). \qquad (2)$$

Перемѣняя здѣсь α, β на b, c оставляя a безъ перемѣны получимъ,

$$\sin.\, \Pi(b).\, \sin.\, \Pi(a) = \sin.\, \Pi(c).$$

Уравненіе (2) даетъ съ перемѣной въ немъ буквъ

$$\cos.\, \Pi(\beta).\, \sin.\, \Pi(b) = \sin.\, \Pi(\alpha).$$

Если въ этомъ уравненіи β, b, α перемѣняемъ на c, α', b', получимъ

$$\cos.\, \Pi(c).\, \cos.\, \Pi(\alpha) = \cos.\, \Pi(b). \qquad (3)$$

Такимъ же образомъ находимъ

$$\cos.\, \Pi(c).\, \cos.\, \Pi(\beta) = \cos.\, \Pi(a). \qquad (4)$$

Уравненіе 2, 3, 4 относятся къ сферическому прямоугольному треугольнику, котораго бока впередъ будемъ означать a, b, c, и гдѣ A, B означимъ углы про-

тивъ боковъ a, b, а $\frac{\pi}{2}$ противъ c. Въ сказанныхъ уравненіяхъ можемъ ставить a на мѣсто $\Pi(\beta)$, b на мѣсто $\Pi(c)$, c на мѣсто $\Pi(a)$, $\frac{\pi}{2} - A$ на мѣсто $\Pi(\alpha)$; B на мѣсто $\Pi(b)$.

Такимъ образомъ уравненія дѣлаются

$$\left.\begin{aligned} &\sin. A. \sin. c = \sin. a \\ &\cos. b \ \sin. A = \cos. B \\ &\cos. a. \cos. b = \cos. c \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Уравненія (5) относятся къ сферическому треугольнику, каковый можетъ быть произведенъ изъ прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника и котораго слѣдовательно бока не могутъ превосходить $\frac{\pi}{2}$. Прибавимъ сюда, что если ведемъ чрезъ вершину угла A дугу большаго круга перпендикулярно къ боку b, то эта дуга встрѣтитъ или бокъ a или его продолженіе такимъ образомъ, что каждая изъ двухъ дугъ отъ точки пересѣченія до стороны b будетъ $= \frac{\pi}{2}$, а уголъ между этими дугами будетъ b.

Послѣ сего не трудно заключить, что во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ если

$$c < \frac{\pi}{2} \text{ то должно быть } a < \frac{\pi}{2} \text{ и } A < \frac{\pi}{2},$$

если $$c = \frac{\pi}{2} \text{ то должно быть } a = \frac{\pi}{2} \text{ и } A = \frac{\pi}{2},$$

наконецъ если $$c > \frac{\pi}{2} \text{ то должно быть } a > \frac{\pi}{2} \text{ и } A > \frac{\pi}{2};$$

отсюда слѣдуетъ, что, предположивъ $a > \frac{\pi}{2}$, надобно предположить вмѣстѣ съ тѣмъ $c > \frac{\pi}{2}$, $A > \frac{\pi}{2}$. Если продолжаемъ въ этомъ случаѣ бока a, c по другую сторону бока b до ихъ взаимнаго пересѣченія, то получимъ другой сферическій прямоугольный треугольникъ, котораго бока $\pi - a$, b, $\pi - c$, а противоположныя углы $\pi - A$, B, $\frac{\pi}{2}$ треугольникъ, къ которому примѣняются уравненія (5). Но уравненія (5) не перемѣняютъ своего вида, если здѣсь вставимъ $\pi - a$ на мѣ-

сто a, $\pi - c$ на мѣсто c и $\pi - A$ на мѣсто A. Это доказываетъ, что уравненія (5) относятся ко всѣмъ вообще сферическимъ прямоугольнымъ треугольникамъ.

Переходимъ ко всякому сферическому треугольнику, гдѣ бока a, b, c съ противоположными углами A, B, C, не предполагая между углами A, B, C, прямаго, потому что уравненія (5) доказаны для такого случая.

Опускаемъ изъ вершины угла C дугу большаго круга p перпендикулярно къ боку c, могутъ встрѣтится два случая: 1) Или перпендикулъ p пройдетъ внутри треугольника раздѣляя уголъ C на двѣ части D, $C-D$, а такъ же бокъ c на двѣ части x. противъ D, и $c - x$ противъ $C - D$. 2) Или перпендикулъ p пройдетъ внѣ треугольника, присоединяя къ углу C уголъ D и къ боку c дугу x.

Въ первомъ случаѣ данный сферическій треугольникъ будетъ сумма двухъ сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Въ одномъ изъ этихъ двухъ треугольниковъ бока будутъ p, x, a съ противоположными углами $B, D, \frac{\pi}{2}$ въ другомъ бока $p, c - x, b$ съ противоположными углами $A, C - D, \frac{\pi}{2}$. Примѣняя сюда къ первому треугольнику уравненія (5), получимъ

$$\left.\begin{aligned} \sin. p &= \sin. a \sin. B \\ \sin. x &= \sin. a \sin. D \\ \cos. p \sin. D &= \cos. B \\ \cos. x \sin. B &= \cos. D \\ \cos. a &= \cos. p \cos. x. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Другой треугольникъ даетъ подобнымъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} \sin. p &= \sin. b \sin. A \\ \sin. (c - x) &= \sin. b \sin. (C - D) \\ \cos. p \sin\ (C - D) &= \cos. A \\ \cos. p \cos. (c - x) &= \cos. b. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Сравненіе двухъ значеній $\sin. p$ изъ (A) и (B) даетъ

$$\sin. a \sin. B = \sin. b \sin. A. \qquad (6)$$

Послѣднее изъ уравненій (B), будучи раздѣлено на послѣднее изъ уравненій (A), даетъ

$$\text{tang. } x = \frac{\cos. b}{\cos. a \sin. c} - \text{cotg. } c.$$

Между тѣмъ соединеніе втораго съ третьимъ и послѣднимъ изъ уравненій A даетъ

$$\text{tang. } x = \text{tang. } a \cos. B.$$

Сравненіе двухъ значеній для tang. x приводитъ насъ къ уравненію,

$$\cos. b - \cos. a \cos. c = \sin. a \sin. c \cos. B. \qquad (7)$$

Если перпендикулъ падаетъ внѣ даннаго сферическаго треугольника, присоединяя такимъ образомъ дугу x къ боку c и уголъ D къ углу C, то произойдутъ какъ и прежде два сферическія прямоугольныя треугольника. Бока одного изъ этихъ двухъ треугольниковъ будутъ p, x, a съ противоположными углами $\pi - B, D, \frac{\pi}{2}$; бока другаго треугольника будутъ $p, c + x, b$ съ противоположными углами $A, C + D, \frac{\pi}{2}$. Примѣненіе уравненій (5) къ первому изъ этихъ треугольниковъ даетъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin. p &= \sin. a \sin. B \\ \sin. x &= \sin. a \sin. D \\ -\cos. B &= \cos. p \sin. D \\ \cos. D &= \cos. x \sin. B \\ \cos. a &= \cos. p \cos. x. \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Второй треугольникъ, котораго бока $p, c + x, b$ съ противоположными угами $A, C + D, \frac{\pi}{2}$, даетъ такимъ же образомъ,

$$\left.\begin{aligned} \sin. p &= \sin. b \sin. A \\ \sin. (c + x) &= \sin. b \sin. (C + D) \\ \cos. A &= \cos. p \sin. (C + D) \\ \cos. (C + D) &= \cos. (c + x) \sin. A \\ \cos. b &= \cos. p \cos. (c + x). \end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

Сравненіе двухъ значеній sin. p изъ уравненій (C) и (D) снова даетъ уравненіе (6).

Изъ уравненій (C) и (D) находимъ

$$\text{tang. } x = \text{cotg. } c - \frac{\cos. b}{\cos. a \sin. c}.$$

Изъ уравненій (C) находимъ еще

$$\text{tang. } x = -\text{ tang. } a \cos. B.$$

Сравненіе двухъ значеній для tang. x приводитъ насъ снова къ уравненію (7), которое такимъ образомъ, какъ и уравненіе (6), доказано для всѣхъ сферическихъ треугольниковъ вообще.

Уравненіе (7) съ перемѣною въ немъ буквъ даетъ еще два слѣдующія

$$\cos. a - \cos. b \cos. c = \sin. b \sin. c \cos. A$$

$$\cos. c - \cos. a \cos. b = \sin. a \sin. b \cos. C.$$

Умножая послѣднее уравненіе на cos. b, присоединяя произведеніе къ первому и раздѣляя сумму на sin. b, получимъ

$$\cos. a \sin. b = \sin. c \cos. A + \sin. a \cos. b \cos. C.$$

Вставляя сюда значеніе sin. c

$$\sin. c = \frac{\sin. C}{\sin. A} \cdot \sin. a,$$

согласно съ уравненіемъ (6), потомъ раздѣляя на sin. a получимъ

$$\text{cotang. } a \sin. b = \text{cotang. } A \sin. C + \cos. b \cos. C.$$

Замѣняя здѣсь sin. b его значеніемъ

$$\sin. a \frac{\sin. B}{\sin. A},$$

потомъ умножая уравненіе на sin. A, получимъ

$$\cos. a \sin. B = \cos. b \cos. C \sin. A + \sin. C \cos. A,$$

откуда получимъ съ перемѣною буквъ

$$\cos. b \sin. A = \cos. a \cos. C \sin. B + \sin. C \cos. B.$$

Изключеніе cos. b изъ двухъ послѣднихъ уравненій приводитъ насъ къ уравненію:

$$\cos. a \sin. B \sin. C = \cos. B \cos. C + \cos. A. \qquad (9)$$

Уравненія (6), (7), (8), (9) тѣже, какія обыкновенно даютъ въ сферической тригонометріи, и которыя доказываютъ помощію обыкновенной геометріи. Итакъ сферическая тригонометрія остается въ томъ же видѣ, будетъ ли допущено предположеніе, что сумма трехъ угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ всегда равна π, или предположеніе, что она $< \pi$, это весьма замѣчательно въ отношеніи къ сферической тригонометріи, но неподтверждается для тригонометріи прямолинейной.

Прежде нежели приступимъ къ выводу уравненій, которыя выражаютъ въ пангеометріи зависимость боковъ и угловъ всякаго прямолинейнаго треугольника, мы займемся изслѣдованіемъ, какова должна быть функція $\Pi(x)$ для всякой линіи x. Съ этой цѣлью разсматриваемъ прямолинейный треугольникъ, котораго бока a, b, c съ противоположными углами $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$; продолжаемъ бокъ c за вершину угла $\Pi(\beta)$ и дѣлаемъ продолженіе равное β.

Въ концѣ линіи β ставимъ перпендикулъ, который и будетъ параллельный съ бокомъ a и съ продолженіемъ этого бока за вершину угла $\Pi(\beta)$. Ведемъ еще чрезъ вершину угла $\Pi(\alpha)$ параллельную къ тому же продолженію бока a. Уголъ, который эта прямая дѣлаетъ съ бокомъ c, будетъ $\Pi(c+\beta)$; уголъ, который она дѣлаетъ съ b будетъ $\Pi(b)$. Такимъ образомъ составится уравненіе

$$\Pi(b) = \Pi(c+\beta) + \Pi(\alpha). \qquad (\Pi)$$

Если линію β кладемъ отъ вершины угла $\Pi(\beta)$ на самый бокъ c и къ линіи β ведемъ въ концѣ перпендикулъ на сторонѣ угла $\Pi(\beta)$, то эта прямая будетъ параллельною къ продолженію a за вершину прямаго угла. Ведемъ чрезъ вершину угла $\Pi(\alpha)$ параллельную къ послѣднему перпендикулу, которая будетъ слѣдовательно также параллельна ко второму продолженію бока a, дѣлая уголъ $\Pi(c-\beta)$ съ бокомъ c, а $\Pi(b)$ съ бокомъ b; итакъ

$$\Pi(b) = \Pi(c-\beta) - \Pi(\alpha). \qquad (\Pi')$$

Легко увѣриться, что это уравненіе справедливо не только для c болѣе β но также для $c = \beta$ и $c < \beta$. Дѣйствительно, если $c = \beta$, то $\Pi(c-\beta) = \Pi(o) = \frac{\pi}{2}$; съ другой стороны перпендикулъ къ c чрезъ вершину угла $\Pi(\alpha)$ дѣлается параллельнымъ къ a, откуда слѣдуетъ, что $\Pi(b) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)$, что согласно съ нашимъ уравненіемъ. Если $c < \beta$, то конецъ линіи β упадетъ за вершину угла

$\Pi(\alpha)$ на разстояніи $\beta - c$ отъ вершины; перпендикулъ къ β въ концѣ этой линіи будетъ параллеленъ съ a и съ прямой проведенною чрезъ вершину угла $\Pi(\alpha)$ параллельно къ a; откуда слѣдуетъ, что два смѣжные угла, которые эта параллельная дѣлаетъ съ бокомъ c, острый равенъ $\Pi(\beta - c)$, а тупой равенъ $\Pi(\alpha) + \Pi(b)$. Сумма двухъ смежныхъ угловъ составляетъ π, слѣдовательно

$$\Pi(\beta - c) + \Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi$$

или

$$\Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha).$$

Но согласно съ опредѣленіемъ функціи $\Pi(x)$

$$\pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$$

послѣ чего

$$\Pi(b) = \Pi(c - \beta) - \Pi(\alpha),$$

тоже уравненіе, какое найдено выше и которое такимъ образомъ доказано для всѣхъ случаевъ.

Два уравненія (Π) и (Π') могутъ быть замѣнены еще такими

$$\Pi(b) = \tfrac{1}{2}\Pi(c + \beta) + \tfrac{1}{2}\Pi(c - \beta)$$

$$\Pi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \tfrac{1}{2}\Pi(c + \beta);$$

но уравненіе (3) даетъ

$$\cos.\,\Pi(c) = \frac{\cos.\,\Pi(b)}{\cos.\,\Pi(\alpha)}.$$

Вставляя въ это уравненіе на мѣсто $\Pi(b)$ и $\Pi(\alpha)$ ихъ значенія находимъ:

$$\cos.\,\Pi(c) = \frac{\cos.\left\{\tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta) + \tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta)\right\}}{\cos.\left\{\tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right\}}.$$

Изъ этого уравненія мы выводимъ слѣдующее

$$\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\Pi(c) = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta).$$

Такъ какъ линіи c, β могутъ измѣняться независимо одна отъ другой во всякомъ прямолинейномъ прямоугольномъ треугольникѣ, то полагая постепенно въ послѣднемъ уравненіи $c = \beta$; $c = 2\beta$, $c = 3\beta \ldots\ldots c = n\beta$, мы выводимъ изъ этихъ уравненій для всякаго цѣлаго положительнаго числа n

$$\text{tang.}^n\,\tfrac{1}{2}\Pi(c) = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(nc).$$

Легко доказать справедливост этого уравненія для чиселъ n отрицательныхъ или дробныхъ. Отсюда слѣдуетъ что взявъ за единицу прямыхъ линій такую, которая даетъ:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Pi(1) = e^{-1}$$

гдѣ e основаніе пеперовыхъ логариѳмовъ, получимъ для всякой линіи x

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Это выраженіе даетъ $\Pi(x) = \frac{1}{2}\pi$ для $x=o$, и $\Pi(x)=o$ для $x=\infty$, $\Pi(x)=\pi$ для $x=-\infty$, согласно съ тѣмъ, что было принято и доказано выше. Значеніе найденное для $\text{tang.}\frac{1}{2}\Pi(x)$ даетъ для всякой линіи x

$$\text{sin.}\,\Pi(x) = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$\text{cos.}\,\Pi(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

и для двухъ произвольныхъ линій x, y

$$\text{sin.}\,\Pi(x+y) = \frac{\text{sin.}\,\Pi(x)\,\text{sin.}\,\Pi(y)}{1+\text{cos.}\,\Pi(x)\,\text{cos.}\,\Pi(y)}$$

$$\text{sin.}\,\Pi(x-y) = \frac{\text{sin.}\,\Pi(x)\,\text{sin.}\,\Pi(y)}{1-\text{cos.}\,\Pi(x)\,\text{cos.}\,\Pi(y)}$$

$$\text{cos.}\,\Pi(x+y) = \frac{\text{cos.}\,\Pi(x)+\text{cos.}\,\Pi(y)}{1+\text{cos.}\,\Pi(x)\,\text{cos.}\,\Pi(y)}$$

$$\text{cos.}\,\Pi(x-y) = \frac{\text{cos.}\,\Pi(x)-\text{cos.}\,\Pi(y)}{1-\text{cos.}\,\Pi(x)\,\text{cos.}\,\Pi(y)}$$

$$\text{tang.}\,\Pi(x-y) = \frac{\text{sin.}\,\Pi(x)\,\text{sin.}\,\Pi(y)}{\text{cos.}\,\Pi(x)+\text{cos.}\,\Pi(y)}.$$

Уравненія (2), (3), (4), найденныя для сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ, относятся также къ прямолинейному прямоугольному треугольнику, котораго бока a, b, c съ противоположными углами $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$. Итакъ, поставляя A на мѣсто $\Pi(\alpha)$, B на мѣсто $\Pi(\beta)$, получимъ для всякаго прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника, котораго бока a, b, c, и гдѣ A уголъ противъ a, B уголъ противъ b и $\frac{\pi}{2}$ уголъ противъ c, слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\text{sin.}\,\Pi(a)\,\text{cos.}\,A &= \text{sin.}\,B\\ \text{sin.}\,\Pi(c)\,\text{cos.}\,A &= \text{cos.}\,\Pi(b)\\ \text{cos.}\,\Pi(c)\,\text{cos.}\,A &= \text{cos.}\,\Pi(a).\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Къ этимъ уравненіямъ присоединимъ еще слѣдующее, которое также было доказано выше

$$\text{sin.}\,\Pi(a)\,\text{sin.}\,\Pi(b) = \text{sin.}\,\Pi(c). \qquad (11)$$

Первоя изъ уравненій (10) съ перемѣною въ немъ буквъ можетъ быть еще написано такъ:

$$\text{sin. } \Pi(b) \text{ cos. } B = \text{sin. } A.$$

Вставляя сюда значеніе cos. B изъ третьяго уравненія (10), получимъ:

$$\text{sin. } \Pi(b) \text{ cos. } \Pi(a) = \text{sin. } A \text{ cos. } \Pi(c).$$

Исключая изъ этого уравненія sin. $\Pi(b)$ помощью уравненія (11), получимъ:

$$\text{tang. } \Pi(c) = \text{sin. } A \text{ tang. } \Pi(a). \qquad (12)$$

Пусть теперь a, b, c будутъ бока вообще какого нибудь прямолинейнаго треугольника, потомъ A, B, C углы противъ этихъ боковъ. Опускаемъ перпендикулъ p изъ вершины угла C на бокъ c. Если p упадетъ внутри треугольника и раздѣлитъ уголъ C на два угла D и $C - D$ и бокъ c на двѣ части: x противъ D, $c - x$ противъ $C - D$, то произойдутъ два прямолинейныя прямоугольныя треугольника. Въ одномъ бока будутъ p, x, b съ противоположными углами $A, D, \frac{\pi}{2}$; въ другомъ бока будутъ $p, c - x, a$ съ противоположными углами $B, C - D, \frac{\pi}{2}$. Примѣненіе уравненія (12) къ первому изъ этихъ двухъ треугольниковъ даетъ:

$$\text{tang. } \Pi(b) = \text{sin. } A \text{ tang. } \Pi(p).$$

Второй изъ этихъ двухъ треугольниковъ даетъ такимъ же образомъ:

$$\text{tang. } \Pi(a) = \text{sin. } B \text{ tang. } \Pi(p);$$

откуда заключимъ:

$$\text{sin. } A \text{ tang. } \Pi(a) = \text{sin. } B \text{ tang. } \Pi(b). \qquad (13)$$

Примѣненіе уравненій (10) и (11) къ первому изъ двухъ треугольниковъ даетъ:

$$\text{cos. } \Pi(b) \text{ cos. } A = \text{cos. } \Pi(x),$$

$$\text{sin. } \Pi(x) \text{ sin. } \Pi(p) = \text{sin. } \Pi(b).$$

Второй треугольникъ даетъ:

$$\text{sin. } \Pi(p) \text{ sin. } \Pi(c - x) = \text{sin. } \Pi(a).$$

Вставляя въ это послѣднее уравненіе на мѣсто sin. $\Pi(c - x)$ его значеніе, взятое изъ общей формулы найденной выше для sin. $\Pi(x - y)$, получимъ:

$$\frac{\text{sin } \Pi(a)}{\text{sin. } \Pi(p)} = \frac{\text{sin. } \Pi(c) \text{ sin. } \Pi(x)}{1 - \text{cos. } \Pi(c) \text{ cos. } \Pi(x}$$

откуда мы выводимъ, вставляя

$$\text{sin. } \Pi(p) = \frac{\text{sin. } \Pi(b)}{\text{sin. } \Pi(x)}$$

$$\text{cos. } \Pi(x) = \text{cos. } \Pi(b) \text{ cos. } A$$

слѣдующее уравненіе

$$1 - \text{cos. } \Pi(b) \text{ cos. } \Pi(c) \text{ cos. } A = \frac{\text{sin. } \Pi(b) \text{ sin. } \Pi(c)}{\text{sin. } \Pi(a)}. \qquad (14)$$

Уравненія (13) и (14) повѣряются сами собой для $A = \frac{\pi}{2}$, когда перпендикуль p совпадаетъ съ бокомъ b, потому что въ этомъ случаѣ уравненіе (13) дѣлается уравненіемъ (12), а уравненіе (14) переходитъ въ уравненіе (11), уравненія доказанныя для всякаго прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника.

Если перпендикулъ p падаетъ внѣ треугольника на предолженіе бока c, прибавляя линію x къ боку c и уголъ D къ углу C, то образуются два прямоугольные треугольника. Бока одного будутъ p, x, b съ противоположными углами $(\pi - A), D, \frac{\pi}{2}$, бока другаго будутъ $p, c + x, a$ съ противоположными углами $B, C + D, \frac{\pi}{2}$. Примѣненіе уравненія (12) къ первому изъ этихъ двухъ треугольниковъ даетъ:

$$\text{tang. } \Pi(b, = \text{sin. } A \text{ tang. } \Pi(p).$$

Изъ другого треугольника мы выводимъ такимъ же образомъ:

$$\text{tang. } \Pi(a) = \text{sin. } B \text{ tang. } \Pi(p).$$

Исключая tang. $\Pi(p)$ изъ двухъ послѣднихъ уравненій снова находимъ уравненіе (13). Примѣненіе уравненій (10) и (11) къ первому изъ двухъ треугольниковъ даетъ:

$$-\text{cos. } \Pi(b) \text{ cos. } A = \text{cos. } \Pi(x)$$

$$\text{sin. } \Pi(b) = \text{sin. } \Pi(x) \text{ sin. } \Pi(p).$$

Изъ втораго треугольника мы находимъ такимъ же образомъ:

$$\text{sin. } \Pi(a) = \text{sin. } \Pi(p) \text{ sin. } \Pi(c + x).$$

Замѣняя въ этомъ уравненіи sin. $\Pi(c + x)$ его значеніемъ, взятымъ изъ общей формулы, найденной выше для sin. $\Pi(x + y)$ получимъ:

$$\frac{\text{sin. } \Pi(a)}{\text{sin. } \Pi(p)} = \frac{\text{sin. } \Pi(c) \text{ sin. } \Pi(x)}{1 + \text{cos. } \Pi(c) \text{ cos. } \Pi(x)}.$$

Вставляя сюда:

$$\sin.\,\Pi(p) = \frac{\sin.\,\Pi(b)}{\sin.\,\Pi(x)}$$

$$\cos.\,\Pi(x) = -\cos.\,\Pi(b)\cos.\,A$$

получимъ:

$$\frac{\sin.\,\Pi(a)}{\sin.\,\Pi(b)} = \frac{\sin.\,\Pi(c)}{1 - \cos.\,\Pi(b)\cos.\,\Pi(c)\cos.\,A},$$

уравненіе тожественное съ уравненіемъ (14).

Такимъ образомъ уравненія (13) (14) доказаны для всякаго прямолинейнаго треугольника.

Уравненіе (14) съ перемѣною буквъ даетъ:

$$1 - \cos.\,\Pi(c)\cos.\,\Pi(a)\cos.\,B = \frac{\sin.\,\Pi(c)\sin.\,\Pi(a)}{\sin.\,\Pi(b)}.$$

Умножая это уравненіе почленно на уравненіе (14) получимъ:

$$1 - \cos.\,\Pi(c)\cos.\,\Pi(a)\cos.\,B - \cos.\,\Pi(b)\cos.\,\Pi(c)\cos.\,A$$
$$+ \cos.\,\Pi(a)\cos.\,\Pi(b)\cos.^2\Pi(c)\cos.\,A\cos.\,B = \sin.^2\Pi(c)$$

или:

$$\cos.^2\Pi(c) - \cos.\,\Pi(c)\cos.\,\Pi(a)\cos.\,B - \cos.\,\Pi(b)\cos.\,\Pi(c)\cos.\,A$$
$$+ \cos.\,\Pi(a)\cos.\,\Pi(b)\cos.^2\Pi(c)\cos.\,A\cos.\,B = 0.$$

Откидывая отъ этого уравненія общій множитель $\cos.\,\Pi(c)$, получимъ:

$$\cos.\Pi(c) - \cos.\Pi(a)\cos.B - \cos.\Pi(b)\cos.A + \cos.\Pi(a)\cos.\Pi(b)\cos.\Pi(c)\cos.A\cos.B = 0.$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$\cos.\Pi(a) - \cos.\Pi(b)\cos.C - \cos.\Pi(c)\cos.B + \cos.\Pi(a)\cos.\Pi(b)\cos.\Pi(c)\cos.B\cos.C = 0.$$

Умножаемъ это уравненіе на $\cos.\,A$ и вычитаемъ произведеніе изъ произведенія предыдущаго уравненія на $\cos.\,C$, получимъ:

$$\cos.\,\Pi(a)\{\cos.\,A + \cos.\,B\cos.\,C\} = \cos.\,\Pi(c)\{\cos.\,C + \cos.\,A\cos.\,B\}.$$

Возвышая обѣ части этого уравненія въ квадратъ и раздѣляя потомъ на $\cos.^2\Pi(c)$, оно приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\cos.^2\Pi(a)}{\cos.^2\Pi(c)}\{\cos.\,A + \cos.\,B\cos.\,C\}^2 = \{\cos.\,C + \cos.\,A\cos.\,B\}^2.$$

Между тѣмъ уравненіе (13) даетъ:

$$\frac{1}{\cos.^2 \Pi(c)} = 1 + \frac{\sin.^2 A}{\sin.^2 C} \operatorname{tang.}^2 \Pi(a).$$

Если мы въ предпослѣднее уравненіе вставимъ вмѣсто $\frac{1}{\cos.^2 \Pi(c)}$ его значеніе изъ послѣдняго уравненія, то получимъ:

$$\cos.^2 \Pi(a) + \frac{\sin.^2 A}{\sin.^2 C} \sin.^2 \Pi(a) = \left\{\frac{\cos\ C + \cos. A \cos. B}{\cos. A + \cos. B \cos. C}\right\}^2$$

потомъ:

$$\sin.^2 \Pi(a) \left\{1 - \frac{\sin.^2 A}{\sin.^2 C}\right\} = \frac{\sin.^2 B (\sin.^2 C - \sin.^2 A)}{(\cos. A + \cos. B \cos. C)^2}.$$

Раздѣляя это уравненіе на $\sin.^2 C - \sin.^2 A$ и извлекая корень квадратный, находимъ:

$$\sin. \Pi(a) = \frac{\sin. B \sin. C}{\cos. A + \cos. B \cos. C}$$

безъ обоюдности въ знакахъ. потому что члены послѣдняго уравненія оба положительны. Дѣйствительно $\Pi(a) < \frac{\pi}{2}$; $B < \pi$; $C < \pi$, откуда слѣдуетъ, что синусы этихъ угловъ положительны, потомъ:

$$\cos. A + \cos. (B + C) = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(A + B + C) \cos. \tfrac{1}{2}(B + C - A).$$

но $A + B + C < \pi$, слѣдовательно $\cos. \frac{1}{2}(A + B + C)$ положителенъ, такъ же какъ $\cos. \frac{1}{2}(B + C - A)$; прикладывая къ обоимъ членамъ послѣдняго уравненія положительное число $\sin. B \sin. C$, находимъ: $\cos. A + \cos. B \cos. C > 0$. Итакъ во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ:

$$\cos. A + \cos. B \cos. C = \frac{\sin. B \sin. C}{\sin. \Pi(a)}. \qquad (15)$$

Умноженіе уравненія (14) почленно на слѣдующее уравненіе, которое отсюда происходитъ съ перемѣною буквъ

$$1 - \cos. \Pi(a) \cos. \Pi(b) \cos. C = \frac{\sin. \Pi(a) \sin. \Pi(b)}{\sin. \Pi(c)} \qquad (16)$$

даетъ:

$$\{1 - \cos. \Pi(a) \cos. \Pi(b) \cos. C\} \{1 - \cos. \Pi(b) \cos. \Pi(c) \cos. A\} = \sin.^2 \Pi(b).$$

которому послѣ сдѣланнаго умноженія можно дать слѣдующій видъ:

$$\cos.^2 \Pi(b) - \cos. \Pi(a) \cos. \Pi(b) \cos. C - \cos. \Pi(b) \cos. \Pi(c) \cos. A$$
$$+ \cos.^2 \Pi(b) \cos. \Pi(a) \cos. \Pi(c) \cos. A \cos. C = 0$$

или, раздѣляя на cos. $\Pi(b)$,

$$\cos.\Pi(b) - \cos.\Pi(a)\cos.C - \cos.\Pi(c)\cos.A + \cos.\Pi(a)\cos.\Pi(b)\cos.\Pi(c)\cos.A\cos.C = 0. \quad (17)$$

Но мы находимъ согласно съ уравненіемъ (13)

$$\cos.\Pi(c) = \frac{\sin.\Pi(c)\sin.C}{\sin.A}\,\text{cotang.}\,\Pi(a);$$

въ этомъ уравненіи мы можемъ вставить вмѣсто sin. $\Pi(c)$, его значеніе, взятое изъ уравненія (16), получимъ:

$$\cos.\Pi(c) = \frac{\sin.\Pi(b)\cos.\Pi(a)\sin.C}{\{1 - \cos.\Pi(a)\cos.\Pi(b)\cos.C\}\sin.A}.$$

Вставляя это значеніе cos. $\Pi(c)$ въ уравненіе (17), получимъ:

$$\text{cotang.}\,A\sin.C\sin.\Pi(b) + \cos.C = \frac{\cos.\Pi(b)}{\cos.\Pi(a)}. \quad (18)$$

Соединяемъ уравненія (13), (14), (15) и (18), которые выражаютъ зависимость угловъ и боковъ всякаго прямолинейнаго треугольника, такимъ образомъ чтобы облегчить ихъ примѣненіе

$$\left.\begin{array}{l} \sin.A\,\text{tang.}\,\Pi(a) = \sin.B\,\text{tang.}\,\Pi(b) \\ 1 - \cos.\Pi(b)\cos.\Pi(c)\cos.A = \dfrac{\sin.\Pi(b)\sin.\Pi(c)}{\sin.\Pi(a)} \\ \cos.A + \cos.B\cos.C = \dfrac{\sin.B\sin.C}{\sin.\Pi(a)} \\ \text{cotang.}\,A\sin.C\sin.\Pi(b) + \cos.C = \dfrac{\cos.\Pi(b)}{\cos\Pi(a)} \end{array}\right\} \quad (19)$$

Съ этими уравненіями Пангеометрія переходитъ въ Аналитику и такимъ образомъ составляетъ особенную полную геометрическую теорію; уравненія (19) служатъ для представленія кривыхъ линій уравненіями между координатами ихъ точекъ, для вычисленія длины и площадей кривыхъ, поверхности и объема тѣлъ, какъ я показалъ это въ ученыхъ запискахъ Казанскаго Университета за 1829 годъ (1).

Выше было замѣчено, что Пангеометрія переходитъ въ обыкновенную геометрію съ предположеніемъ линій чрезвычайно малыхъ. Теперь мы можемъ по-

(1) Смотри стр. 23 до 46.

вѣрить это заявленіе. Для всякой линіи x чрезвычайно малой можемъ довольствоваться приближенными значеніями

$$\text{cotang. } \Pi(x) = x$$
$$\sin. \Pi(x) = 1 - \tfrac{1}{2} x^2$$
$$\cos. \Pi(x) = x.$$

Если мы разсматриваемъ бока въ треугольникѣ, какъ безконечно малыя перваго порядка, и если мы пренебрегаемъ безконечно малыми величинами далѣе втораго порядка, то уравненія (19) послѣ вставленія приближенныхъ значеній $\sin. \Pi(a)$, $\sin. \Pi(b)$ и проч. примутъ слѣдующій видъ:

$$b \sin. A = a \sin. B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos. A$$
$$\cos. A + \cos. (B + C) = 0$$
$$a \sin. (A + C) = b \sin. A.$$

Первыя два изъ этихъ уравненій извѣстны въ обыкновенной тригонометріи. Послѣднія два даютъ

$$A + B + C = \pi.$$

Чтобы дать примѣръ, какимъ образомъ кривыя линіи опредѣляются помощью координатъ ихъ точекъ, называемъ y перпендикулъ, опущенный отъ точки на кругѣ къ одному изъ его неподвижныхъ поперечниковъ, котораго величину означаемъ $2r$, слѣдовательно подъ r разумѣемъ полупоперечникъ круга.

Назовемъ еще x часть этого поперечника отъ центра до перпендикула y. Примѣненіе уравненія (11) къ прямоугольному треугольнику, котораго бока x, y, r даетъ

$$\sin. \Pi(x) \sin. \Pi(y) = \sin. \Pi(r) \qquad (20)$$

что и составляетъ уравненіе круга между прямыхъ перпендикулярныхъ координатъ x, y. Если мы считаемъ x отъ конца поперечника въ кругѣ, то уравненіе (20) приметъ видъ:

$$\sin. \Pi(r - x) \sin. \Pi(y) = \sin. \Pi(r)$$

или что все равно:

$$2 (e^r + e^{-r}) = (e^{r-x} + e^{-r+x}) (e^y + e^{-y}).$$

Если мы раздѣляемъ это уравненіе на e^r и если потомъ положимъ $r = \infty$, то получимъ уравненіе для предѣльнаго круга:

$$2 = (e^y + e^{-y})\, e^{-x}.$$

или

$$\sin. \Pi(y) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} \Pi(x).$$

Изъ опредѣленія предѣльнаго круга слѣдуетъ, что двѣ оси предѣльнаго круга, проведеныя чрезъ концы одной хорды, бываютъ наклонены къ этой хордѣ подъ равными углами, свойство, которое можетъ быть принято за опредѣленіе предѣльнаго круга, и откуда можно тоже вывести уравненіе этой кривой, разсматривая треугольникъ, котораго бока $x, y,$ и хорда $2a$ предѣльнаго круга. Углы этого треугольника будутъ: $\Pi(a) - \Pi(y)$ противъ x, $\Pi(a)$ противъ y и $\frac{\pi}{2}$ противъ $2a$. Согласно съ уравненіями (10) и (11) въ этомъ треугольникѣ будетъ:

$$\text{sin. } \Pi(x) \text{ sin. } \Pi(y) = \text{sin. } \Pi(2\,a)$$

$$\text{sin. } \Pi(x) \text{ cos.} \{\Pi(a) - \Pi(y)\} = \text{sin. } \Pi(a)$$

$$\text{sin. } \Pi(y) \text{ cos. } \Pi(a) = \text{sin.} \{\Pi(a) - \Pi(y)\}.$$

Послѣднее уравненіе даетъ:

$$2 \text{ tang. } \Pi(y) = \text{tang. } \Pi(a), \tag{21}$$

а первое уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$\text{sin. } \Pi(x) \text{ sin. } \Pi(y) = \frac{\text{sin.}^2 \Pi(a)}{1 + \text{cos.}^2 \Pi(a)}.$$

Вставляя въ это уравненіе вмѣсто $\text{sin.}^2 \Pi(a)$, $1 + \text{cos.}^2 \Pi(a)$ ихъ значенія, выраженныя посредствомъ $\text{tang.}^2 \Pi(a)$, и вводя сюда значеніе $\text{tang.}^2 \Pi(a)$, изъ уравненія (21), находимъ:

$$\text{sin. } \Pi(x) \text{ sin. } \Pi(y) = \frac{2 \text{ tang.}^2 \Pi(y)}{1 + 2 \text{ tang.}^2 \Pi(y)}$$

потомъ

$$\text{sin. } \Pi(x) = \frac{2 \text{ sin. } \Pi(y)}{1 + \text{sin.}^2 \Pi(y)}$$

откуда выводимъ:

$$2 \text{ cos.}^2 \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{\{1 + \text{sin. } \Pi(y)\}^2}{1 + \text{sin.}^2 \Pi(y)}$$

$$2 \text{ sin.}^2 \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{\{1 - \text{sin. } \Pi(y)\}^2}{1 + \text{sin.}^2 \Pi(y)}.$$

Раздѣляя послѣднее изъ этихъ уравненій на предпослѣднее и извлекая квадратный корень, получимъ:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{1 - \text{sin. } \Pi(y)}{1 + \text{sin. } \Pi(y)}$$

отсюда

$$\text{sin. } \Pi(y) = \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2} \Pi(x')}{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} \Pi(x')}.$$

Второй части этого уравненія можно дать еще видъ:

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}\Pi(x') - \sin.\frac{1}{2}\Pi(x')}{\cos.\frac{1}{2}\Pi(x') + \sin.\frac{1}{2}\Pi(x)}$$

$$\frac{\sin.\left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Pi(x')\right\}}{\cos.\left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Pi(x')\right\}} = \frac{\sin.\frac{1}{2}\Pi(x)}{\cos.\frac{1}{2}\Pi(x)} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\Pi(x)$$

а слѣдовательно

$$\sin.\,\Pi(y) = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\Pi(x)$$

какъ найдено было выше.

Чтобы дать примѣръ, какъ вычисляется длина кривой линіи, ищемъ длину окружности круга, котораго полупоперечникъ r. Ведемъ два полупоперечника, которыхъ уголъ при центрѣ пусть будетъ $\frac{2\pi}{n}$, гдѣ n означаетъ цѣлое число. Опускаемъ отъ конца одного изъ полупоперечниковъ перпендикулъ p на другой полупоперечникъ. Произведеніе np будетъ тѣмъ менѣе разниться съ длиною окружности, чѣмъ число n болѣе.

Прямоугольный треугольникъ, гдѣ p одинъ изъ катетовъ, r гипотенуза, а $\frac{2\pi}{n}$ уголъ противъ p, даетъ (уравненіе 13).

$$\sin.\frac{2\pi}{n}\,\text{tang.}\,\Pi(p) = \text{tang.}\,\Pi(r).$$

Но извѣстно, что

$$\left\{n \sin \frac{2\pi}{n}\right\} = 2\pi \text{ для } n = \infty,$$

между тѣмъ какъ

$$\frac{\text{tang.}\,\Pi(p)}{n} = \frac{2}{n\,(e^p - e^{-p}).}$$

и

$$n\,(e^p - e^{-p}) = 2np$$

съ точностію тѣмъ большею, чѣмъ число n болѣе, а слѣдовательно p менѣе. Послѣ чего длина окружности $c = np = 2\pi\,\text{cotg.}\,\Pi(r)$ или длина окружности $c = \pi\,(e^r - e^{-r})$; это даетъ для r чрезвычайно малаго числа длина окружности $c = 2\pi r$, какъ въ обыкновенной геометріи.

Опредѣляемъ еще дугу s предѣльнаго круга посредствомъ координатъ y перпендикула, опущенаго отъ одного конца дуги s на ось, проведенную чрезъ другой конецъ, а x часть этой оси между вершиною и перпендикуломъ y. Пусть

c хорда дуги s, пусть также c_1, c_2, c_3 и т. д хорды дугъ $\frac{1}{2}s, \frac{1}{2^2}s, \frac{1}{2^3}s \ldots\ldots$ Мы доказали выше (уравненіе 21), что:

$$\text{cotg. } \Pi(y) = 2 \text{ cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c).$$

Подобнымъ образомъ будетъ:

$$\text{cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c) = 2 \text{ cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_1)$$

$$\text{cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_1) = 2 \text{ cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_2)$$

$$\text{cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_2) = 2 \text{ cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_3)$$

и вообще для всякаго числа n положительнаго и цѣлаго

$$\text{cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_{n-1}) = 2 \text{ cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_n).$$

Откуда заключаемъ:

$$\text{cotg. } \Pi(y) = 2^{n+1} \text{ cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_n).$$

Если n число весьма великое и слѣдовательно c_n число весьма малое, получимъ:

$$2^{n+1} \text{ cotg. } \Pi(\tfrac{1}{2} c_n) = 2^n c_n.$$

Но

$$2^n c_n = s \text{ для } n = \infty$$

откуда слѣдуетъ что

$$s = \text{cotg. } \Pi(y). \qquad (22)$$

Опредѣляемъ еще дугу s предѣльнаго круга, помощію t, части касательной, проведенной къ предѣльному кругу въ вершинѣ оси чрезъ конецъ дуги s, между точкой прикосновенія и точкой пересѣченія касательной съ осью чрезъ другой конецъ дуги s, т. е. опредѣляемъ функцію $L(t)$. Въ треугольникѣ гдѣ бока $c, t, f(t)$ съ противоположными углами $\Pi(t), \pi - \Pi(\frac{1}{2} c), \frac{1}{2}\pi - \Pi(\frac{1}{2} c)$, находимъ, примѣняя сюда уравненіе (13),

$$\text{sin. } \Pi(t) \text{ tang. } \Pi(c) = \text{sin. } \Pi(\tfrac{1}{2} c) \text{ tang. } \Pi(t),$$

но мы видѣли (уравненіе 21), что

$$\text{tang. } \Pi(\tfrac{1}{2} c) = 2 \text{ tang. } \Pi(y)$$

къ чему прибавимъ еще замѣчаніе, что

$$\text{tang. } \Pi(c) = \frac{\text{sin.}^2 \Pi(\frac{1}{2} c)}{2 \text{ cos. } \Pi(\frac{1}{2} c)}.$$

Послѣ чего

$$\cos. \Pi(t) = 2 \operatorname{cotg}. \Pi(\tfrac{1}{2} c)$$

т. е. въ слѣдствіе уравненія (22)

$$\cos. \Pi(t) = s = L(t).$$

Уравненіе прямой линіи довольно сложно, если это уравненіе должно быть общимъ и относится ко всякому положенію прямой въ отношеній къ осямъ координатъ. Опускаемъ изъ опредѣленной точки на данной прямой перпендикулъ a къ оси x и называемъ L уголъ, который этотъ перпендикулъ дѣлаетъ съ прямой. Называемъ еще y перпендикулъ, опущенный къ оси x изъ другой точки на данной прямой. Пусть l разстояніе второй точки отъ первой, и пусть x будетъ часть оси x между двухъ перпендикуловъ. Ведему прямую r отъ вершины a до конца y; составятся два треугольника: 1) прямоугольный, котораго бока a, x, r съ противоположными углами A, X, $\frac{\pi}{2}$, 2) съ боками y, r, l съ противоположными углами $L - X$, $($, $\frac{\pi}{2} - A$. Примѣненіе уравненій (10) (11) къ первому изъ этихъ треугольниковъ даетъ:

$$\sin. \Pi(x) \sin. \Pi(a) = \sin. \Pi(r)$$

$$\sin. \Pi(x) \cos. X = \sin. A$$

$$\sin. \Pi(a) \cos. A = \sin. X$$

$$\cos. \Pi(r) \cos. A = \cos. \Pi(x)$$

$$\cos. \Pi(r) \cos. X = \cos. \Pi(a).$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\operatorname{tang}. A = \operatorname{tang}. \Pi(x) \cos. \Pi(a)$$

$$\operatorname{tang}. \Pi(r) = \operatorname{tang}. \Pi(x) \sin. \Pi(a) \cos. A$$

$$\operatorname{tang}. X = \operatorname{tang}. \Pi(a) \cos. \Pi(x)$$

$$\cos. \Pi(x) = \cos. \Pi(r) \cos. A$$

$$\sin. X = \sin. \Pi(a) \cos. A.$$

Примѣненіе послѣдняго изъ уравненій (19) ко второму треугольнику даетъ

$$\operatorname{cotg}. (L - X) \cos. A \sin. \Pi(r) + \sin. A = \frac{\cos. \Pi(r)}{\cos. \Pi(y)}$$

откуда слѣдуетъ что:

$$\cos.\ \Pi(y) = \frac{\cos.\ \Pi(r)}{\operatorname{cotg.}\ (L - X)\cos.\ A \sin.\ \Pi(r) + \sin.\ A}$$

$$\cos.\Pi(y) = \frac{\cos.\ \Pi(r)\,(\operatorname{tang.}\ L - \operatorname{tang.}\ X)}{\{1 + \operatorname{tang.} L \operatorname{tang.} X\}\{\cos. A \sin.\Pi(a)\sin.\Pi(x) + \sin. A\}\{\operatorname{tang.} L - \operatorname{tang.} X\}}.$$

Вставляя въ это уравненіе на мѣсто tang. X его значеніе, получимъ:

$$\cos.\ \Pi(y)$$

$$= \frac{\cos.\ \Pi(r)\{\operatorname{tang.}\ L - \operatorname{tang.}\ \Pi(a)\cos.\ \Pi(x)\}}{\{1 + \operatorname{tang} L \operatorname{tang} \Pi(a)\cos\Pi(x)\ \cos A \sin\Pi(a)\sin\Pi(x) + \sin A\}\{\operatorname{tang} L - \operatorname{tang}\Pi(a)\cos\Pi(x)\}}.$$

Вставляемъ въ это уравненіе вмѣсто $\cos.\ \Pi(r)$ его значеніе, мы находимъ послѣ всѣхъ приведеній что:

$$\cos.\ \Pi(y) = \frac{\cos.\ \Pi(a)}{\sin.\ \Pi(x)} - \sin.\ \Pi(a)\ \operatorname{cotg.}\ \Pi(x)\ \operatorname{cotg.}\ L. \qquad (23)$$

Если прямая параллельна съ осью x, то $L = \Pi(a)$ и уравненіе (23) приметъ видъ:

$$\cos.\ \Pi(y) = \frac{\cos\ \Pi(a)}{\sin.\ \Pi(x)} - \frac{\cos.\ \Pi(a)}{\operatorname{tang.}\ \Pi(x)}$$

или

$$\cos.\ \Pi(y) = \cos.\ \Pi(a)\ e^{-x}. \qquad (24)$$

Если называемъ s, s' длину двухъ дугъ предѣльнаго круга, заключенныхъ между осью x и прямой съ ней параллельной и при томъ, изъ которыхъ дугъ первая s, касательная къ a въ основаніи, а вторая касательная къ y въ основаніи, то получимъ согласно съ тѣмъ, что было доказано:

$$s = \cos.\ \Pi(a)$$

$$s' = \cos.\ \Pi(y)$$

послѣ чего

$$s' = s\,e^{-x}$$

гдѣ x разстояніе между двухъ дугъ s и s'. Это уравненіе показываетъ, что постоянное E, введенное выше, чтобы означить содержаніе двухъ дугъ предѣльнаго круга между двумя параллельными, дугъ, которыхъ разстояніе равно единицѣ, равняется e т. е. основанію Неперовыхъ логариѳмъ.

Если въ уравненіи (23) положимъ $a = o$ и если ставимъ $\pi - L$ на мѣсто L то получимъ:

$$\cos.\ \Pi(y) = \operatorname{cotg.}\ \Pi(x)\ \operatorname{cotg.}\ L;$$

это уравненіе принадлежитъ прямой линіи, которая проходитъ чрезъ начало координатъ x, дѣлая уголъ L съ осью x, что согласуется съ уравненіемъ (10).

Разсматриваемъ четыреугольникъ, котораго два бока a, y перпендикулярны къ третьему боку x. Пусть c будетъ четвертый бокъ, а φ уголъ между a и c тогда какъ уголъ между c и y прямой. Проводимъ діагоналъ r изъ вершины угла φ къ вершинѣ противоположнаго прямаго угла. Этотъ діагоналъ дѣлитъ четыреугольникъ на два прямоугольныя треугольника; бока одного изъ этихъ треугольниковъ будутъ a,x,r съ противоположными углами A, X, $\frac{\pi}{2}$, бока другаго y, c, r съ противоположными углами $\varphi - X, \frac{\pi}{2} - A, \frac{\pi}{2}$.

Примѣненіе уравненій (10) (11) (13) къ первому изъ этихъ треугольниковъ даетъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin.\ \Pi(r) &= \sin.\ \Pi(a) \sin.\ \Pi(x) \\ \sin.\ A \operatorname{tang}.\ \Pi(a) &= \sin.\ X \operatorname{tang}.\ \Pi(x) \\ \cos.\ \Pi(r) \cos.\ A &= \cos.\ \Pi(x) \\ \cos.\ \Pi(r) \cos.\ X &= \cos.\ \Pi(a); \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

второй треугольникъ даетъ такимъ же образомъ слѣдующія уравненія

$$\left.\begin{aligned} \sin.\ \Pi(y) \sin.\ \Pi(c) &= \sin.\ \Pi(r) \\ \sin.\ \Pi(y) \cos.\ (\varphi - X) &= \cos.\ A \\ \cos.\ \Pi(r) \cos.\ (\varphi - X) &= \cos.\ \Pi(c) \\ \cos.\ \Pi(r) \sin.\ A &= \cos.\ \Pi(y). \end{aligned}\right\} \quad (H)$$

Уравненіе (12) приложенное къ первому треугольнику даетъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}.\ \Pi(r) &= \sin.\ X \operatorname{tang}.\ \Pi(x) \\ \operatorname{tang}.\ \Pi(r) &= \sin.\ A \operatorname{tang}.\ \Pi(a) \end{aligned}\right\} \quad (K)$$

тогда какъ примѣненіе того же уравненія ко второму треугольнику даетъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}.\ \Pi(r) &= \sin.\ (\varphi - X) \operatorname{tang}.\ \Pi(y) \\ \operatorname{tang}.\ \Pi(r) &= \cos.\ A \operatorname{tang}.\ \Pi(c). \end{aligned}\right\} \quad (L)$$

Вставляя во второе изъ уравненій (K) на мѣсто $\sin.\Pi(r)$ его значеніе, взятое изъ уравненій (G), находимъ:

$$\cos.\ \Pi\ (r) = \frac{\sin.\ \Pi\ (x) \cos.\ \Pi(a)}{\sin.\ A}.$$

Вставляя это значеніе cos. $\Pi(r)$ въ послѣднее изъ уравненій (H) получимъ:

$$\cos.\,\Pi(y) = \sin.\,\Pi(x)\cos.\,\Pi(a). \qquad (25)$$

Раздѣляя почленно послѣднее изъ уравненій (H) на третіе изъ уравненій (G) получимъ:

$$\operatorname{tang}.\,A = \frac{\cos.\,\Pi(y)}{\cos.\,\Pi(x)};$$

вставляемъ въ это уравненіе на мѣсто cos. $\Pi(y)$ его значеніе изъ (25) будетъ:

$$\operatorname{tang}.\,A = \operatorname{tang}.\,\Pi(x)\cos.\,\Pi(a).$$

Дѣленіе втораго изъ уравненій (G) на послѣднее изъ этихъ же уравненій почленно даетъ:

$$\frac{\operatorname{tang}.\,X\,\operatorname{tang}.\,\Pi(x)}{\cos.\,\Pi(r)} = \frac{\sin.\,A\,\operatorname{tang}.\,\Pi(a)}{\cos.\,\Pi(a)}.$$

Вставляя въ это уравненіе на мѣсто $\sin A$ его значеніе, взятое изъ послѣдняго въ уравненіяхъ (H), получимъ:

$$\operatorname{tang}.\,X = \frac{\cos.\,\Pi(y)\operatorname{tang}.\,\Pi(a)}{\cos.\,\Pi(a)}\operatorname{cotg}.\,\Pi(x).$$

Замѣняя въ этомъ уравненіи cos. $\Pi(y)$ его значеніемъ, найденнымъ выше, получимъ:

$$\operatorname{tang}.\,X = \cos.\,\Pi(x)\operatorname{tang}.\,\Pi(a).$$

Соединеніе втораго изъ уравненій (H) съ первымъ изъ уравненій (L) даетъ еще:

$$\operatorname{tang}.\,(\varphi - X)\frac{\operatorname{tang}.\,\Pi(y)}{\sin.\,\Pi(y)} = \frac{\operatorname{tang}.\,\Pi(r)}{\cos.\,A}$$

или

$$\operatorname{tang}.\,(\varphi - X) = \frac{\cos\,\Pi(y)\operatorname{tang}.\,\Pi(r)}{\cos.\,A},$$

а если мы вставимъ значеніе tang. $\Pi(r)$ изъ втораго въ уравненіяхъ (K) то получимъ:

$$\operatorname{tang}.\,(\varphi - X) = \operatorname{tang}.\,A\,\operatorname{tang}.\,\Pi(a)\cos.\,\Pi(y).$$

Это уравненіе, когда сюда поставится на мѣсто tang. A, tang. X ихъ значенія, найденныя выше, приметъ слѣдующій видъ:

$$\operatorname{tang}.\,\varphi = \frac{\operatorname{tang}.\,\Pi(a)}{\cos.\,\Pi(x)}. \qquad (26)$$

Это уравненіе показываетъ, что x всегда возможно, покуда уголъ φ больше $\Pi(a)$ и менѣе $\frac{\pi}{2}$, или

$$\pi - \varphi > \Pi(a); \pi - \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Значеніе cos. $\Pi(x)$ положительно если

$$\frac{\pi}{2} > \varphi > \Pi(a)$$

и линія x слѣдовательно тоже положительна.

Но если $\frac{\pi}{2} > \pi - \varphi > \Pi(a)$ то значеніе cos. $\Pi(x)$ дѣлается отрицательной и линія x лежитъ по другую сторону перпендикула a.

Это доказываетъ, что если двѣ прямыя линіи, лежащія въ одной плоскости, не встрѣчаются, какъ бы далеко не продолжались, не будучи однакожъ параллельными, то онѣ обѣ бываютъ перпендикулярны къ одной прямой; всякія двѣ прямыя линіи, которыя, находясь въ одной плоскости, ни параллельны ни перпендикулярны къ одной прямой должны необходимо пересѣкаться.

Прямыя линіи въ одной плоскости пересѣкаются взаимно по достаточному продолженію, если уголъ между одной прямой и перпендикуломъ изъ произвольной ея точки опущенный на другую прямую, менѣе нежели уголъ параллельности, которой соотвѣтствуетъ длинѣ этаго перпендикула. Съ помощію послѣднихъ предложеній можно значительно упростить общее уравненіе прямой линіи (23) въ случаѣ, когда прямая, къ которой относится уравненіе, не пересѣкаетъ оси x.

Пусть a будетъ перпендикулъ опущенный къ оси x изъ точки постоянной, по произвольной на данной прямой. Пусть L тотъ изъ двухъ угловъ между прямой и этимъ перпендикуломъ, который лежитъ на сторонѣ x-въ положительныхъ.

Опредѣляемъ наперед такъ линію l, чтобы:

$$\text{cos. } \Pi(l) = \text{tang. } \Pi(a) \text{ cotg. } L.$$

Это всегда возможно покуда $L > \Pi(a)$ т. е. покуда прямая не пересѣкаетъ ось x-овъ. Полагаемъ эту линію l на ось x-овъ, отъ начала координатъ на сторонѣ x-овъ положительныхъ или отрицательныхъ смотря по знаку l. Вставляемъ на концѣ линіи l перпендикулъ къ оси x-овъ, продолжаемъ его до пересѣченія съ данной прямой и пусть b будетъ часть этого перпендикула между

данной прямой и осью x-овъ. Уголъ подъ которымъ этотъ перпендикулъ встрѣчаетъ данную прямую, долженъ быть прямой согласно съ уравненіемъ (26). Если теперь конецъ перпендикула b принимаетъ за начало координатъ, то будетъ имѣть согласно съ уравненіемъ (25):

$$\cos. \Pi(b) = \cos. \Pi(y) \sin. \Pi(x), \qquad (27)$$

что и будетъ общее уравненіе прямой которая не пересѣкаетъ ось x-овъ.

Въ этомъ уравненіи можемъ полагать $y = a$ и въ мѣстѣ съ тѣмъ $x = -l$; это даетъ:

$$\cos. \Pi(b) = \cos. \Pi(a) \sin. \Pi(l)$$

если сюда поставимъ, вмѣсто $\cos.\Pi(b) \sin.\Pi(l)$, ихъ значенія, то уравненія сдѣлается:

$$\cos. \Pi(y) \sin. \Pi(x) = \cos. \Pi(a) \sqrt{1 - \text{tang.}^2 \Pi(a) \text{cotg.}^2 L.}$$

Вторая часть въ этомъ уравненіи дѣлается воображаемой, какъ скоро $\text{tang.} \Pi(a) \text{cotg.} L > 1$ т. е. для всякой прямой, которая пересѣкаетъ ось x-овъ.

Послѣ того, что до сихъ поръ найдено, можемъ рѣшить задачу: опредѣлить разстояніе двухъ точекъ, которыхъ положеніе въ плоскости дано помощію ихъ прямоугольныхъ координатъ: x, y и x', y'. Положимъ для сокращенія

$$\triangle x = x' - x; \triangle y = y' - y.$$

Опускаемъ изъ вершины y перпендикулъ къ y' и означаемъ длину этаго перпендикула q, тогда какъ y_1 означаетъ часть y' между осью x-овъ и перпендикуломъ q.

Согласно съ уравненіемъ (25) будетъ:

$$\cos. \Pi(y_1) = \cos. \Pi(y) \sin. \Pi(\triangle x)$$

$$\cos. \Pi(q) = \cos. \Pi(\triangle x) \sin. \Pi(y_1).$$

Помощію этихъ уравненій опредѣливъ значенія y_1 и q, искомое разстояніе двухъ точекъ, которое означаемъ r, будетъ дано слѣдующимъ уравненіемъ, которое выводится изъ уравненія (11).

$$\sin. \Pi(r) = \sin. \Pi(y' - y_1) \sin. \Pi(q).$$

Если $\triangle x$ и $\triangle y$, а слѣдовательно q, r весьма малы, такъ что можно пренебречь ихъ высшими степенями въ сравненіи съ нисшими, то r представитъ

элементъ $q\,s$ кривой линіи, къ выраженію котораго приходимъ, взявъ:

$$\sin.\,\Pi(q) = 1 - \tfrac{1}{2}q^2$$

$$\cos.\,\Pi(q) = q - \tfrac{1}{3}q^3$$

$$\sin.\,\Pi(r) = 1 - \tfrac{1}{2}r^2$$

$$\sin.\,\Pi(y' - y_1) = 1 - \tfrac{1}{2}(y' - y_1)^2$$

послѣ чего выходитъ:

$$q = \frac{\Delta x}{\sin.\,\Pi(y)}.$$

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin.^2\Pi(y)}}.$$

Для предѣльнаго круга:

$$\sin.\,\Pi(y) = e^{-x}.$$

Изъ общихъ выраженій, которыя опредѣляютъ $\sin.\,\Pi(a)$ и т. д. помощью a и которыя даны выше, выходитъ:

$$d\,\Pi(a) = -\sin.\,\Pi(a)\,da;$$

послѣ чего дифференцируя уравненіе предѣльнаго круга находимъ:

$$\sin.\,\Pi(y)\cos.\,\Pi(y)\,dy = e^{-x}\,dx$$

и

$$ds = \frac{dx\,e^x}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}.$$

Интегрируя въ отношеніи x отъ $x = o$ находимъ:

$$s = \sqrt{e^{-2x} - 1}.$$

или иначе

$$s = \text{cotg.}\,\Pi(y)$$

какъ это было найдено выше.

Если означимъ r разстояніе точки по круговой линіи отъ начала координатъ, а φ уголъ, который это разстояніе r дѣлаетъ съ осью x-овъ положительныхъ, то мы находимъ въ прямоугольномъ треугольникѣ, котораго стороны y, x, r согласно съ уравненіемъ (12):

$$\text{tang.}\,\Pi(r) = \sin.\,\varphi\,\text{tang.}\,\Pi(y).$$

Взявъ логариѳмы на обоихъ сторонахъ этого уравненія и дифференцируя въ отношеніи къ r, φ, y получимъ:

$$\frac{dr}{\cos.\,\Pi(r)} = -\,\text{cotg.}\,\varphi\,d\varphi + \frac{dy}{\cos.\,\Pi(y)}.$$

Изъ этого уравненія выводимъ:

$$dy = \left\{ \text{cotg.}\, \varphi\, d\varphi + \frac{dr}{\text{cos.}\, \Pi(r)} \right\} \text{cos.}\, \Pi(y),$$

или вставляя на мѣсто cos. $\Pi(y)$ его значеніе помощью φ и r:

$$dy = \frac{\text{cos.}\, \varphi\, \text{cos.}\, \Pi(r)\, d\varphi + \text{sin.}\, \varphi\, dr}{\sqrt{1 - \text{cos.}^2 \varphi\, \text{cos.}^2 \Pi(r)}}.$$

Чтобы выразить dx помощью r, φ, беремъ уравненіе (10)

$$\text{cos.}\, \Pi(r)\, \text{cos.}\, \varphi = \text{cos.}\, \Pi(x).$$

Дифференцируя логариѳмы обѣхъ частей этого уравненія въ отношеніи къ r, φ, x, получимъ:

$$\frac{\text{sin.}^2 \Pi(r)\, dr}{\text{cos.}\, \Pi(r)} - \text{tang.}\, \varphi\, d\varphi = \frac{\text{sin.}^2 \Pi(x)\, dx}{\text{cos.}\, \Pi(x)}$$

откуда выводимъ помощью уравненій:

$$\text{sin.}\, \Pi(x)\, \text{sin.}\, \Pi(y) = \text{sin.}\, \Pi(r)$$

$$\text{cos.}\, \Pi(r)\, \text{cos.}\, \varphi = \text{cos.}\, \Pi(x)$$

слѣдующее уравненіе, которое выражаетъ искомое значеніе dx:

$$\frac{dx}{\text{sin.}\, \Pi(y)} = \frac{\text{cos.}\, \varphi\, \text{sin.}\, \Pi(r)\, dr - \text{sin.}\, \varphi\, \text{cotg.}\, \Pi(r)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \text{cos.}^2 \varphi\, \text{cos.}^2 \Pi(r)}}$$

послѣ чего:

$$ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2\, \text{cotg.}^2 \Pi(r)}.$$

Для круга, полагая, что начало координатъ въ центрѣ, находимъ, такъ какъ здѣсь $dr = o$:

$$ds = d\varphi\, \text{cotg.}\, \Pi(r).$$

Интегрируя отъ $\varphi = o$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и умножая все потомъ на 4 находимъ слѣдующее выраженіе для окружности съ полупоперечникомъ r

$$2\pi\, \text{cotg.}\, \Pi(r)$$

согласно съ тѣмъ, что было найдено выше.

Если называемъ s дугу предѣльнаго круга отъ оси x-овъ, то вращеніе s около оси x-овъ производитъ часть предѣльной сферы, а конецъ дуги опишетъ

окружность круга, которая на предѣльной сферѣ опредѣляется также, какъ окружность круга съ полупоперечникомъ s опредѣляется на плоскости въ обыкновенной геометріи; отсюда слѣдуетъ, что окружность этого круга должна быть равна $2\pi s$. Съ другой стороны окружность того же круга разсматриваемая въ его плоскости, гдѣ перпендикулъ y, опущенный отъ конца дуги s на ось предѣльнаго круга, которая служитъ осью x-овъ и проходитъ чрезъ другой конецъ дуги составляетъ полупоперечникъ круга, дается въ пангеометріи выраженіемъ:

$$2\pi \text{ cotg. } \Pi(y);$$

откуда слѣдуетъ, что $s = \text{cotg. } \Pi(y)$ какъ доказано было преждѣ.

Чтобы раздѣлить площадь на элементы, ведемъ по площади дуги предѣльнаго круга, для которыхъ осью служитъ ось x-овъ и такимъ образомъ, что ихъ взаимное разстояніе безконечно мало и можетъ быть названо dx. Пусть s одна изъ этихъ дугъ предѣльнаго круга, между осью x-овъ и точкой на кривой линіи, которой координаты x, y; пусть s', дуга другаго изъ этихъ предѣльныхъ круговъ между осью x-овъ и точкой на тойже кривой, которой координаты $x+dx, y+dy$.

Часть площади безконечно малая заключенная между s' и s съ одной стороны и осью x-овъ и кривой съ другой стороны выразится:

$$dS = \frac{e\,s\,dx}{e-1}$$

куда вставляя $s = \text{cotg. } \Pi(y)$ получимъ:

$$dS = \frac{e\,dx \text{ cotg. } \Pi(y)}{e-1}.$$

Для примѣра опредѣляемъ площадь предѣльнаго круга, для котораго нашли мы уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ:

$$\text{sin. } \Pi(y) = e^{-x},$$

помощью котораго уравненія находимъ выраженіе для элемента искомой площади:

$$dS = \frac{e}{e-1}\,dy \text{ cos. } \Pi(y) \text{ cotg. } \Pi(y).$$

Интегрируя это выраженіе отъ $y = o$ находимъ площадь, ограниченную дугою предѣльнаго круга, осью x-овъ и ординатою y

$$S = \frac{e}{e-1}\left\{\text{cotg. } \Pi(y) - \tfrac{1}{2}\pi + \Pi(y)\right\}.$$

Мы видѣли, что площадь между двухъ параллельныхъ иродолжаемая до безконечности на сторонѣ параллельности и ограниченная дугою предѣльнаго круга, которой дугѣ двѣ параллельныя служатъ осями, выражается:

$$\frac{e\,s}{e-1} = \frac{e\,\text{cotg.}\,\mathit{\Pi}\,(\mathring{y})}{e-1}$$

послѣ чего находимъ площадь между двухъ прямыхъ параллельныхъ, изъ которыхъ одна перпендикулярна къ y, которые проведены чрезъ концы y и продолжены до безконечности, выраженіе

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(y).$$

Помощью этого выраженія находимъ площадь прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника, когда даны острые углы $\mathit{\Pi}\,(\alpha)$, $\mathit{\Pi}\,(\beta)$, противъ перпендикулярныхъ боковъ a, b треугольника. Продолжаемъ гипотенузу c да вершину угла $\mathit{\Pi}(\beta)$ и продолженіе дѣлаемъ равно β. Перпендикулъ въ концѣ β дѣлается параллельнымъ съ продолженіемъ бока a. Площадь безконечно простирающаяся между этими двумя параллельными, продолженными въ сторону параллельности, и ограниченная съ другой стороны линіею β будетъ

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(\beta).$$

Если ведемъ теперь чрезъ вершину угла $\mathit{\Pi}\,(\alpha)$ параллельную съ перпендикуломъ и которая наклонена къ боку c подъ угломъ $\mathit{\Pi}\,(c+\beta)$ и будетъ вмѣсто параллельна съ продолженіемъ бока a, то величина площади между $c+\beta$ и двумя параллельными, чрезъ концы $c+\beta$ проведенными и продолженными до безконечности на сторонѣ параллельности будетъ:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(c+\beta).$$

Подобнымъ образомъ часть площади между бокомъ b, прямой проведенной чрезъ вершину $\mathit{\Pi}\,(\alpha)$ и бокомъ a, безконечно продолженнымъ будетъ:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(b).$$

Послѣ чего сумма $\frac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(b)$ уменьшая $\frac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(c+\beta)$ будетъ выраженіе площади треугольника, которую такимъ образомъ находимъ $= \frac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(b) - \mathit{\Pi}(\beta) + \mathit{\Pi}(c+\beta)$. Между тѣмъ мы доказали, что $\mathit{\Pi}\,(b) = \mathit{\Pi}\,(\alpha) + \mathit{\Pi}\,(c+\beta)$, поставя отсюда въ выраженіе площади треугольника на мѣсто $\mathit{\Pi}\,(b)$ его значеніе, находимъ площадь прямоугольнаго прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathit{\Pi}\,(\alpha) - \mathit{\Pi}\,(\beta);$$

это значитъ, что площадь прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника равна

разности двухъ прямыхъ угловъ безъ суммы трехъ угловъ треугольника. Отсюда слѣдуетъ еще, что площадь всякаго прямолинейнаго треугольника равна избытку двухъ прямыхъ угловъ надъ суммою трехъ угловъ треугольника.

Легко вывести изъ предыдущаго, что площадь всякаго четыреугольника равна избытку четырехъ прямыхъ угловъ надъ суммою четырехъ угловъ четыреугольника и вообще площадь многоугольника n сторонъ равна избытку $(n—2)\pi$ надъ суммою угловъ многоугольника.

Разсматриваемъ особенно четыреугольникъ, котораго два бока a, y оба перпендикулярны къ третьему боку x и котораго четвертый бокъ t перпендикуляренъ къ боку a и дѣлаетъ съ y уголъ, который означимъ ω.

Мы доказали выше (уравненіе 25), что между составными частями такого четыреугольника существуетъ уравненіе

$$\cos. \Pi(a) = \cos. \Pi(y) \sin. \Pi(x);$$

если разсматриваемъ x и y переменными и a постояннымъ то площадь этого четыреугольника выражаетъ, какъ и всякая площадь, какъ доказано выше, интеграломъ

$$\int d x \operatorname{cotg}. \Pi(y),$$

который, будучи приложенъ къ настоящему случаю, даетъ, когда поставимъ сюда значеніе $\operatorname{cotg}. \Pi(y)$, слѣдующее выраженіе для площади

$$\int_{\circ} \frac{d x \cos. \Pi(a)}{\sqrt{\sin.^2 \Pi(x) - \cos.^2 \Pi(a)}},$$

тогда какъ площадь этаго четыреугольника, согласно съ тѣмъ, какъ опредѣляется площадь всякаго многоугольника помощью угловъ, $= \frac{1}{2}\pi - \omega$. Это даетъ:

$$\frac{1}{2}\pi - \pi = \cos. \Pi(a) \int_{\circ} \frac{d x}{\sqrt{\sin.^2 \Pi(x) - \cos.^2 \Pi(a)}}. \qquad (M)$$

Уголъ ω, который дѣлаетъ бокъ t съ бокомъ y, опредѣляется уравненіемъ (уравненіе 26)

$$\text{tang}. \omega = \frac{\text{tang}. \Pi(y)}{\cos. \Pi(x)}.$$

Если въ уравненіи (M) пишемъ a вмѣсто $\Pi(a)$, ξ на мѣсто $\Pi(x)$ оно сдѣлается

$$\frac{\frac{1}{2}\pi - \omega}{\cos. \alpha} = \int_{\frac{\pi}{2}} \frac{d \xi}{\sin. \xi \sqrt{\sin.^2 \alpha - \sin.^2 \xi}}$$

гдѣ α величина постоянная.

Справедливость этаго выраженія для интеграла можетъ быть повѣрена дифференцированіемъ. Пангеометрія указываетъ также на новой способъ приближенія къ значеніямъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Пусть требуется найти

$$\int A\,dx$$

гдѣ A данная функція отъ x. Чтобы отыскать значеніе этого интеграла надобно положить $A = \text{cotg.}\,\Pi(y)$, потомъ опредѣлять значенія $y', y'', y''' \ldots$, которые отвѣчаютъ $x', x'', x''' \ldots$, взятыхъ произвольно между границъ интегрированія, послѣ чего надобно вычислять длину хордъ, которыми соединяются вершины y' съ y'', y'' съ y'''.... и уголъ, который каждая хорда дѣлаетъ съ продолженіемъ слѣдующей хорды. Сумма этихъ угловъ даетъ приближенное значеніе интеграла.

Площадь между двумя параллельными, проведенными чрезъ концы данной прямой, продолженными до безконечности на сторонѣ параллельности, и самой прямой будетъ $= \pi$ — сумма двухъ угловъ, которые двѣ параллельныхъ дѣлаютъ съ данной прямой, потому что эта площадь можетъ быть принимаема за площадь треугольника, въ которомъ одинъ уголъ равенъ нулю.

Площадь кривой линіи можетъ быть раздѣлена на элементы прямыми параллельными къ одной и тойже данной прямой напр. къ оси y. Если ведемъ на концѣ абсциссы x параллельную къ оси y, то эта прямая дѣлаетъ съ осью x уголъ $= \Pi(x)$; прямая проведенная чрезъ конецъ абсцины $x + dx$, дѣлаетъ такимъ же образомъ съ осью x уголъ $= \Pi(x + dx)$, откуда слѣдуетъ, что площадь между этими двумя параллельными и dx равна $-d\Pi(x)$. Пусть теперь u будетъ величина первой параллельной между осью x и кривой; будетъ въ слѣдствіе выше доказаннаго

$$-e^{-u}\,d\,\Pi(x),$$

откуда слѣдуетъ, что часть этой площади, которая лежитъ между кривой и осью x т. е. элементъ площади кривой выразится

$$dS = -(1 - e^{-u})\,d\,\Pi(x).$$

Чтобы вычислить площадь круга съ полупоперечникомъ r надобно въ общее выраженіе элемента площади кривой, найденной выше,

$$dS = dx\,\text{cotg.}\,\Pi(y)$$

поставить значеніе $\text{cotg.}\,\Pi(y)$ изъ уравненія круга:

$$\text{sin.}\,\Pi(x)\,\text{sin.}\,\Pi(y) = \text{sin.}\,\Pi(r)$$

гдѣ начало прямоугольныхъ координатъ въ центрѣ круга. Это даетъ

$$d\,S = d\,x\,\sqrt{\frac{\sin.^2 \Pi\,(x)}{\sin.^2 \Pi\,(r)} - 1};$$

интегрируя отъ $x = o$ находимъ:

$$S = \frac{1}{\sin.\,\Pi\,(r)}\,\text{arc. sin.}\left\{\frac{\cos.\,\Pi\,(x)}{\cos.\,\Pi\,(r)}\right\} - \text{arc. sin.}\left\{\frac{\text{cotg.}\,\Pi\,(x)}{\text{cotg.}\,\Pi\,(r)}\right\}.$$

Для $x = r$ это даетъ площадь четверти круга:

$$\frac{\pi}{2\sin.\,\Pi\,(r)} - \frac{\pi}{2};$$

умножая на 4, находимъ для площади круга

$$2\,\pi\left\{\frac{1}{\sin.\,\Pi\,(r)} - 1\right\}$$

или что все равно:

$$\pi\left\{e^{\frac{r}{\alpha}} - e^{-\frac{r}{\alpha}}\right\}^2.$$

Если r чрезвычайно мало, то это выраженіе даетъ площадь круга $= \pi\,r^2$; тоже самое выраженіе, которое обыкновенно дается для площади круга въ Геометріи.

Помощью предыдущаго выраженія площади круга можно дать элементу площади всякой кривой линіи еще такое выраженіе:

$$d\,S = d\,\varphi\left\{\frac{1}{\sin.\,\Pi\,(r)} - 1\right\}$$

гдѣ r есть радіусъ векторъ, проведенный изъ начала координатъ къ точкѣ на кривой, а φ а уголъ, который этотъ радіусъ векторъ дѣлаетъ съ постоянной прямой, проходящій чрезъ начало координатъ.

Примѣненіе этого выраженія къ вычисленію площади треугольника, котораго бока a, b, c съ противоположными углами A, B, C даетъ, если разсматриваемъ A, C и стороны a, b какъ перемѣнные.

$$\text{площадь треугольника} = \int_o^A d\,A\left\{\frac{1}{\sin.\,\Pi\,(r)} - 1\right\}.$$

Бокъ b выражается въ функціи c, A, B помощью послѣдняго уравненія (19)

$$\text{cotg.}\,B\,\sin.\,A\,\sin.\,\Pi\,(c) + \cos.\,A = \frac{\cos.\,\Pi\,(c)}{\cos.\,\Pi\,(b)}.$$

Беремъ изъ этаго уравненія значеніе sin. $\Pi(b)$ и ставимъ его въ выраженіи для площади треугольника, получаемъ:

$$\text{площадь треугольника} = \int_0^A \frac{dA}{\sqrt{1 - \frac{\cos.^2 \Pi(c)}{(\text{cotg. } B \sin. A \sin. \Pi(c) + \cos. A)^2}}} - A.$$

между тѣмъ было доказано, что площадь треугольника

$$= \pi - A - B - C$$

гдѣ A и B углы данные и C опредѣляется уравненіемъ (19).

$$\cos. C + \cos. A \cos. B = \frac{\sin. A \sin. B}{\sin. \Pi(c)}.$$

Сравненіе этихъ двухъ выраженій для площади треугольника даетъ:

$$\pi - B - G = \int_0^A \frac{dA\{\text{cotg. } B \sin. A \sin. \Pi(c) + \cos. A\}}{\sqrt{(\text{cotg. } B \sin. A \sin. \Pi(c) + \cos. A)^2 - \cos.^2 \Pi(c)}}.$$

Если $B = \frac{\pi}{2}$ это уравненіе даетъ:

$$\frac{\pi}{2} - C = \int_0^A \frac{dA \cos. A}{\sqrt{\cos.^2 A - \cos.^2 \Pi(c)}}$$

уравненіе, которое послѣ интегрированія принимаетъ видъ:

$$\tfrac{1}{2}\pi - C = \text{arc. sin.} \left(\frac{\sin. A}{\sin. \Pi(c)} \right)$$

что согласно съ уравненіемъ, которое опредѣляетъ C.

Изъ того что было доказано впереди можно вывести для выраженія площади всякаго замкнутаго многоугольника два выраженія, одно выраженное опредѣленнымъ интеграломъ, другое зависящее только отъ суммы угловъ многоугольника.

Два значенія для тойже площади, будучи необходимо равными, доставляютъ способъ вычислять опредѣленные интегралы, которыхъ значеніе было бы затруднительно найти другимъ образомъ.

Чтобы представить еще примѣръ, разсматриваемъ прямолинейный прямоугольный треугольникъ, въ которомъ перпендикулярные бока, x, y а гипотенуза r.

Пусть A уголъ противъ x, B уголъ противъ y. Уравненія (10) и (11) даютъ для такого треугольника:

$$\sin.\ \Pi(x)\sin.\ \Pi(y) = \sin.\ \Pi(r)$$

$$\sin.\ \Pi(x)\cos.\ B = \sin.\ A$$

$$\cos.\ \Pi(r)\cos.\ A = \cos.\ \Pi(x)$$

$$\cos.\ \Pi(r)\cos.\ B = \cos.\ \Pi(y).$$

Изъ этихъ уравненій выведемъ:

$$\cos.\ \Pi(r) = \frac{\cos.\ \Pi(x)}{\cos.\ A}$$

$$\sin.\ \Pi(r) = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos.\ \Pi(x)}{\cos.\ A}\right)^2}$$

$$\sin.\ \Pi(y) = \frac{1}{\sin.\ \Pi(x)}\sqrt{1 - \left(\frac{\cos.\ \Pi(x)}{\cos.\ A}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin.^2\Pi(x)} - \frac{\operatorname{cotg.}^2\Pi(x)}{\cos.^2 A}}$$

$$\operatorname{cotg.}\ \Pi(y) = \frac{\sin.\ A\cos.\ \Pi(x)}{\sqrt{\sin.^2 A - \cos.^2\Pi(x)}}.$$

Вставляя въ это послѣднее уравненіе $\Pi(x) = \frac{\pi}{2} - \omega$ находимъ:

$$\operatorname{cotg.}\ \Pi(y) = \frac{\sin.\ A\sin.\ \omega}{\sqrt{\sin.^2 A - \sin.^2\omega}}.$$

Между тѣмъ мы видѣли что дифференціалъ площади есть $d\,x\operatorname{cotg.}\Pi(y)$; а это даетъ въ настоящемъ случаѣ:

$$d\,x\operatorname{cotg.}\Pi(y) = \sin.\ A\frac{d\,\omega\,\text{tang.}\ \omega}{\sqrt{\sin.^2 A - \sin.^2\omega}},$$

откуда заключаемъ, интегрируя отъ $\omega = o$, что соотвѣтствуетъ $x = o$ и замѣчая, что площадь выраженная интеграломъ выражается также чрезъ $\frac{\pi}{2} - A - B$, что

$$\frac{\pi}{2} - A - B = \sin.\ A\int_o^{\omega}\frac{\text{tang.}\ \omega\,d\,\omega}{\sqrt{\sin.^2 A - \sin.^2\omega}}.$$

гдѣ A уголъ постоянный, а B опредѣляется уравненіемъ

$$\cos.\ B = \frac{\sin.\ A}{\cos.\ \omega}.$$

Если $\omega = \frac{\pi}{2} - A$ то гипотенуза дѣлается параллельною боку y и уголъ $B = o$. Итакъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{\pi}{2} - A = \sin. A \int_{o}^{\frac{\pi}{2}-A} \frac{\text{tang.}\, \omega \, d\, \omega}{\sqrt{\sin.^2 A - \sin.^2 \omega}}.$$

Можно опредѣлить значеніе интеграла въ болѣе общемъ видѣ, разсматривая площадь прямолинейнаго треугольника, котораго бока a, b, c съ противоположными углами A, B, C и раздѣляя эту площадь на элементы прямыми параллельными между собою. Беремъ вершину угла C за начало координатъ и сторону a за ось x-овъ. Пусть $B = \Pi(\beta)$ гдѣ β положительная если $B < \frac{\pi}{2}$ и отрицательная если $B > \frac{\pi}{2}$. Ведемъ чрезъ конецъ абсциссы x прямую u параллельную боку c, и продолжаемъ до пересѣченія съ бокомъ b. Уголъ, которой эта параллельная дѣлаетъ съ абсциссою x будетъ $\Pi(\beta - a + x)$, откуда слѣдуетъ, что уголъ, который дѣлаетъ эта параллельная съ продолженіемъ x будетъ $\Pi(a - \beta - x)$. Если возмемъ за элементъ площади треугольника часть этой площади, которая заключена между двумя параллельными u безконечно близкими, то получимъ, въ слѣдствіе того, что было доказано выше, слѣдующее выраженіе для этого элемента

$$d\, S = - d\, \Pi(a - \beta - x)\{1 - e^{-u}\}.$$

Разсматриваемъ y, x, u какъ перемѣнные, а a и β какъ постоянные.

Уравненія (19) будучи примѣнены къ треугольнику, котораго бока x, u, а уголъ между этими двумя боками $\Pi(\beta - a + x)$ даютъ:

$$\text{cotg.}\, C \sin. \Pi(\beta - a + x) \sin. \Pi(x) + \cos. \Pi(\beta - a + x) = \frac{\cos. \Pi(x)}{\cos. \Pi(u)}$$

изъ этаго уравненія выводимъ, положивъ для краткости $\Pi(\beta - a + x) = \omega$

$$\cos. \Pi(u) = \frac{\cos. \Pi(x)}{\text{cotg.}\, C \sin. \omega \sin. \Pi(x) + \cos. \omega}$$

$$e^{2u} = \frac{\text{cotg.}\, C \sin. \omega \sin. \Pi(x) + \cos. \omega + \cos. \Pi(x)}{\text{cotg.}\, C \sin. \omega \sin. \Pi(x) + \cos. \omega - \cos. \Pi(x)}$$

но

$$\sin. \Pi(x) = \sin. \Pi\{(\beta - a) - (\beta - a + x)\} = \frac{\sin. \Pi(\beta - a) \sin. \omega}{1 - \cos. \Pi(\beta - a) \cos. \omega}.$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$\cos.\, \Pi(x) = \frac{\cos.\, \Pi(\beta - a) - \cos.\, \omega}{1 - \cos.\, \Pi(\beta - a) \cos.\, \omega}.$$

Вставляя эти значенія $\sin.\, \Pi(x)$, $\cos.\, \Pi(x)$ въ выраженіе для e^{2u} получимъ:

$$e^{2u} = \frac{\text{cotg.}\, C \sin.^2\omega \sin.\, \Pi(\beta - a) + \cos\omega \{1 - \cos.\, \Pi(\beta - a) \cos.\, \omega\} + \cos.\, \Pi(\beta - a) - \cos.\, \omega}{\text{cotg.}\, C \sin.^2\omega \sin.\, \Pi(\beta - a) + \cos.\, \omega \{1 - \cos.\, \Pi(\beta - a \cos.\, \omega\} - \cos.\, \Pi(\beta - a) + \cos.\, \omega}$$

$$= \frac{\text{cotg.}\, C \sin.^2\omega \sin.\, \Pi(\beta - a) + \cos\, \Pi(\beta - a) \sin.^2\omega}{\text{cotg.}\, C \sin.^2\omega \sin\, \Pi(\beta - a) + 2\cos\omega - \{1 + \cos.^2\omega\} \cos.\, \Pi(\beta - a)};$$

далѣе находимъ:

$$d\, \Pi(a - \beta - x) = - d\, \Pi(\beta - a + x) = - d\, \omega$$

послѣ чего сравненіе двухъ выраженій для площади треугольника даетъ уравненіе:

$$\pi - A - B - C = - \omega$$

$$+ \int_{x=0}^{x=a} d\omega \sqrt{\frac{\text{cotg.}\, C \sin.^2\omega \sin.\, \Pi(\beta - a) + 2\cos.\omega - (1 + \cos.^2\omega) \cos.\, \Pi(\beta - a)}{\text{cotg.}\, C \sin.^3\omega \sin.\, \Pi(\beta - a) + \cos.\, \Pi(\beta - a) \sin.^2\omega}}.$$

Если положимъ еще $\Pi(\beta - a) = \alpha$ то это уравненіе принимаетъ видъ:

$$[\pi - A - B - C]\, [\text{cotg.}\, C \sin.\, \alpha + \cos.\, \alpha]$$

$$= \int_{\omega=\alpha}^{\omega=\Pi(\beta)} \frac{d\omega}{\sin.\, \omega} \sqrt{\text{cotg.}\, C \sin.^2\omega \sin.\, \alpha + 2 \cos.\, \omega - (1 + \cos^2\omega) \cos.\, \alpha}$$

гдѣ углы A, B и линія β должны быть вычислены посредствомъ уравненій:

$$\alpha = \Pi(\beta - a),\ B = \Pi(\beta)$$

$$\cos.\, A + \cos.\, B \cos.\, C = \frac{\sin.\, B \sin.\, C}{\sin.\, \Pi(a)}$$

послѣднее изъ этихъ уравненій есть послѣднее изъ уравненій (19) примѣненное къ треугольнику, который разсматривали.

Чтобы опредѣлять положеніе точки въ плоскости, можно употреблять въ пангеометріи не только прямыя и полярные координаты, но такъ же и дуги предѣльнаго круга. Даже эта послѣдняя система представляетъ свои выгоды въ отношеніи къ простотѣ выраженій. Опредѣляемъ положеніе точки въ плоскости помощію перпендикулярныхъ координатъ x и y такъ, что y былъ бы перпенди-

кулъ изъ точки, положеніе которой хотятъ опредѣлять, на ось x-овъ, а x часть оси x-овъ отъ конца перпендикула до начала координатъ. Пусть η длина дуги предѣльнаго круга отъ данной точки до оси x-овъ, которая вмѣстѣ служитъ осью предѣльному кругу; называемъ ξ разстояніе вершины предѣльнаго круга на оси x-овъ до начала координатъ. Мы видѣли, что въ этомъ случаѣ

$$\eta = \text{cotg.}\, \Pi(y)$$

потомъ уравненіе предѣльнаго круга даетъ

$$e^{-(x-\xi)} = \sin.\, \Pi(y)$$

помощью этихъ двухъ уравненій можно выразить ξ, η въ зависимости отъ x, y или на оборотъ x, y въ зависимости отъ ξ, η. Это дозволяетъ переходить отъ уравненія кривой въ координатахъ x, y къ уравненію тойже кривой въ ξ, η или наоборотъ. Дифференціалъ площади выражается въ ξ, η уравненіемъ:

$$d^2 S = d\xi\, d\eta$$

гдѣ S площадь.

Если мы разсматриваемъ S какъ функцію x, y, то имѣемъ:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \frac{dS}{d\xi}$$

потомъ дифференцируя въ отношеніи къ y:

$$\frac{d^2 S}{dx\, dy} = \frac{1}{\sin.\, \Pi(y)} \frac{d^2 S}{d\xi\, d\eta} = \frac{1}{\sin.\, \Pi(y)}$$

согласно съ тѣмъ, что было найдено выше.

Опускаемъ изъ точки въ пространствѣ перпендикулъ z на плоскость координатъ x, y.

Ведемъ чрезъ этотъ перпендикулъ плоскость, которая пересѣкаетъ плоскость xy въ прямой параллельной къ оси x-овъ. Принимаемъ это пересѣченіе на сторонѣ параллельности за ось предѣльнаго круга, который проходитъ чрезъ вершину перпендикула z и пусть ζ длина дуги этаго предѣльнаго круга между вершиною z и осью. Имѣемъ:

$$\zeta = \text{cotg.}\, \Pi(z).$$

Часть q параллельной къ оси x-овъ, проведенной чрезъ конецъ перпендикула z, между вершиною ξ и концомъ перпендикула z будетъ дано уравненіемъ

$$e^{-q} = \sin.\, \Pi(z).$$

Дуга предѣльнаго круга, проведенная чрезъ конецъ z такъ, что ось положительныхъ x-овъ служитъ вмѣстѣ осью предѣльному кругу, и которая заключается между концомъ z и этой осью, будетъ повеличинѣ равна cotg. $\Pi(y)$, а длина дуги η предѣльнаго круга, проведенная чрезъ пересѣченіе ζ съ плоскостью x, y и для которой ось лежитъ на сторонѣ x положительныхъ, между этой точкой и осью, будетъ, какъ это было доказано, дана уравненіемъ:

$$\eta = \frac{\text{cotg. } \Pi(y)}{\sin. \Pi(z)}.$$

Если мы къ тому называемъ ξ часть оси x-овъ между началомъ координатъ и дуги η, то уравненіе предѣльнаго круга даетъ:

$$e^{-x+\xi+q} = \sin. \Pi(y).$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ, перемѣняя напередъ только z и въ зависимости отъ него ζ:

$$d\zeta = \frac{dz}{\sin. \Pi(z)}.$$

Перемѣняя только y и η получимъ:

$$d\eta = \frac{dy}{\sin. \Pi(y) \sin. \Pi(z)}.$$

Наконецъ перемѣняя только ξ и x получимъ:

$$d\xi = dx.$$

Чтобы дополнить новую теорію подъ названіемъ пангеометріи, которая основана на началахъ болѣе общихъ, нежели начала обыкновенной геометріи, остается только дать выраженіе для дифференціала поверхностей и объемовъ помощью координатъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ пространствѣ.

Разсматриваемъ съ этою цѣлью снова четыреугольникъ, въ которомъ два бока a, y перпендикулярны къ третьему x и въ которомъ четвертый бокъ c перпендикуляренъ къ y дѣлая съ a уголъ φ. Мы нашли (уравневіе 25):

$$\cos. \Pi(y) = \cos. \Pi(a) \sin. \Pi(x).$$

Потомъ находимъ помощью уравненій (10) (11), называя r діагональ между вершиною угла φ и вершиною прямаго угла противоположнаго и A уголъ между x и r:

$$\cos. \Pi(r) \cos. A = \cos. \Pi(x)$$

$$\cos. A \text{ tang. } \Pi(c) = \text{tang. } \Pi(r).$$

Изъ этихъ двухъ уравненій выводимъ:

$$\cos.\ \Pi(x)\ \text{tang.}\ \Pi(c) = \sin.\ \Pi(r\ ;$$

но

$$\sin.\ \Pi(r) = \sin.\ \Pi(a)\ \sin.\ \Pi(x)$$

слѣдовательно:

$$\text{tang.}\ \Pi(c) = \sin.\ \Pi(a)\ \text{tang.}\ \Pi(x).$$

Если c, x такъ малы, что можно пренебрегать ихъ высшими степенями въ сравненіи съ нисшими и допустить слѣдующія приближенныя значенія для tang. $\Pi(c)$, tang. $\Pi(x)$:

$$\text{tang.}\ \Pi(c) = \tfrac{1}{c};\ \text{tang.}\ \Pi(x) = \tfrac{1}{x}$$

то находимъ

$$c = \frac{x}{\sin.\ \Pi(x)}\ . \qquad (27)$$

Прямая c, которая соединяетъ вершины a, y не будетъ перпендикулярна къ y если $a = y$ въ четвероугольникѣ; въ такомъ случаѣ прямая p, изъ средины x проведенная къ срединѣ c, перпендикулярна къ x и c. Итакъ въ уравненіи (27) можемъ c замѣнить $\frac{c}{2}$, а x замѣнить $\frac{x}{2}$ отъ чего уравненіе не измѣняется. Такимъ образомъ это уравненіе доказывается даже для случая $a = y$, къ которому выше данное доказательство непосредственно не примѣняется. Величина кривой поверхности измѣряется суммою площадей треугольниковъ, которые смыкаются въ одну сплошную сѣть и вершины которыхъ лежатъ на поверхности; эта мѣра будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ измѣряемыя треугольники менѣе.

Граница, къ которой эта сумма приближается до безконечности, когда измѣряемые треугольники уменьшаются до безконечности и съ которою она можетъ разниться менѣе, нежели всякая данная величина, называется математическая величина поверхности. Опредѣляемъ напередъ площадь прямолинейнаго прямоугольнаго треугольника помощіи 3 хъ его боковъ a, b, c съ противоположными углами $\Pi(a), \Pi(a)\ \frac{\pi}{2}$. Мы видѣли, что въ такомъ треугольникѣ можно замѣнить линіи

$$a, b, c, \alpha, \beta$$

линіями:

$$a, \alpha', \beta, b', c$$

соотвѣтственно.

Кромѣ того мы нашли:

$$2\ \Pi(b) = \Pi(c + \beta) + \Pi(c - \beta).$$

Вставляя α' вмѣсто b, β вмѣсто c, и c вмѣсто β получимъ:

$$\pi - 2\ \Pi(\alpha) = \Pi(\beta + c) + \Pi(\beta - c)$$

или

$$2\ \Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta).$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$2\,\Pi(\beta) = \Pi(c-\alpha) - \Pi(c+\alpha).$$

Перемѣняя въ этомъ уравненіи буквы, какъ это было сказано, получимъ:

$$2\,\Pi(c) = \Pi(\beta - b') - \Pi(\beta + b').$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$2\,\Pi(c) = \Pi(\alpha - a') - \Pi(\alpha + a')$$

откуда съ перемѣною буквъ, какъ было выше указано, выводимъ:

$$2\,\Pi(\beta) = \Pi(b' - a') - \Pi(b' + a').$$

Такимъ же образомъ получимъ:

$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(a' - b') - \Pi(a' + b').$$

Сложеніе двухъ послѣднихъ уравненій даетъ:

$$2\,\Pi(\alpha) + 2\,\Pi(\beta) = \pi - 2\,\Pi(a' + b').$$

Послѣ чего площадь треугольника $\triangle$ дана выраженіемъ:

$$\triangle = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta) = \Pi(a' + b')$$

и потомъ:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\triangle = e^{-a'}.\,e^{-b'} = \text{tang.}\left\{\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(a)\right\}\text{tang.}\left\{\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(b)\right\};$$

откуда наконецъ выводимъ:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\triangle = \frac{e^{a}-1}{e^{a}+1}\cdot\frac{e^{b}-1}{e^{b}+1}.$$

Когда a, b весьма малы такъ, что можно пренебрѣгать высшими степенями отъ $a.\,b$, $\triangle$ то эта формула даетъ: $\triangle = \frac{1}{2}\,a\,b$, какъ въ обыкновенной геометріи. Въ прямолинейномъ прямоугольномъ треугольникѣ можемъ всегда выбрать одинъ уголъ C такъ, чтобы изъ вершины его перпендикулъ къ противоположному боку лежатъ внутри треугольника. Этотъ перпендикулъ раздѣлитъ бокъ c треугольника на двѣ части: одна x, прилѣжащая къ углу A, другая $c - x$, прилѣжащая къ углу B. Площадь S этого треугольника будетъ равна суммѣ площадей двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, произведенныхъ этимъ перпендикуломъ h и бу-

деть дана уравненіемъ:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}S = \frac{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\dfrac{e^h-1}{e^h+1} + \dfrac{e^{c-x}-1}{e^{c-x}+1}\cdot\dfrac{e^h-1}{e^h+1}}{1-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\dfrac{e^{c-x}-1}{e^{c-x}+1}\cdot\left\{\dfrac{e^h-1}{e^h+1}\right\}^2}.$$

Уравненіе, которому можно дать видъ:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}S = \frac{(e^{2h}-1)(e^c-1)}{(e^c+1)(e^h+1)^2+2e^h(e^x-1)(e^{c-x}-1)}.$$

Это выраженіе даетъ, если пренебрѣгаемъ высшими степенями S, h, c передъ нисшими:

$$S = \tfrac{1}{2}ch$$

какъ въ обыкновенной геометріи.

Мы видѣли, что площадь треугольника выражается помощью трехъ угловъ A, B, C треугольника слѣдующимъ образомъ:

$$S = \pi - A - B - C.$$

Беремъ значеніе A въ зависимости отъ a, b, c изъ втораго уравненія (19); такъ получимъ:

$$\cos. A = \frac{1 - \dfrac{\sin. \Pi(b)\sin. \Pi(c)}{\sin. \Pi(a)}}{\cos. \Pi(b)\cos. \Pi(c)};$$

откуда слѣдуетъ

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{1+\cos. \Pi(b)\cos. \Pi(c) - \dfrac{\sin. \Pi(b)\sin. \Pi(c)}{\sin. \Pi(a)}}{\cos. \Pi(b)\cos. \Pi(c)}.$$

Если вставимъ сюда:

$$\frac{\sin. \Pi(b)\sin. \Pi(c)}{\sin. \Pi(b+c)}$$

вмѣсто

$$1 + \cos. \Pi(b)\cos. \Pi(c)$$

то это выраженіе приметъ видъ:

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = \text{tang.}\,\Pi(b)\,\text{tang.}\,\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b+c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(a)}\right\}.$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$-2\sin.^2\tfrac{1}{2}A = \text{tang.}\,\Pi(b)\,\text{tang.}\,\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b-c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(a)}\right\}.$$

Изъ этихъ двухъ выраженій выводимъ:

$$\sin.^2 A = \text{tang.}^2 \Pi(b)\,\text{tang.}^2 \Pi(c)\left\{-\frac{1-\cos.^2 \Pi(b)\cos.^2 \Pi(c)}{\sin.^2 \Pi(b)\sin.^2 \Pi(c)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sin.\Pi(a)\sin.\Pi(b)\sin.\Pi(c)}-\frac{1}{\sin.^2 \Pi(a)}\right\}$$

или

$$\sin.^2 A = -\text{tang.}^2 \Pi(b)\,\text{tang.}^2 \Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin.^2 \Pi(a)}+\frac{1}{\sin.^2 \Pi(b)}+\frac{1}{\sin.^2 \Pi(c)}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sin.\Pi(a)\sin.\Pi(b)\sin.\Pi(c)}-1\right\}.$$

Полагая для сокращенія

$$P=\sqrt{\frac{-1}{\sin.^2 \Pi(a)}-\frac{1}{\sin.^2 \Pi(b)}-\frac{1}{\sin.^2 \Pi(c)}+\frac{2}{\sin.\Pi(a)\sin.\Pi(b)\sin.\Pi(c)}+1}$$

получимъ:

$$\sin. A = \text{tang.}\,\Pi(b)\,\text{tang.}\,\Pi(c)\,P. \qquad (28)$$

Можно такъ же дать P слѣдующій видъ симметричный въ отношеніи къ a,b,c.

$$P^2 = 2\left\{1+\frac{1}{\sin.\Pi(a)}\right\}\left\{1+\frac{1}{\sin.\Pi(b)}\right\}\left\{1+\frac{1}{\sin.\Pi(c)}\right\}$$

$$-\left\{1+\frac{1}{\sin.\Pi(a)}+\frac{1}{\sin.\Pi(b)}+\frac{1}{\sin.\Pi(c)}\right\}^2.$$

Идя отъ уравненія (28) и разсматривая здѣсь P какъ величину неопредѣленную, можно доказать слѣдующимъ образомъ, что P должно быть симметричная функція отъ a, b, c. Умножая уравненіе (28) на tang. $\Pi(a)$ поставляемъ сюда sin. B tang. $\Pi(b)$ вмѣсто его значенія sin. A tang. $\Pi(a)$ (уравненіе 13) и раздѣлимъ потомъ на tang. $\Pi(b)$, выходитъ:

$$\sin. B = \text{tang.}\,\Pi(a)\,\text{tang.}\,\Pi(c)\,P.$$

Умножаемъ это послѣднее уравненіе на tang. $\Pi(b)$ и вставимъ сюда sin. C tang. $\Pi(c)$ вмѣсто его значенія sin. B tang. $\Pi(b)$ (уравненіе 13) и раздѣлимъ потомъ на tang. $\Pi(c)$ получимъ:

$$\sin. C = \text{tang.}\,\Pi(a)\,\text{tang.}\,\Pi(b)\,P.$$

откуда видно, что функція P симметрична въ отношеніи къ a, b, c.

Мы уже нашли:

$$\cos. A = \frac{1 - \frac{\sin. \Pi(b) \sin. \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}}{\cos. \Pi(b) \cos. \Pi(c)}$$

или все равно:

$$\cos. A = \text{tang. } \Pi(b) \text{ tang } \Pi(c) \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(b) \sin. \Pi(c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(a)} \right\};$$

такимъ же образомъ находимъ:

$$\cos B = \text{tang. } \Pi(c) \text{ tang. } \Pi(a) \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(a) \sin. \Pi(c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(b)} \right\}$$

$$\cos. C = \text{tang. } \Pi(a) \text{ tang. } \Pi(b) \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(a) \sin. \Pi(b)} - \frac{1}{\sin. \Pi(c)} \right\}.$$

Изъ этихъ выраженій для sin. A, cos. A, sin. B, cos. B, выводимъ:

$$\sin. (A + B) = \sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B$$

$$= \text{tang. } \Pi(b) \text{ tang.}^2 \Pi(c) \, P \text{tang. } \Pi(a) \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(c) \sin. \Pi(a)} - \frac{1}{\sin. \Pi(b)} \right\}$$

$$+ \text{tang.}^2 \Pi(c) \text{ tang. } \Pi(a) \, P \text{ tang. } \Pi(b) \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(b) \sin. \Pi(c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(a)} \right\}$$

$$= \text{tang. } \Pi(a) \text{ tang. } \Pi(b) \text{ tang.}^2 \Pi(c) \, P \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(a)} + \frac{1}{\sin. \Pi(b)} \right\} \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(c)} - 1 \right\}$$

и наконецъ:

$$\sin. (A + B) = \frac{\text{tang. } \Pi(a) \text{ tang. } \Pi(b) \, P}{\left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(c)} + 1 \right\}} \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(a)} + \frac{1}{\sin. \Pi(b)} \right\}.$$

Послѣднее изъ уравненіи (19) даетъ:

$$\cos. A + \cos. (B + C) = \sin. B \sin. C \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(a)} - 1 \right\};$$

вставляемъ сюда вмѣсто sin. B, sin. C ихъ значенія изъ уравненія (28) получимъ:

$$\cos.(B+C) = -\cos.A + \text{tang.}\Pi(c)\text{tang.}^2\Pi(a)\text{tang.}\Pi(b)P^2 \left\{ \frac{1}{\sin. \Pi(a)} - 1 \right\}$$

или, что все равно

$$\cos. (B + C) = -\cos. A + \frac{\text{tang. } \Pi(b) \text{ tang. } \Pi(c) \, P^2}{\frac{1}{\sin. \Pi(a)} + 1}.$$

Помощью предъидущихъ уравненій находимъ:

$$\cos(A+B+C) = \cos. A \cos.(B+C) - \sin A \sin(B+C)$$

$$= -\cos^2 A + \frac{\tang^2 \Pi(b) \tang^2 \Pi(c) P^2}{\left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1\right\}} \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b) \sin. \Pi(c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(a)}\right\}$$

$$- \frac{\tang^2 \Pi(b) \tang^2 \Pi(a) P^2}{\left\{\frac{1}{\sin. \Pi(c)} + 1\right\}} \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b)} + \frac{1}{\sin. \Pi(c)}\right\}$$

$$2 \cos.^2 \frac{(A+B+C)}{2} = \sin.^2 A +$$

$$\frac{\tang.^2 \Pi(b) \tang.^2 \Pi(c) P^2}{\left\{\frac{1}{\sin. \Pi(a)} + 1\right\}} \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b) \sin. \Pi(c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(a)}\right\}$$

$$- \frac{\tang.^2 \Pi(b, \tang.^2 \Pi[c) P^2}{\left\{\frac{1}{\sin. \Pi(a)} + 1\right\}} \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b)} + \frac{1}{\sin. \Pi(c)}\right\}$$

$$= \tang.^2 \Pi(b) \tang.^2 \Pi(c) P^2 +$$

$$\frac{\tang.^2 \Pi(b) \tang.^2 \Pi(c) P^2}{\left\{\frac{1}{\sin. \Pi(a)} + 1\right\}} \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b) \sin. \Pi(c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(a)} - \frac{1}{\sin. \Pi(b)} - \frac{1}{\sin. \Pi(c)}\right\}$$

$$= \frac{\tang.^2 \Pi(b) \tang.^2 \Pi(c) P^2}{\left\{\frac{1}{\sin. \Pi(a)} + 1\right\}} \left\{1 + \frac{1}{\sin. \Pi(b) \sin. \Pi(c)} - \frac{1}{\sin. \Pi(b)} - \frac{1}{\sin. \Pi(c)}\right\}.$$

$$= \tang.^2 \Pi(a) \tang.^2 \Pi(b) \tang.^2 \Pi(c) P^2 \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(a)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(b)} - 1\right\} \left\{\frac{1}{\sin. \Pi(c)} - 1\right\};$$

но было уже доказано, что площадь треугольника $\Delta = \pi - A - B - C$, слѣдовательно

$$\sin. \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tang. \Pi(a) \tang. \Pi(b) \tang. \Pi(c) P$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{1}{\sin. \Pi(a)} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin. \Pi(b)} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin.^2 \Pi(c)} - 1\right)};$$

если a, b, c такъ малы, что можемъ довольствоваться приближеніемъ

$$\frac{1}{\sin. \Pi(a)} = 1 + \tfrac{1}{2} a^2, \quad \frac{1}{\sin. \Pi(b)} = 1 + \tfrac{1}{2} b^2, \quad \frac{1}{\sin. \Pi(c)} = 1 + \tfrac{1}{2} c^2.$$

$$\tang. \Pi(a) = \tfrac{1}{a}(1 - \tfrac{1}{6} a^2), \quad \tang. \Pi(b) = \tfrac{1}{b}(1 - \tfrac{1}{6} b^2), \quad \tang. \Pi(c) = \tfrac{1}{c}(1 - \tfrac{1}{6} c^2)$$

получимъ:

$$\sin.\frac{\Delta}{2}=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

или отбрасывая степени Δ выше первой

$$\Delta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b+c^2}$$

Опредѣляемъ положеніе точки въ пространствѣ тремя прямоугольными координатами, ž перпендикулярно къ плоскости xy, y перпендикулъ, опущенный отъ конца z къ оси x, а x часть оси x между началомъ координатъ и концомъ y.

На кривой поверхности, элементъ которой требуется опредѣлить, беремъ. три точки и пусть координаты первой x, y, z, координаты второй $x+dx, y, z+\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, а координаты третій точки $x, y+dy, z+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$. Называемъ t разстояніе между вершинами двухъ перпендикуловъ къ оси x-овъ, которыя оба равны y, и между которыми заключается часть dx оси x, предполагая dx, dy безконечно малыми, получимъ, основываясь на уравненіе (27)

$$t=\frac{dx}{\sin.\Pi(y)}.$$

Разстояніе двухъ первыхъ точекъ на кривой поверхности составляетъ треугольникъ съ прямыми, которыхъ длина

$$\frac{dx}{\sin.\Pi(y)\sin.\Pi(z)},\left(\frac{dz}{dx}\right)dx.$$

Можемъ почитать этотъ треугольникъ за прямоугольникъ при малости его боковъ, гдѣ гипотенуза будетъ разстояніе между двумя первыми точками на поверхности. Итакъ квадратъ этаго разстоянія будетъ

$$dx^2\left\{\frac{1}{\sin.^2\Pi(y)\sin.^2\Pi(z)}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}$$

Такимъ же образомъ находимъ квадратъ разстоянія первой точки отъ третей

$$dy^2\left\{\frac{1}{\sin.^2\Pi(z)}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\};$$

и квадратъ разстоянія второй точки отъ третей

$$\frac{dx^2}{\sin.^2\Pi(y)\sin.^2\Pi(z)}+\frac{dy^2}{\sin.^2\Pi(z)}+\left\{\left(\frac{dz}{dy}\right)dy-\left(\frac{dz}{dx}\right)dx\right\}^2.$$

Площадь треугольника, которому боками служатъ разстоянія отъ первой точки на кривой поверхности до второй, отъ второй до третей и отъ третей до первой, гдѣ и сумма угловъ равняется π безъ чувствительной погрѣшности по причинѣ малости боковъ, будетъ равна, въ слѣдствіе доказаннаго выше и значеній, найденныхъ для квадратовъ его сторонъ

$$\frac{d^2 S}{dx\,dy} = \frac{1}{2 \sin. \Pi(z)} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin.^2 \Pi(y)}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin.^2 \Pi(y) \sin.^2 \Pi(z)}};$$

таково выраженіе для элемента поверхности, уравненіе которой

$$z = f(x, y).$$

Примѣняемъ это выраженіе къ сферѣ, котораго полупоперечникъ r; если начало координатъ въ центрѣ сферы, то уравненіе сферы даетъ:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cos. \Pi(x)}{\cos. \Pi(z)}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos. \Pi(y)}{\cos. \Pi(z)}$$

потомъ

$$\frac{\cos. \Pi(r)}{\sin.^2 \Pi(r)} \cdot \frac{\sin. \Pi.(y) \sin.^2 \Pi.(x)}{\sqrt{\sin.^2 \Pi(x) \sin.^2 \Pi(y) - \sin.^2 \Pi(r)}} = \frac{d^2 S}{d\Pi(x)\, d\Pi(y)}.$$

Умножаемъ на $d\Pi(y)$ и интегрируемъ отъ $\sin. \Pi(y) = \frac{\sin. \Pi(r)}{\sin. \Pi(x)}$, до $\Pi(y) = \frac{\pi}{2}$ получимъ:

$$\frac{dS}{d\Pi(x)} = \frac{2\pi \sin. \Pi(x) \cos. \Pi(r)}{\sin.^2 \Pi(r)}.$$

Умножаемъ еще на $d\Pi(x)$ и интегрируемъ отъ $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ получимъ;

$$S = \frac{2\pi \cos. \Pi(r) \cos. \Pi(x)}{\sin.^3 \Pi(r)}.$$

Это представляетъ поверхность отрѣзка сферы, заключеннаго между двухъ плоскостей перпендикулярныхъ къ одному полупоперечнику, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ центръ сферы, а другая на разстояніе x отъ центра сферы. Чтобы найти поверхность всей сферы, надо въ это послѣднее выраженіе поставить $x = r$ и значеніе всего выраженія удвоить, такимъ образомъ находимъ величи-

ну поверхности всей сферы $4\pi \operatorname{cotg.}^2 \Pi(r)$ или $\pi (e^r - e^{-r})^2$; если r такъ мало, что можно пренебречь высшія степени онъ r, то это выраженіе дѣлается $4\pi r^2$, какъ въ обыкновенной геометріи.

Полагаемъ

$$\cos. \psi = \operatorname{tang.} \Pi(r) \operatorname{cotg.} \Pi(y)$$

$$\cos. \Pi(x) = \cos. \Pi(r) \sin. \psi \sin. \varphi$$

и вводимъ новыя перемѣнныя ψ, φ вмѣсто x, y въ выраженіе для элемента поверхности шара съ полупоперечникомъ r, о которомъ идетъ дѣло; находимъ:

$$\frac{d^2 S.}{d\varphi\, d\psi} = - \frac{\cos. \Pi(r) \sin. \psi \sqrt{1 - \cos.^2 \Pi(r) \sin.^2 \psi \sin.^2 \varphi}}{\sin. \Pi(r) \qquad 1 - \cos.^2 \Pi(r) \sin.^2 \varphi}.$$

Умножаетъ это уравиеніе на $8\, d\psi\, d\varphi$ и интегрируемъ отъ $\psi = o$ до $\psi = \frac{\pi}{2}$ и отъ $\varphi = o$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, такъ находимъ поверхность цѣлой сферы. Уравнивая выраженіе, которое найдемъ такимъ образомъ для поверхности цѣлой сферы съ выраженіемъ, найденнымъ выше для тойже поверхности заключаемъ, что

$$\frac{\pi}{\sin. \Pi(r)} = \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\sin. \psi \sqrt{1 - \cos.^2 \Pi(r) \sin.^2 \psi \sin.^2 \varphi}}{1 - \cos.^2 \Pi(r) \sin.^2 \psi} \qquad (30)$$

Если означаемъ $E(\alpha)$ эллиптическій интегралъ

$$E(\alpha) = \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \alpha^2 \sin.^2 \varphi}$$

гдѣ α постоянное подъ знакомъ интеграла, то находимъ помощію интеграла, котораго значеніе представляетъ сферу:

$$\frac{\pi \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \int_o^{\alpha} \frac{dx\, E(x)}{(1 - x^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}};$$

ставя въ интегралъ (30) $\frac{\pi}{2} - R$ вмѣсто $\Pi(r)$, получимъ:

$$\frac{\pi}{2} R = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin. \psi \sin R}{\sqrt{1 - \operatorname{siu.}^2 \psi \sin.^2 \varphi \sin.^2 R}}$$

Произведя интегрированіе въ отношеніи ψ въ указанныхъ границахъ находимъ:

$$\pi R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} \log.\left(\frac{1+\sin.\varphi \sin.R}{1-\sin.\varphi \sin.R}\right).$$

что принимаетъ видъ, когда поставимъ $\Pi(x)$ вмѣсто φ

$$\pi R = \int_0^{\infty} d x \log.\left\{\frac{e^{2x}+1+2e^{x}\sin.R}{e^{2x}+1-2e^{x}\sin.R}\right\};$$

интегрированіе по частямъ приводитъ этомъ интегралъ къ такому,

$$\tfrac{1}{4}\pi \frac{R}{\sin.R} = \int_0^{\infty} \frac{(e^{2x}-1)e^{x}\,x\,d\,x}{e^{4x}+2e^{2x}\cos.2R+1}; \qquad (31)$$

для $R = \frac{\pi}{2}$ это уравненіе даетъ:

$$\tfrac{1}{8}\pi^2 = \int_0^{\infty} \frac{x\,d\,x\,e^{x}}{e^{2x}-1}.$$

Легко доказать справедливость уравленія (31) для $\cos.R > 1$.

Мы въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$\int_0^{\pi} d\,\psi \log,\cotg.\tfrac{1}{2}\psi = o,$$

откуда слѣдуетъ, что для всякаго числа a

$$\int_0^{\pi} d\,\psi \log.(e^{a}\cotg.\tfrac{1}{2}\psi) = a\,\pi.$$

Перемѣняемъ это уравненіе, полагая въ немъ $e^{a}\cotg.\frac{1}{2}\psi = e^{x}$; получимъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,d\,x}{e^{x-a}+e^{-x+a}} = \tfrac{1}{2}\pi\,a;$$

этому уравненію легко можно дать еще такой видъ:

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^{x}-e^{-x})\,x\,d\,x}{e^{2x}+(e^{2}+e^{-2a})+e^{-2x}} = \tfrac{1}{2}\frac{\pi\,a}{e^{a}-e^{-a}},$$

откуда приходимъ снова къ уравненію (30) ставя $a\sqrt{-1}$ вмѣсто a.

Если за координаты принимаемъ дуги предѣльнаго круга, одна ξ проведенная отъ данной точки, въ плоскости пресѣкающей плоскость $x\,y$ въ прямой параллельной къ оси x и которой дугѣ ξ эта параллельная, продолженная на сторонѣ параллельности служитъ осью, другая η въ плоскости x, y проведенная отъ конца ξ до ооси x-овъ, которая вмѣстѣ служитъ осью этой дугѣ, если наконецъ за третью координату принимаемъ ξ, отрѣзокъ оси x отъ начала коорд - нать до конца η, то элементъ объема P долженъ быть $d\xi\ d\eta\ d\xi$. Итакъ

$$d^3\,P = d\,\xi\,d\,\eta\,d\,\zeta$$

Полагаемъ еще $\zeta = \text{cotg.}\,\Pi(z)$ гдѣ z перпендикулъ отъ данной точки на плоскость $x.\,y$: получимъ:

$$\left(\frac{d^3\,P}{d\,\zeta\,d_{\,\eta}\,d\,z}\right) = \frac{1}{\text{sin.}\,\Pi(z)}\ .$$

Изъ уравненія предѣльнаго круга выводимъ

$$e^{-p} = \text{sin.}\,\Pi(z)$$

гдѣ p разстояніе отъ пресѣченія дуги ξ съ плоскостью $x\,y$ до конца перпенди- кула z.

Замѣчая къ тому, что въ слѣдствіе уравненія предѣльнаго круга и выраженія дуги предѣльнаго круга въ зависимости отъ ординаты:

$$\text{cotg.}\,\Pi(y) = \eta\,e^{-p}$$

$$e^{\xi-\varpi} = \text{sin.}\,\Pi(z)\,\text{sin.}\,\Pi(y)$$

находимъ:

$$\frac{d\,\eta}{d\,y} = \frac{1}{\text{sin}\,\Pi(y)\,\text{sin.}\,\Pi(z)};\ d\,x = d\xi$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\left(\frac{d^3\,P}{d\,x\,d\,y\,dz}\right) = \frac{1}{\text{sin.}\,\Pi(y)\,\text{sin.}^2\,\Pi(z)}\ .$$

Умножая это выраженіе на $d\,x$ и интегрируя отъ $x = o$, получимъ:

$$\left(\frac{d^2\,P}{d\,y\,d\,z}\right) = \frac{x}{\text{sin.}\,(y)\,\Pi\,\text{sin.}^2\,\Pi(z)}\ .$$

Умножая тоже выраженіе на $d\,y$ и интегрируя отъ $y = o$, получимъ:

$$\left(\frac{d^2\,P}{d\,x\,d\,z}\right) = \frac{\text{cotg.}\,\Pi(y)}{\text{sin.}^2\,\Pi(z)}\ .$$

Умножая наконецъ на dz и интегрируя отъ $z = o$ получимъ:

$$\left(\frac{d^2 P}{dx\,dy}\right) = \frac{1}{8 \text{ sin. } \Pi(y)}\left\{e^{2z} + e^{-2z} + 4z\right\}.$$

Если предпослѣднее изъ этихъ выраженій умножаемъ на $dx.\ dz$ и потомъ интегрируемъ сначала въ отношеніи къ z отъ $z = o$ до значенія z взятое изъ уравненія sin. $\Pi(r) =$ sin. $\Pi(x)$ sin. $\Pi(z)$ апотомъ въ отношеніи къ x отъ $x = o$ до $x = r$ и если уможаемъ выводимъ на 8, что бы получить объемъ цѣлаго шара, то находимъ объемъ цѣлаго шара $= \frac{1}{2}\pi\left\{e^{2r} - e^{-2r} - 4r\right\}$, что для r очень малаго даетъ $\frac{4}{3}\pi r^3$, какъ въ обыкновенной геометріи.

Чтобы элементъ объема выразить въ полярныхъ координатахъ называемъ r разстояніе отъ начала координатъ до точки въ пространствѣ, прямоугольныя координаты которой x, y, z. Называемъ q прямую, проведенную отъ начала координатъ до конца z. θ уголъ между r и q, ω уголъ между q и оси положительныхъ x-въ. Полагаемъ еще $\Pi(x) = X$, $\Pi(y) = Y$, $\Pi(z) = Z$, $\Pi(r) = R$, $\Pi(q) = Q$. Ведемъ чрезъ данную точку плоскость перпендикулярно къ оси z. Пусть r' прямая, проведенная въ этой плоскости отъ данной точки къ оси z и полагаемъ $\Pi\ r') = R'$.

Описываемъ около начала координатъ какъ центра сферу полупоперечникомъ r. Плоскость $x\,y$ пресѣкаетъ эту сферу въ большомъ кругѣ, окружность котораго, согласно доказанному выше будетъ:

$$2\pi \text{ cotg. } R.$$

Часть этаго круга между двухъ плоскостей, проведенныхъ чрезъ ось z-овъ и наклоненныхъ одна къ другой подъ угломъ ω, должна быть

$$\omega \text{ cotg. } R.$$

Окружность круга отъ пресѣченія тойже сферы съ плоскостью, проходящею чрезъ данную точку и перпендикулярной къ оси z будетъ:

$$2\pi \text{ cotg. } R'.$$

А часть этой окружности между двухъ поскостей, проведенныхъ чрезъ ось z и наклоненныхъ подъ угломъ ω, должна быть:

$$\omega \text{ cotg. } R'$$

Измѣненіе, произведенное въ этой послѣдней дугѣ приращеніемъ угла ω на $d\omega$, должно быть

$$d\omega \text{ cotg. } R'$$

Прямоугольный треугольникъ, гдѣ гипотенуза r, одинъ изъ боковъ прямаго угла r' и уголъ противъ r' равенъ $\frac{\pi}{2} - \theta$ даетъ (уравненіе 31)

$$\text{tang. } R' \text{ cos. } \theta = \text{tang. } R$$

откуда слѣдуетъ, что

$$d\,\omega \text{ cotg. } R' = d\,\omega \text{ cotg. } R \text{ cos. } \theta.$$

Окружность круга отъ пресѣченія тойже сферы плоскостью, проходящею чрезъ ось z равна:

$$2\,\pi \text{ cotg. } R:$$

а дуга этаго круга, которая соотвѣтствуетъ углу θ при, центрѣ будетъ:

$$\theta \text{ cotg. } R:$$

откуда слѣдуетъ что измѣненіе этой дуги, которая соотвѣтствуетъ прйращенію $d\,\theta$ къ углу θ, должна быть:

$$d\,\theta \text{ cotg. } R.$$

Если всѣ приращенія безконечно малы, то элементъ объема выражается какъ въ обыкновенной геометріи произведеніемъ трехъ линій перпендикулярныхъ между собою

$$d\,r,\ d\,\omega \text{ cos. } \theta \text{ cotg. } R,\ d\,\theta \text{ cotg. } R.$$

потому что объемъ этотъ можетъ быть принимаемъ за призму. Итакъ элементъ объема выражается въ полярныхъ координатахъ:

$$d\,r\,d\omega\,d\,\theta \text{ cos. } \theta \text{ cotg}^2\, R = d^3\,P$$

или замѣнял cotg.^{2} R его значеніемъ въ r.

$$d^3\,P = \tfrac{1}{4}\,d\,r\,d\,\omega\,d\,\theta \text{ cos. } \theta\,(e^r - e^{-r})^2,$$

Интегрируя съ начала въ отношеніи къ r отъ $r = o$ получимъ:

$$d^2\,P = \tfrac{1}{8}\,d\,\omega\,d\,\theta\,(e^{2r} - e^{-2r} - 4\,r).$$

Для сферы, которой центръ въ началѣ координатъ, r независитъ отъ θ и ω.

Интегрируя въ отношеніи къ ω отъ $\omega = o$ до $\pi = 2\,\pi$ и въ отношеніи къ θ отъ $\theta = o$ до $\theta = \frac{\pi}{2}$ и умножая выводъ на 2 получимъ объемъ цѣлой сферы: $\frac{1}{2}\,\pi\,(e^{2r} - e^{-2r} - 4\,r)$ какъ выше.

Разсматриваемъ теперь часть S поверхности предѣльной сферы, ограниченной замкнутой линіей, ведемъ изъ различныхъ точекъ этой програничной линіи прямыя параллельныя къ оси сферы, такія прямыя образуютъ иоверхность, которую мы назовемъ, по сходству, коническою, и которая простирается безконечно въ обѣ стороны, но на которой мы будемъ разсматривать только часть отъ пре-

дѣльной сферы безконечно простирающуюся въ сторону параллельности осей предѣльной сферы. Пусть S' будетъ часть другой предѣльной сферы съ осями параллельными къ прежнимъ и обращеннымъ въ туже сторону, часть, которая находится внутри конической поверхности. S, S' и часть конической поверхности между обѣими предѣльными сферами заключаютъ объемъ конечный во всѣ стороны, который мы предлагаемъ опредѣлить. Называемъ c часть оси между двухъ предѣльныхъ сферъ. Повторяемъ прямую c нѣсколько разъ на одной изъ осей предѣльныхъ сферъ, проходящихъ чрезъ одно изъ точекъ кривой, ограничивающей S, начиная съ той точки гдѣ эта ось пересѣкаетъ S'. Ведемъ чрезъ точки дѣленія предѣльныя сферы съ осями параллельными къ осямъ двухъ первыхъ и обращенными въ туже сторону. Пусть S'' S''' и т. д. части этихъ предѣльныхъ сферъ внутри конической поверхности. Изъ того, что было доказано о дугахъ предѣльнаго круга расположенныхъ подобно, какъ и здѣсь части предѣльной сферы, слѣдуетъ, что

$$S' = S e^{-2c}$$

$$S'' = S e^{-4c}$$

$$S''' = S e^{-6c} \text{ и т. д.}$$

Называемъ еще P, P', P'' и т. д. объемы внутри конической поверхности между S, S' между S' и S'' и т. д. и замѣтимъ къ тому что объемы P, P' P'' и т. д. должны быть пропорціональны поверхностямъ S, S' S'' и т. д. Итакъ должно быть $P = CS$, гдѣ C зависитъ только отъ c откуда слѣдуетъ, что:

$$P' = CS' = CSe^{-2c}.$$

$$P'' = CS'' = CSc^{-4c}$$

Сумма $\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}$ по этому будетъ объемъ внутри конической поверхности, которой основаніе S и которая простирается безпредѣльно, въ сторону параллельности прямыхъ производящихъ. Пусть этотъ объемъ будетъ K; получимъ:

$$K = \frac{CS}{1 - e^{-2c}}.$$

Эта величина не должна зависить отъ c, а это требуетъ, чтобы:

$$C = (1 - e^{-2c})\, A,$$

гдѣ A число отвлеченное, а такъ какъ единица объема произвольна, то мы примемъ $C = \frac{1}{4}(1 - e^{-2c})$ съ тѣмъ чтобы объемъ P будучи выраженъ формулой

$$P = \tfrac{1}{2} S (1 - e^{-2c})$$

обращался въ $P = cS$ для безконечно малаго c, выраженіе, которое согласно съ тѣмъ, какъ выражается въ обыкновенной геометріи объемъ призмы съ основаніемъ S и съ высотою c. Можно также за элементъ объема принимать ограниченный данною поверхностью объемъ внутри конической поверхности, образуемой осями предѣльной сферы, проведенными чрезъ всѣ точки кривой, ограничивающей часть данной поверхности безконечно малой во всѣ стороны. Большое число различныхъ выраженій для элемента той же геометрической величины доставляетъ средства для сравненія интеграловъ, средства, которыя въ особенности полезны въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ.

Показавъ до сихъ поръ, какимъ образомъ надобно вычислять длину кривыхъ линій, величину поверхностей и величину объема тѣлъ, мы вправѣ утверждать что пангеометрія составляетъ ученіе геометрическое полное. Одного взгляда на уравненія, которымъ выражаютъ зависимость угловъ и боковъ прямолинейныхъ треугольниковъ, достаточно, чтобы доказать, что начиная съ этихъ уравненій пангеометрія дѣлается вычисленіемъ аналитическимъ, которое замѣняетъ и обобщаетъ аналитическій способъ обыкновенной геометріи. Можно бы начать изложеніе пангеометріи уравненіями (19) и даже попытаться замѣнить эти уравненія другими, которыя бы выражали зависимость боковъ и угловъ всякаго прямолинейнаго треугольника. Но въ этомъ послѣднемъ случаѣ надо было бы доказывать, что эти новыя уравненія согласуются съ основными геомегрическими понятіями. Уравненія (19), будучи выведены съ помощію этихъ основныхъ геометрическихъ понятій, необходимо съ ними согласуются. Итакъ всѣ уравненія, какими можно бы было замѣнить уравненія (19), должны, если они не будутъ слѣдствіемъ уравненія (19), привести къ заключеніямъ противнымъ основнымъ геомитрическимъ понятіямъ. Итакъ уравненія (19) служатъ основаніемъ геометріи въ самомъ общемъ видѣ, потому что они независятъ отъ предположенія, что сумма трехъ угловъ во всякомъ прямолинейномъ треугульникѣ равна двумъ прямымъ.

Пангеометрія, какъ она здѣсь изложена, основанная на началахъ несомнѣнныхъ, подаетъ, какъ мы видѣли средства къ вычисленію значенія различныхъ геометрическихъ величинъ и доказываетъ вмѣстѣ, что принятое въ обыкновенной геометріи явно или скрытно предположеніе, что сумма трехъ угловъ всякаго прямолинейнаго треугольника постоянна, не есть необходимое слѣдствіе нашихъ понятій о пространствѣ. Одинъ опытъ только можетъ подтвердить истину этаго предположенія, напр. измѣреніемъ на самомъ дѣлѣ трехъ угловъ прямолинейнаго треугольника, измѣреніе которое можетъ быть произведено различнымъ образомъ. Можно измѣрить три угла въ треугольникѣ, построенномъ на искуст-

венной плоскоти, или три угла одного треугольника въ пространствѣ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ надобно предпочесть треугольники, которыхъ бока очень велики, потому что согласно съ теоріей пангеометріи, разность суммы трехъ угловъ треугольника съ двумя прямыми углами тѣмъ болѣе, чѣмъ бока болѣе. Пусть r полупоперечникъ круга, A уголъ при центрѣ между полупоперечниками противъ хорды, равной r. Называемъ p перпендикулъ, опущенный изъ центра круга къ хордѣ r, которую онъ раздѣляетъ по поламъ. Разсматриваемъ одинъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ котораго перпенеикулярныя бока p и $\frac{r}{2}$ а гипотенуза r.

Согласно съ общимъ уравненіемъ (13) въ этомъ треугольникѣ будетъ:

$$\text{sin.}\frac{A}{2}\,\text{tang.}\,\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right) = \text{tang.}\,\Pi\left(r\right),$$

уравненіе, которое въ соединеніи съ тожественнымъ уравненіемъ

$$\text{tang.}\,\Pi\left(r\right) = \frac{\text{sin.}^2\,\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}{2\,\text{cos.}\,\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}$$

даетъ:

$$\text{sin.}\frac{A}{2} = \tfrac{1}{2}\,\text{sin.}\,\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right).$$

Въ обыкновенной геометріи имѣемъ:

$$A = \tfrac{\pi}{3}.$$

Пусть дѣйствительное измѣреніе даетъ $A = \frac{2\pi}{6+K}$

гдѣ K положительное число. Итакъ должно быть

$$\text{sin.}\left(\frac{\pi}{6+K}\right) = \tfrac{1}{2}\,\text{sin.}\,\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right).$$

Если K и r даны, то возможно вывести изъ этаго уравненія значеніе $\Pi\left(\frac{r}{2}\right)$ послѣ чего находимъ уголъ параллельности $\Pi\left(x\right)$ для всякой прямой x. Разстояніе между небесными тѣлами доставляетъ намъ случай наблюдать углы треугольниковъ, которыхъ бока очень велики. Называемъ α геоцентрическую широту неподвижной звѣзды въ данную эпоху, а β другую геоцентрическую широту тойже звѣзды, которая отвѣчаетъ времени, когда земля снова находится въ плоскости перпендикулярной къ эклиптикѣ и проведенной чрезъ первое мѣсто звѣзды. Пусть 2α разстояніе между этими двумя положеніями земли, δ уголъ подъ которымъ видно разстояніе 2α изъ звѣзды. Если углы α, β, δ неудовлетворяютъ уравненію $\alpha = \beta + \delta$, то это будетъ знакомъ, что сумма трехъ угловъ этого

треугольника не равна двумъ прямымъ угламъ. Можно такъ выбрать звѣзду, что $\delta = o$ и можно всегда предположить, что существуетъ линія x такая, для которой

$$\Pi(x) = a.$$

Если $\delta = o$, то прямыя, проведенныя отъ двухъ положеній земли къ звѣздѣ могутъ почитаться за параллельныя, въ слѣдствіе чего должно быть $\beta = \Pi(x + 2a)$, откуда слѣдуетъ согласно съ доказаннымъ выше, что

$$\operatorname{tang} \tfrac{\alpha}{2} = e^{-x}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{\beta}{2} = e^{-x-2a}$$

Всякій разъ, когда α и β въ наблюденіяхъ звѣзды, для которой $\delta = o$, окажутся различными, два послѣднія уравненія дадутъ x и a, выраженныя посредствомъ линіи принятой за единицу въ пангеометріи. Такимъ образомъ зная уголъ параллельности $\Pi(x)$ для опредѣленной линіи x можно вычислить уголъ $\Pi(y)$ для всякой линіи y.